NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. DELTHEIL

Les roulettes planes et l'intégration de certaines équations différentielles

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 168-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__168_1>

LES ROULETTES PLANES
ET L'INTÉGRATION DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR R. DELTHEIL.

I. Soit une courbe plane (C), qui roule sans glissement sur l'axe Ox; un point A invariablement lié à cette courbe décrit une trajectoire (Γ). La courbe (C) est habituellement nommée *roulante*, la courbe (Γ) *roulette*. Il y a sans doute peu de chose à dire sur la théorie des roulettes après les travaux de Cesàro et de Haton de la Goupillière; le présent article a pour but d'attirer l'attention des lecteurs des *Nouvelles Annales* sur une catégorie intéressante d'exercices s'y rapportant.

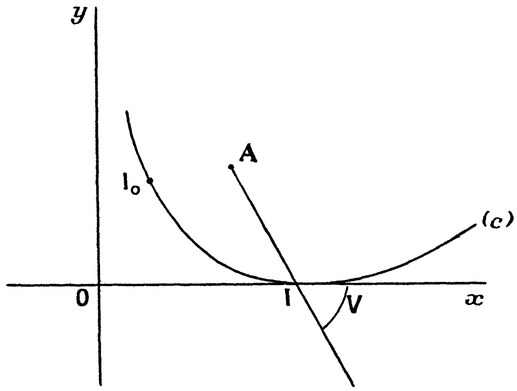
Si nous définissons la roulante en coordonnées polaires, le pôle étant le point A, le roulement sera caractérisé par la relation

$$\xi = s$$

entre l'abscisse ξ du point de contact I à un moment donné sur Ox et l'abscisse curviligne s du même point sur la roulante.

L'application du théorème des projections au contour OIA (*fig.* 1) nous donne, pour les coordonnées x, y du point A, les

Fig. 1.



expressions

$$x = s - \rho \cos V, \qquad y = \rho \sin V. \tag{1}$$

Dans ces formules, V désigne l'angle que fait avec Ox, demi-tangente à la roulante dans le sens des arcs croissants, la direction positive de rayon vecteur sur laquelle le segment AI a pour mesure ρ. Si θ est l'angle polaire correspondant, on a

$$d\rho = \cos V\, ds, \qquad \rho\, d\theta = \sin V\, ds, \qquad \operatorname{tang} V = \frac{\rho\, d\theta}{d\rho}. \tag{2}$$

Il résulte immédiatement des relations (1), dans ces conditions, que

$$dx = \sin V\, d\sigma, \qquad dy = \cos V\, d\sigma, \qquad \frac{dy}{dx} = \cot V, \tag{3}$$

où

$$d\sigma = \rho\, dV + \sin V\, ds \tag{4}$$

est la mesure de l'élément d'arc de la roulette sur la demi-tangente à cette courbe définie par la valeur $\theta + \frac{\pi}{2}$ de l'angle polaire autour de A.

Ces résultats étant établis, nous pouvons *remplacer le problème de la recherche d'une courbe* (Γ) *définie par une* *propriété différentielle par celui de la recherche de la courbe* (C) *correspondante*. Il s'agit, pour l'équation différentielle dont dépend la courbe (Γ), d'un changement simultané de variable et de fonction, ρ fonction de θ remplaçant y fonction de x. Les formules précédentes permettent de trouver l'équation transformée, en faisant disparaître les variables s, V, σ si on le désire; mais il y a souvent avantage à conserver tout ou partie de ces variables.

II. L'application de cette méthode aux équations différentielles du type

$$y' = f(y),$$

qu'on sait évidemment intégrer directement par une quadrature, conduit à la génération comme roulettes de nombreuses courbes simples. Le tableau suivant indique, dans cet ordre d'idées, quelques résultats immédiats.

Équations.	Roulettes (Γ).	Roulantes (C).
$y' = m$	$y = mx + \lambda$	$\sigma = e^{m(\theta - \theta_0)}$
$y' = \pm\sqrt{\dfrac{2a - y}{y}}$	Cycloïde de base Ox et de paramètre a	Cercle $\rho = 2a \sin(\theta - \theta_0)$
$y' = \pm\sqrt{\dfrac{y^2 - a^2}{a^2}}$	Chaînette de base Ox et de paramètre a	Parabole $\rho = \dfrac{2a}{1 - \cos(\theta - \theta_0)}$
$y' = \dfrac{\pm y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$	Tractrice de base Ox et de paramètre a	Spirale hyperbolique $\rho = \dfrac{\pm a}{\theta - \theta_0}$

Développons les calculs dans le cas de l'équation

$$yy' + \frac{y}{y'} = a,$$

dont les courbes intégrales possèdent la propriété que la tangente et la normale en un point découpent sur Ox un segment TI de mesure constante a.

De

$$y = \frac{ay}{1 + y'^2},$$

nous concluons immédiatement

$$\rho = a \cos V;$$

et puisque $\tang V = \frac{\rho\, d\theta}{d\rho}$, nous avons

$$d\theta = -\tang^2 V\, dV.$$

D'où

$$\theta - \theta_0 = V - \tang V.$$

La roulante est la *spirale tractrice*

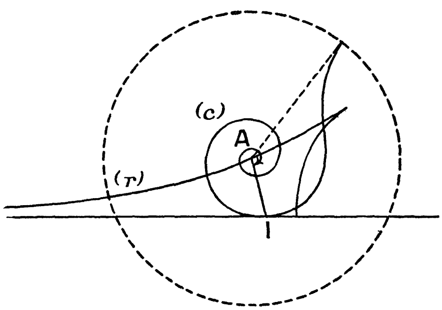
$$\rho = a \cos t,$$
$$\theta - \theta_0 = t - \tang t,$$

courbe inverse de la développante de cercle dont les équations paramétriques par rapport à des axes AX et AY d'angles polaires θ_0 et $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$ sont, en posant $\tang t = u$,

$$X = a(\cos u + u \sin u),$$
$$Y = a(u \cos u - \sin u).$$

La figure 2 représente les courbes (C) et (Γ) relatives à ce

Fig. 2.



dernier exemple. Le point de rebroussement de (Γ) est obtenu lorsque vient sur Ox le point d'inflexion de la spirale tractrice.

III. Soit ω le centre de courbure de la roulette en A; la mesure du segment $A\omega$ sur la demi-normale d'angle polaire $\theta + \pi$ $\left(\text{faisant l'angle } +\frac{\pi}{2} \text{ avec la demi-tangente positive}\right)$ est

$$\frac{d\sigma}{d\alpha},$$

α étant l'angle $\frac{\pi}{2} - V$ de cette demi-tangente positive avec Ox.

Sur le rayon vecteur d'angle polaire θ, nous avons donc

$$(5) \qquad \overline{A\omega} = R = \frac{d\sigma}{dV} = \rho + \sin V \frac{ds}{dV} = \rho\left(1 + \frac{d\theta}{dV}\right).$$

Du reste, les formules

$$x = s - \rho\cos V, \qquad y' = \cot V$$

entraînent

$$(6) \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{-dV}{\sin^3 V(\rho\, dV + \sin V\, ds)} = \frac{-dV}{\rho \sin^3 V(d\theta + dV)}.$$

Les formules (5) et (6) sont équivalentes, et nous pouvons grâce à elles, appliquer aux équations différentielles du second ordre la méthode définie plus haut.

Un problème classique est celui de la recherche des courbes telles que $\frac{\overline{A\omega}}{\overline{AI}} = k$ (courbes de Ribaucour); les formules (5) nous montrent que les roulantes correspondantes vérifient la condition

$$1 + \frac{d\theta}{dV} = k,$$

d'où l'on tire

$$V = \frac{\theta - \theta_0}{k - 1},$$

puis

$$\rho = a \sin^{k-1} \frac{\theta - \theta_0}{k - 1}.$$

Ces roulantes sont aussi des courbes classiques, appelées souvent *spirales sinusoïdes*. Cette correspondance entre les courbes de Ribaucour et les spirales sinusoïdes paraît avoir été signalée pour la première fois, longtemps avant les travaux de Ribaucour, par Ossian Bonnet, en 1844, dans le *Journal de Liouville*. L'étude des cas particuliers les plus simples permet de retrouver les générations comme roulettes des courbes de Ribaucour familières; nous laissons au lecteur le soin d'en examiner le détail.

La courbe de Ribaucour relative à $k = 3$ est la roulette décrite par le point de rebroussement d'une *cardioïde* roulant sur Ox. En prenant

$$\rho = \frac{a}{2}(1 - \cos\theta)$$

pour équation polaire de cette cardioïde, le sommet étant origine des arcs, nous avons

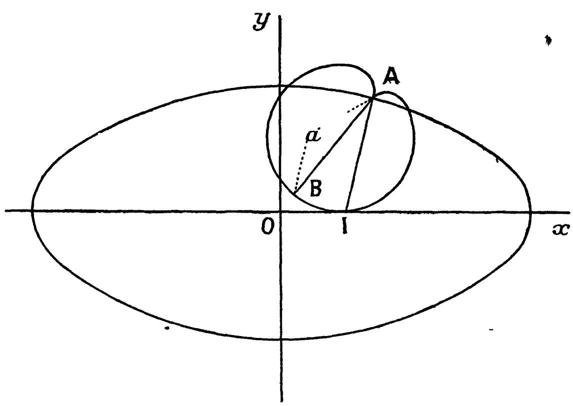
$$s = 4R\sin\frac{\theta}{2}, \qquad V = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2},$$

d'où

$$x = a\left(3\sin\frac{\theta}{2} - \sin^3\frac{\theta}{2}\right),$$
$$y = a\cos^3\frac{\theta}{2}.$$

La figure 3 représente les courbes (C) et (Γ); celle-ci admet les

Fig. 3.



mêmes sommets que l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 4a^2$, mais elle est tout entière intérieure à cette ellipse.

IV. Cherchons enfin les roulantes (C) telles que (Γ) vérifie l'équation

$$\frac{1}{\overline{AI}} + \frac{1}{\overline{A\omega}} = \frac{1}{a},$$

c'est-à-dire soit susceptible d'engendrer, en tournant autour de Ox, une surface à courbure moyenne constante. Ces surfaces, étudiées notamment par M. Lindelöf, jouent un rôle fondamental dans la théorie de la capillarité.

Puisque

$$R = \rho\left(1 + \frac{d\theta}{dV}\right),$$

la courbe (C) doit vérifier l'équation

$$\frac{d\theta}{dV} = \frac{2a - \rho}{\rho - a}$$

qui se ramène, en posant $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho'$, $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho''$, à la forme

$$\frac{\rho^2 + \rho'^2}{\rho'^2 - \rho\rho''} = \frac{2a - \rho}{\rho - a}.$$

Or, cette équation du second ordre est la même que celle obtenue dans l'étude du mouvement des planètes, si l'on veut caractériser en coordonnées polaires toutes les trajectoires répondant à une valeur donnée de la constante des forces vives.

Éliminant en effet le temps entre les équations fondamentales des aires et des forces vives

$$v^2 = \frac{2\mu}{\rho} + h, \qquad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

nous avons l'équation

$$C^2(\rho^2 + \rho'^2) = 2\mu\rho^3 + h\rho^4;$$

en égalant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à θ, et posant $a = \frac{-\mu}{h}$, nous avons pour caractériser les trajectoires envisagées l'équation

$$\frac{\rho^2 + \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{3a - 2\rho}{2a - \rho},$$

qui se ramène immédiatement à celle des courbes (C) cherchées. Les résultats élémentaires de la théorie du mouvement newtonien nous permettent d'écrire tout de suite l'équation polaire générale de ces courbes,

$$\rho = \frac{a^2 - \lambda^2}{a + \lambda\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Ce sont toutes les coniques de foyer A et d'axe focal $2a$. Ainsi les lignes (Γ) sont les trajectoires d'un foyer d'une telle conique roulant sur une droite; M. Lindelöf les appelle *chaînettes* elliptique ou hyperbolique, la chaînette parabolique étant la chaînette proprement dite, qui correspond à une valeur infinie de a et est engendrée par le foyer d'une parabole roulant sur une droite. Les trois surfaces de révolution à courbure moyenne constante qui correspondent ainsi à l'ellipse, l'hyperbole et la parabole, sont appelées *onduloïde, nodoïde* et *caténoïde*.