Certificat de géométrie supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 182-184
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__182_0>

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On donne la surface de révolution* Σ *qui a pour équations paramétriques*

$$x = \sin t \cos \omega, \qquad y = \sin t \sin \omega, \qquad z = \cos t + \log \operatorname{tang} \frac{t}{2}.$$

1° *Calculer les cosinus directeurs de la normale à* Σ, *les rayons de courbure principaux, l'angle sous lequel les lignes asymptotiques coupent les méridiens, la courbure géodésique des parallèles et la courbure totale. Déterminer les lignes asymptotiques.*

2° *Déterminer les lignes géodésiques de* Σ.

3° *Par chaque point* $M(t, \omega)$ *de* Σ *on mène les deux tangentes à* Σ *qui font avec le méridien de* M *un angle* θ *tel que*

$$\sin t \sin \theta = \sin t_0,$$

t_0 *étant une constante donnée. Montrer que ces droites forment une congruence de normales.*

Parmi les arêtes de rebroussement des développables de cette congruence, il y en a qui sont sur Σ, *que peut-on en dire?*

4° *Calculer la courbure totale de la surface* Σ_1 *d'équations paramétriques*

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = v + f(u).$$

Former une équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction $f(u)$ *pour que* Σ_1 *soit applicable sur* Σ. *Suffit-il que* $f(u)$ *soit une intégrale de cette équation différentielle pour que* Σ_1 *soit applicable sur* Σ ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Par chaque point* $P(t)$ *de l'hélice circulaire* (C)

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = t,$$

on mène dans le plan rectifiant de C *une droite* Δ *faisant un angle constant avec* Oz. *On suppose* Δ *orientée de manière que, dans le plan rectifiant de* C, *la demi-droite positive* Δ *et la demi-tangente à* C *dans le sens des* t *croissants, soient du même côté de la parallèle à* Oz *menée par* P, *et l'on désignera par* φ *l'angle constant, compris entre* O *et* π, *des directions positives de* Δ *et de* Oz. *On fixe la position d'un point* M *quelconque de* Δ *par* $\overline{PM} = \rho$. *Soit* S *la surface lieu des droites* Δ.

Calculer les cosinus directeurs de Δ. *Calculer les coordonnées de* M *en fonction de* t, ρ *et* φ.

Calculer les coefficients du plan tangent à S *au point* M(t, ρ). *Déterminer pour chaque droite* Δ *le plan asymptote, le plan central, le point central et le paramètre de distribution. Déterminer les arêtes de rebroussement des développables enveloppées par les plans asymptotes et les plans centraux.*

Déterminer les trajectoires orthogonales des droites Δ. *Par chaque point* (t, ρ) *de* S *il passe une de ces trajectoires orthogonales; déterminer son centre de courbure géodésique en ce point.*

Indications sur la solution, par A. Monjallon. — I. La surface Σ proposée est la pseudosphère, la méridienne est une tractrice. On obtient facilement par un calcul classique les cosinus directeurs de la normale à Σ,

$$\lambda = \cos t \cos \omega, \qquad \mu = \cos t \sin \omega, \qquad \nu = -\sin t,$$

les rayons de courbure principaux sont, calculés d'après les formules d'Olinde Rodrigues,

$$R_1 = -\cot t, \qquad R_2 = \operatorname{tang} t,$$

ce sont R_1 rayon de courbure de la méridienne, R_2 rayon de courbure correspondant au parallèle.

On trouve ensuite que les angles des asymptotiques avec les méridiens sont $+t$ et $-t$. La courbure géodésique des parallèles est 1, longueur de la tangente au méridien et la courbure totale est $\frac{1}{R_1 R_2} = -1$, elle est constante et négative.

Les lignes asymptotiques ont pour équation différentielle $d\omega = \pm \frac{dt}{\sin t}$, d'où en intégrant,

$$\operatorname{tang} \frac{t}{2} = e^{\pm\omega + c}.$$

2° Les lignes géodésiques de Σ se déterminent facilement au moyen de l'équation de Clairaut $r \sin \theta =$ const., r rayon du parallèle, θ angle avec le méridien, ce sont les courbes satisfaisant à

$$\sin t \sin \theta = \sin t_0 \qquad (t_0 \text{ constante arbitraire}).$$

3° Les lignes envisagées étant des géodésiques de Σ, leurs tangentes forment une congruence de normales, les arètes de rebroussement des développables de cette congruence sont géodésiques de Σ.

4° La courbure totale de la surface Σ_1 est

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{u^3 f' f'' - 1}{[u^2 f'^2 + u^2 + 1]^2}.$$

Pour que Σ_1 soit applicable sur Σ, il faut qu'elle ait même courbure totale

$$u^3 f' f'' - 1 = -[u^2 f'^2 + u^2 + 1]^2$$

ou

$$u^3 f' f'' + u^4 f'^4 + 2u^2(u^2+1) f'^2 + u^2(u^2+2) = 0,$$

condition d'ailleurs suffisante.

II. Le plan rectifiant de l'hélice étant tangent au cylindre, les cosinus directeurs de Δ sont $-\sin t \sin\varphi$, $\cos t \sin\varphi$ et $\cos\varphi$ et les coordonnées de M sont

$$x = -\rho \sin t \sin\varphi + \cos t, \qquad y = \rho \cos t \sin\varphi + \sin t, \qquad z = \rho \cos\varphi + t.$$

Les coefficients du plan tangent à S en M (t, ρ) sont

$$\cos t(\sin\varphi - \cos\varphi) + \rho \sin t \sin\varphi \cos\varphi,$$
$$\sin t(\sin\varphi - \cos\varphi) - \rho \cos t \sin\varphi \cos\varphi,$$
$$\rho \sin^2\varphi.$$

Les coefficients du plan asymptote sont alors

$$\sin t \sin\varphi \cos\varphi, \qquad -\cos t \sin\varphi \cos\varphi, \qquad \sin^2\varphi.$$

Le point central correspond à $\rho = 0$, les coefficients du plan central sont alors $\cos t(\sin\varphi - \cos\varphi)$, $\sin t(\sin\varphi - \cos\varphi)$, 0. Le paramètre de distribution est $K = \cot.\varphi - 1$. L'hélice donnée est la ligne de striction de la surface S. L'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans asymptotes est l'hélice circulaire

$$x = \tan\!g\varphi \cos t, \qquad y = \tan\!g\varphi \sin t, \qquad z = t.$$

L'enveloppe des plans centraux étant le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, l'arête de rebroussement est rejetée à l'infini vers OZ. Les trajectoires orthogonales des génératrices sont définies par $\rho = (\sin\varphi + \cos\varphi)t$. Le centre de courbure géodésique est le point défini par $\rho \times \rho' = -K^2$, K paramètre de distribution.

(Rennes, novembre 1926.)