NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. BICKART

Sur une généralisation des caustiques par réfraction

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 175-178

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__175_1>

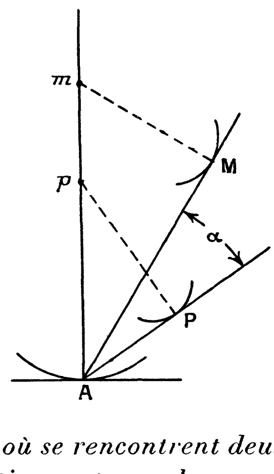
SUR UNE GÉNERALISATION DES CAUSTIQUES PAR RÉFRACTION;

PAR L. BICKART.

Le physicien Cornu a donné la construction du point où un rayon réfracté touche son enveloppe, connaissant le point où le rayon incident touche la sienne. Je vais résoudre le problème plus général suivant :

On considère sur une courbe (A) *donnée dans le plan un*

Fig. 1.



point A *quelconque où se rencontrent deux droites mobiles* AP, AQ, *faisant respectivement avec la normale en* A *les angles* i

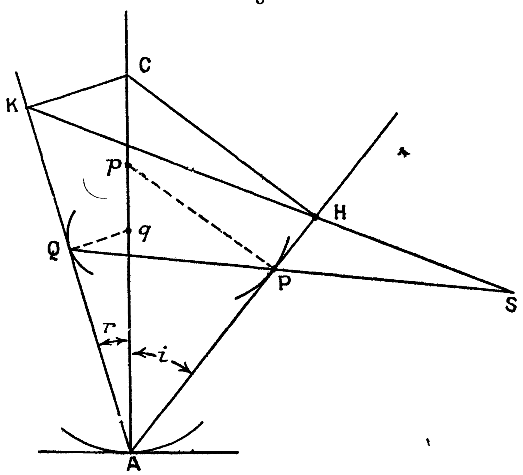
et r. Ces angles étant liés par une relation connue $f(i, r) = 0$ *trouver le point où l'une des droites mobiles touche son enveloppe connaissant le point où l'autre droite touche la sienne.*

1° *Rappel de formule* (*fig.* 1). — Si deux droites se coupent en A sous l'angle α, soient M et P les points où elles touchent respectivement leurs enveloppes. Les normales à ces droites, en M et P rencontrent la normale en A aux points m et p. Si ds est l'élément d'arc en A sur la courbe (A) on a

$$d\alpha = \left(\frac{1}{Ap} - \frac{1}{Am}\right) ds. \tag{1}$$

2° *Corollaire.* — Si AM se confond avec la normale en A à (A) les points M et m viennent se confondre au centre de cour-

Fig. 2.



bure C de (A) en A. Soit $R = AC$ le rayon de courbure (*fig.* 2). Si l'on appelle i l'angle de AP avec la normale AC, on aura

$$di = \left(\frac{1}{Ap} - \frac{1}{R}\right) ds.$$

3° Projetons C en H sur AP, et soit dt l'angle de contingence en A ; on a

$$di = \frac{ds}{R}\left(\frac{R}{Ap} - 1\right) = \left(\frac{AH}{AP} - 1\right) dt.$$

Projetons de même C en K sur AQ et soit Q le point où AQ touche son enveloppe. On aura aussi

$$dr = \left(\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AQ}} - 1\right) dt.$$

Entre les deux équations qui donnent di et dr éliminons dt; il vient

$$(2) \qquad \left(\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AP}} - 1\right) dr = \left(\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AQ}} - 1\right) di.$$

Appelons S le point où PQ rencontre HK et soit $\frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{SK}} = m$. On a, en introduisant la notation vectorielle,

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AH}} - m\overrightarrow{\mathrm{AK}}}{1 - m} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \lambda\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1 - \lambda}.$$

En identifiant les composantes dirigées suivant AP, AQ il vient

$$\frac{\mathrm{AH}}{1-m} = \frac{\mathrm{AP}}{1-\lambda}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AP}} - 1 = \frac{\lambda - m}{1-\lambda},$$

$$m\frac{\mathrm{AK}}{1-m} = \lambda\frac{\mathrm{AQ}}{1-\lambda}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AQ}} - 1 = \frac{1}{m}\,\frac{\lambda - m}{1-\lambda},$$

d'où en portant dans l'équation (2) et après réduction

$$m = \frac{di}{dr}.$$

Telle est la relation que je voulais établir et d'où résulte la construction :

Projeter le centre de courbure C *de la courbe* (A) *en* H *et* K *sur les deux droites mobiles. Construire sur* HK *le point* S *qui divise* $\overline{\mathrm{HK}}$ *dans le rapport* $\frac{di}{dr}$. *La droite qui joint les contacts de* AP, AQ *avec leurs enveloppes passe au point* S.

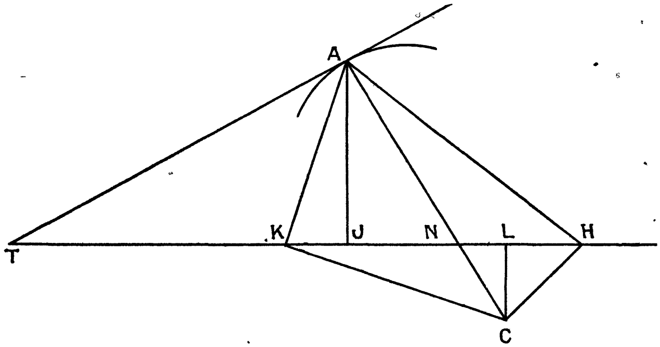
Cas particulier. — Si le centre de courbure C est à l'infini la construction se modifie comme suit :

Prendre sur la normale en A un point C quelconque et construire S comme ci-dessus. La droite PQ sera parallèle à AS.

Applications diverses. — Je me borne à énoncer quelques résultats faciles à vérifier :

a. (*fig*. 3). — Soient J la projection de A sur HK, L celle de

Fig. 3.



C sur HK, N et T les points où HK coupe la normale AC et la tangente AT.

S sera	en L	si	$\sin r = n \sin i$,
»	en J	si	$\cos r = n \cos i$,
»	en N	si	$\operatorname{tang} r = n \operatorname{tang} i$,
»	en T	si	$\operatorname{tang} r - \operatorname{tang} i = \text{const.}$,
»	à l'infini	si	$r - i = \text{const.}$

b. *Centre de courbure des podaires*. — Soient M un point d'une courbe (M), P un point fixe, π sa projection sur la tangente en M. La normale en π à la podaire (π) passe au milieu I de PM. Soient C le centre de courbure de (M) en M, H sa projection sur PM, S la projection de H sur MC. La droite PS rencontre πI au centre de courbure de (π).

c. *Centre de courbure des coniques*. — Soient P et Q les foyers, A le point mobile; la normale en A rencontre PQ en S. La perpendiculaire à AS en S rencontre AP, AQ, en H et K. Les perpendiculaires à AP en H, à AQ en K se coupent sur AS au centre de courbure C.

(Pour ces deux derniers paragraphes, le lecteur est prié de faire la figure.