NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificat de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 155-157
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__155_1>

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère l'équation du deuxième degré en z à coefficients complexes*

$$z^2 - 2(1 + it^2)z + (1 - t^4) = 0,$$

t désignant une variable réelle, pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ *à* $+\infty$.

1° *Donner l'expression des deux racines $z_1(t)$ et $z_2(t)$ de cette équation sous la forme*

$$z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t), \qquad z_2(t) = x_2(t) + iy_2(t).$$

2° *Pour chaque valeur de t on marque dans le plan complexe*

$$z = x + iy,$$

les points P_1 *et* P_2 *représentant* z_1 *et* z_2 ; *quand* t *varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$, P_1 *et* P_2 *décrivent respectivement les courbes* C_1 *et* C_2 ; *tracer ces courbes* [*on pourra d'abord former leurs équations explicites* $y = f(x)$].

3° *Marquer de même les points* P_3 *et* P_4 *correspondant à*

$$z_3(t) = \frac{z_1(t) + z_2(t)}{2}, \qquad z_4(t) = z_1(t) z_2(t)$$

et tracer les courbes C_3 *et* C_4 *décrites par ces points.*

II. *Soit* C *le centre de courbure correspondant au point* M *qui décrit une courbe* (γ).

1° *Déterminer l'équation* $y = f(x)$ *de* (γ) *de manière que la projection du vecteur* $\overrightarrow{MC}$ *sur l'axe* Oy *soit égale à une constante donnée* k.

2° *Dans la famille de courbes obtenue, déterminer celle qui passe par* O *et qui est tangente à* Ox,

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad y'_0 = 0;$$

indiquer l'allure générale de cette courbe (γ_0).

3° *Sur la courbe* (γ_0) *on prend comme origine des arcs* s *le point* O *et un sens tel que* s *croisse avec* x. *Calculer en fonction de* x :

a. l'arc s;

b. l'angle $\sigma = (\widehat{Ox, \overrightarrow{MT}})$, $\overrightarrow{MT}$ *désignant la tangente positive;*

c. le rayon de courbure R.

Indications sur la solution. — I. Les racines sont

$$z = 1 + it^2 \pm t(1 + i).$$

Les points qui les représentent décrivent la parabole

$$y = x^2 - x.$$

Le point P_3 décrit une partie de la droite

$$x = 1,$$

et le point P_4, une partie de l'axe Ox.

II. La courbe (γ) a pour équation

$$y - y_0 = -K \log \cos \frac{x - x_0}{K}.$$

L'arc s a pour valeur

$$K \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2K}\right).$$

L'angle σ est $\frac{x}{K}$; le rayon de courbure R a pour valeur

$$\frac{K}{\cos \frac{x}{K}},$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Étudier la variation et tracer la courbe représentative de la fonction*

$$y = \frac{x}{x^4 - 1};$$

décomposer cette fraction en éléments simples et calculer les deux intégrales

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} y\,dx, \qquad I_2 = \int_2^{+\infty} y\,dx$$

avec quatre chiffres significatifs.

II. *On considère une ellipse d'axes* $AA' = 2a$, $BB' = 2b$; *soit* $MM'M''M'''$ *un rectangle inscrit dans cette ellipse. Donner l'expression du périmètre p du rectangle en fonction de l'anomalie excentrique*

$$t = (\widehat{OA, ON})$$

de son sommet M. *Étudier la variation de p lorsque* M *décrit l'arc* AB; *déterminer si p passe par un maximum ou un minimum et, dans l'affirmative, donner une construction simple de la position correspondante de* M.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. La fonction est décroissante. Son intégrale générale est

$$\frac{1}{4} \log \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right|,$$

d'où

$$I_1 = \frac{1}{4} \log \frac{3}{5}; \qquad I_2 = \frac{1}{4} \log \frac{3}{5}.$$

II. Le périmètre p passe par un maximum pour

$$\operatorname{tang} t = \frac{b}{a};$$

ON est alors parallèle à A'B.

(Lille, novembre 1926.)