NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BERTRAND GAMBIER

Surfaces se déformant de sorte que les lignes de niveau restent lignes de niveau

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 137-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__137_0>

SURFACES SE DÉFORMANT DE SORTE QUE LES LIGNES DE NIVEAU RESTENT LIGNES DE NIVEAU;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. M. Goursat a déterminé les *surfaces telles qu'au cours d'une déformation continue au sens de Gauss les lignes de niveau restent lignes de niveau* (*American Journal of Mathematics*, t. 14, 1892, p. 1-8). Je vais indiquer brièvement le principe de la recherche analytique, puis montrer comment de simples réflexions géométriques permettent d'obtenir, sans calculs, tous les résultats [1].

2. Si l'on prend les lignes de niveau dans les plans $z =$ const., on a pour *deux* surfaces applicables de cette espèce

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{c} dx^2 + dy^2 + dz^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2, \\ Z = \text{fonction de } z. \end{array} \right.$$

On peut donc obtenir, quand le couple (x, y, z), (X, Y, Z) est connu, la quantité nouvelle z_1, fonction de z, par une quadrature,

$$(2)\qquad dz_1^2 = dz^2 - dZ^2,$$

et la première égalité (1) revient à écrire

$$(3)\qquad dx^2 + dy^2 + dz_1^2 = dX^2 + dY^2.$$

Cela prouve que la surface (x, y, z_1) *est développable :* si donc on pose

$$(4)\quad p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}, \qquad q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y}, \qquad r_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}, \qquad s_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y}, \qquad t_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2};$$

on aura l'équation

$$(5)\qquad r_1 t_1 - s_1^2 = 0.$$

(1) Cette question a fait le sujet du certificat de Géométrie supérieure, juillet 1926, de Lille.

ou, en posant

$$(6) \qquad Z' = \frac{dZ}{dz}, \qquad Z'' = \frac{d^2Z}{dz^2},$$

$$(7) \qquad p_1 = p\sqrt{1-Z'^2}, \qquad q_1 = q\sqrt{1-Z'^2},$$

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} r_1 &= r\sqrt{1-Z'^2} - p^2\frac{Z'Z''}{\sqrt{1-Z'^2}},\\ s_1 &= s\sqrt{1-Z'^2} - pq\frac{Z'Z''}{\sqrt{1-Z'^2}},\\ t_1 &= t\sqrt{1-Z'^2} - q^2\frac{Z'Z''}{\sqrt{1-Z'^2}},\end{aligned}\right.$$

l'équation de Monge-Ampère,

$$(9) \qquad rt - s^2 - \frac{Z'Z''}{1-Z'^2}(q^2r + p^2t - 2pqs) = 0.$$

Cette équation s'intègre aisément par la méthode classique : les deux systèmes de caractéristiques sont confondus et les équations différentielles de ces caractéristiques admettent trois combinaisons intégrables; en continuant les calculs, il y a lieu d'introduire la notation ζ pour représenter la fonction de z, $\frac{Z'Z''}{1-Z'^2}$; quand ζ est choisie, d'ailleurs arbitrairement, l'intégration complète de (9) s'achève aisément en termes finis avec deux nouvelles fonctions arbitraires d'une variable; on a ainsi les expressions (x, y, z) des coordonnées d'un point de la première surface. On voit alors qu'il y a une déformation *continue*, car Z est donnée par l'équation du premier ordre en Z',

$$(10) \qquad Z'Z'' = (1 - Z'^2)\zeta$$

qui donne Z'^2 par une quadrature; l'équation (3) donne ensuite X et Y.

On peut remarquer que si l'on prend les lignes de niveau dans les plans $x =$ const., on aura

$$(1') \qquad \left\{\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2,\\ X &= \text{fonction de } x;\end{aligned}\right.$$

on posera

$$(2') \qquad dx_1^2 = dx^2 - dX^2$$

et la surface (x_1, y, z) sera développable, de sorte que si p_1, q_1,

r_1, s_1, t_1 sont les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x_1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... de z exprimée en x_1 et y, on a au lieu de (9) l'équation

$$(11) \qquad (rt - s^2)\left(\frac{dx}{dx_1}\right)^2 + pt\frac{d^2 x}{dx_1^2} = 0,$$

toujours de Monge-Ampère et l'on continue comme plus haut. Les équations (9) et (11) constituent d'excellents exercices d'application des méthodes générales. Il reste ensuite à montrer que le réseau de Kœnigs, formé avec les lignes de niveau et les courbes de contact des cylindres circonscrits avec génératrices parallèles aux plans de niveau, se correspond à lui-même sur toutes les surfaces (on le sait déjà pour les lignes de niveau, mais il faut le montrer pour la seconde famille).

3. Traitons la question complètement par la géométrie; supposons les plans de niveau $x =$ const. On a posé,

$$(1) \qquad dx_1^2 = dx^2 - dX^2,$$

$$(2) \qquad dx_1^2 + dy^2 + dz^2 = dY^2 + dZ^2.$$

La surface D (x_1, y, z) *est développable :* donc on peut exprimer en termes finis (x_1, y, z) par les formules

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = x_1, \\ y = x_1\theta_1(a) + \eta_1(a), \\ z = x_1\theta\ (a) + \eta\ (a), \end{cases}$$

les fonctions θ_1, θ, η_1, η de la variable a satisfaisant à la relation

$$(4) \qquad \frac{\eta_1'}{\theta_1'} = \frac{\eta'}{\theta'} = \lambda(a),$$

où $\lambda(a)$ est une fonction arbitraire de a; la surface S(x, y, z) sera représentée par les équations paramétriques

$$(5) \qquad \begin{cases} x = x, \\ y = f(x)\theta_1(a) + \eta_1(a), \\ z = f(x)\theta\ (a) + \eta\ (a), \end{cases}$$

qui ne font intervenir que les fonctions arbitraires $f(x)$, $\lambda(a)$, $\theta(a)$, $\theta_1(a)$; en prenant l'une des fonctions λ, θ ou θ_1 comme nouveau paramètre (ce qui est possible si cette fonction ne se réduit pas à une constante), on réduit bien à trois le nombre des fonctions arbitraires. On peut remarquer dès maintenant que la transformation ponctuelle, *étendue à tout l'espace*,

$$(6) \qquad x_1 = f(x), \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z$$

remplace la surface S par la développable D; dans cette transformation, les lignes de niveau (relatives à yOz) restent lignes de niveau, chacune restant égale à elle même et n'ayant subi qu'une translation parallèle à Ox, d'intensité variable, fonction continue de son abscisse primitive; les tangentes de la surface S parallèles à yOz deviennent les tangentes parallèles à yOz de la surface D; or les courbes $a =$ const. sont, sur D, les génératrices; en tous les points d'une même génératrice G de D, les tangentes à D parallèles à yOz sont toutes parallèles entre elles et à la trace sur yOz du plan tangent à D le long de G : donc tout le long de la courbe $a = a_0$, correspondant à G sur S, les tangentes à S parallèles à yOz ont conservé la même direction : elles forment le cylindre circonscrit à S parallèlement à cette direction; *autrement dit les courbes $x =$ const. et $a =$ const. sont conjuguées sur* S; *d'ailleurs la courbe a_0 est plane et son plan est celui qui projette* G *sur yOz parallèlement à Ox.*

Les surfaces S étudiées ici sont toutes celles qui sont réductibles à une développable par la transformation (6) qui consiste à faire varier d'une façon continue les distances successives des plans parallèles à un même plan. Si S ou D est réalisée, à la façon d'un accordéon, par une série de cadres métalliques (réduits à leur pourtour), tous parallèles au plan yOz et reliés par un tissu souple, extensible, on peut dilater ou comprimer la surface de façon que les cadres conservent leur orientation commune, chaque point décrivant une perpendiculaire à cette direction de plan. On peut remarquer que faire la carte de D sur le plan yOz est très simple : on figure la projection sur yOz de la section par le plan x_0, c'est une courbe C_0 *arbitraire;* la projection de la section x_1 est une autre courbe C_1 *arbitraire;* en un point M_0 de C_0 on mène la tangente et l'on prend sur C_1 le point M_1 où la tangente est parallèle à celle de M_0; M_0M_1 est la projection de la génératrice issue de M_0; la section par le plan $x_0 + tx_1$ s'obtient en divisant chaque segment M_0M_1 par le point M tel que $\frac{M_0M}{MM_1} = t$ en grandeur et signe; cela fait, cette carte peut servir pour S à condition d'inscrire comme éloignement de chaque section de S non plus x relatif à D, mais $\varphi(x)$ où φ est une fonction arbitraire de x. L'arête de rebroussement de D a pour homologue sur S une arête de rebroussement, enveloppe des courbes $a =$ const. de S; le cylindre circonscrit a S le long de la courbe (a_0) est osculateur à S au point particulier où (a_0) touche son enveloppe [mais le plan osculateur à cette courbe (a_0) au point en jeu n'est pas le plan tangent à S].

Nous avons ainsi complètement intégré les équations équivalentes

$$rt - s^2 - (q^2r + p^2t - 2pqs)f(z) = 0,$$
$$rt - s^2 + pt\varphi(x) = 0,$$

où f et φ sont des fonctions arbitraires, et cela sans calcul, mais nous n'avons pas achevé le problème, c'est-à-dire trouvé les déformées d'une surface solution en nouvelle surface du même type. L'élimination de f ou φ donne une équation d'ordre 3, complètement intégrée aussi.

4. Nous arrivons au résultat en remarquant que si la surface (x_1, y, z) est développable [formules (3) du numéro précédent], la surface (kx_1, y, z), où k est une constante numérique *arbitraire*, est également développable. On écrit donc

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} dx_1^2 + dy^2 + dz^2 &= dY^2 + dZ^2,\\ k^2dx_1^2 + dy^2 + dz^2 &= d\overline{Y}^2 + d\overline{Z}^2,\\ dx_1^2 &= dx^2 - dX^2,\\ k^2dx_1^2 &= dx^2 - d\overline{X}^2 \end{aligned}\right.$$

et de là résultent évidemment les relations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2,\\ dx^2 + dy^2 + dz^2 &= d\overline{X}^2 + d\overline{Y}^2 + d\overline{Z}^2, \end{aligned}\right.$$

quand k varie, nous obtenons les déformées S_k de S; la déformée S_1 ne se distingue pas des autres; raisonnons donc sur S et S_k. Démontrons d'abord que les courbes $a =$ const. de S ont pour homologues sur S_k les courbes de même définition : ce résultat n'est pas évident, car si sur S et S_k nous connaissons les systèmes de Kœnigs relatifs aux sections planes par les plans $x =$ const., le fait que les courbes $x =$ const. se correspondent n'entraîne pas que les courbes de contact des cylindres circonscrits à S parallèlement à une direction de yOz aient pour homologues dans l'application les courbes de même définition de S_k. En tout cas S et S_k ont un système conjugué commun et l'équation de Laplace relative à ce système est, toujours d'après M. Kœnigs (mais un autre théorème), la *même* pour les deux surfaces, soit

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + A(u, v)\frac{\partial \theta}{\partial u} + B(u, v)\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

Elle admet pour solution x, y, z, $\overline{X} = f(x)$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ (et même

$$x^2 + y^2 + z^2 - \overline{X}^2 - \overline{Y}^2 - \overline{Z}^2);$$

substituons x et $\overline{X}$ dans (3); la comparaison donne

$$\frac{d^2\overline{X}}{dx^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0. \tag{4}$$

Si l'on choisit

$$\frac{d^2\overline{X}}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d\overline{X}}{dx} = h,$$

où h est une constante, on a aussi

$$dx_1^2 = \frac{dx^2}{k^2}(1 - h^2),$$

de sorte que la surface (x, y, z) ou $\left(\frac{kx_1}{\sqrt{1 - h^2}}, y, z\right)$ est développable, ainsi que toutes ses déformées : la construction géométrique de S à partir d'une développable D devait nous fournir cette solution, banale, à éliminer. Il reste donc $\frac{\partial x}{\partial u} = 0$, puisque u et v jouent un rôle interchangeable; donc le réseau conjugué est formé du système $v =$ const. ou $x =$ const. plus de la famille conjuguée sur chaque surface : *c'est donc le réseau de Kœnigs.* Nous avons maintenant, sans effort, la forme de $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ en formant effectivement l'équation de Laplace, en employant les formules (5) du numéro précédent, avec les variables x et a. On a

$$(5)\quad \frac{\partial y}{\partial x}=f'(x)\theta_1(a),\qquad \frac{\partial y}{\partial a}=f(x)\theta'_1(a)+\eta'_1(a),\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial a}=f'(x)\theta'_1(a).$$

En remplaçant η'_1 par $\lambda(a)\theta'_1(a)$, on voit que l'équation de Laplace

$$(6)\qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial a}-\frac{f'(x)}{f(x)+\lambda}\frac{\partial\Theta}{\partial a}=0$$

est satisfaite pour Θ égal à x, ou y, ou z. L'intégrale générale de (6) est manifestement, en dehors des solutions uniquement fonction de x,

$$(7)\qquad \Theta=f(x)\bar\theta(a)+\bar\eta(a)$$

avec la relation

$$(8)\qquad \frac{\bar\eta'(a)}{\bar\theta'(a)}=\lambda.$$

Telle sera donc la forme de Y et Z (nous pouvons en effet nous dispenser de barrer les lettres X, Y et Z). Écrivons donc

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathrm{Y}=f(x)\bar\theta_1(a)+\bar\eta_1(a),\\ \mathrm{Z}=f(x)\bar\theta\;(a)+\bar\eta\;(a),\\ \mathrm{X}=\varphi(x)\end{cases}$$

En égalant les ds^2, $\mathrm{E}\,dx^2+2\mathrm{F}\,dx\,da+\mathrm{G}\,da^2$, le terme en dx^2 nous donne l'équation aux variables séparées,

$$(10)\qquad \frac{1-\varphi'^2}{f'^2}=\bar\theta_1^2+\bar\theta^2-\theta_1^2-\theta^2.$$

Égalons chaque membre à une constante $(-n)$ et nous avons

$$(11)\qquad \bar\theta_1^2+\bar\theta^2=\theta_1^2+\theta_2^2-n,$$

$$(12)\qquad \mathrm{X}=\int\sqrt{1+nf'^2(x)}\,dx$$

(la surface S sera donc obtenue pour $n=0$). Le terme en $dx\,da$ nous donne la relation

$$\theta_1\theta'_1+\theta\theta'=\bar\theta_1\bar\theta'_1+\bar\theta\bar\theta',$$

conséquence de (11). Le terme en da^2 nous donne la relation complémentaire

$$\bar{\theta}'^{2}_{1} + \bar{\theta}'^{2} = \theta'^{2}_{1} + \theta'^{2}. \tag{13}$$

La forme de (11) et (13) conduit à poser

$$\bar{\theta}_1 = \rho \sin \omega, \qquad \bar{\theta} = \rho \cos \omega, \tag{14}$$

où ρ et ω sont fonctions de a et l'on trouve immédiatement

$$\omega' = \frac{\sqrt{(\theta_1^2 + \theta^2 - n)(\theta'^{2}_{1} + \theta'^{2}) - (\theta_1 \theta'_1 + \theta\theta')^2}}{\theta_1^2 + \theta^2 - n}; \tag{15}$$

d'où ω par une quadrature et la déformée est complètement connue pour chaque valeur de n; on a en effet, pour finir,

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\eta}'_1(a) &= \lambda \theta'_1(a) = \frac{\eta'}{\theta'} \bar{\theta}'_1, \\ \bar{\eta}'(a) &= \lambda \bar{\theta}'(a) = \frac{\eta'}{\theta'} \bar{\theta}'. \end{aligned} \right. \tag{16}$$

Chaque déformée s'obtient donc par *quatre* quadratures [formules (12), (15) et (16)]. J'ai respecté dans ce travail toutes les notations de M. Goursat dans l'article cité et j'ai voulu montrer comment la géométrie supprime les calculs.

5. Il reste à indiquer quelques exemples simples : il suffit de se reporter aux courbes C_0 et C_1 du n° 3.

1° Si C_0 et C_1 sont des cercles concentriques, S est de révolution, la développable D étant un cône de révolution (ou du moins un assemblage de troncs de cône de révolution coaxiaux).

2° Si C_0 et C_1 sont des courbes parallèles, S est surface moulure, la développable D étant constituée par les tangentes à une hélice *quelconque*.

3° Si C_0 et C_1 sont égales, C_1 se déduisant de C_0 par translation, la surface D est un cylindre, la surface S une surface de translation dont les profils de translation sont plans, dans deux plans rectangulaires.

4° On peut essayer de trouver des surfaces qui appartiennent de plusieurs façons au type indiqué. Les surfaces du second degré en donnent un exemple : il suffit de les couper par des plans parallèles à un plan principal; un ellipsoïde est donc, de trois façons différentes, solution; un paraboloïde, de deux façons.

5° Si l'on suppose λ constant, on a $\eta_1 = \lambda\theta_1 + y_0$, $\eta = \lambda\theta + z_0$ et il suffit d'un décalage de l'axe des x pour écrire

$$y = f(x)\theta_1(a), \qquad z = f(x)\theta(a).$$

Les courbes $a = \text{const.}$ sont alors les sections de la surface par les plans pivotant autour de Ox en même temps que les courbes de contact des cylindres circonscrits à génératrices parallèles à yOz, de sorte que les courbes conjuguées $x = \text{const.}$ sont aussi courbes de contact des cônes circonscrits ayant leur sommet sur Ox : le réseau est donc conjugué, au sens de Kœnigs, *doublement*. Ce sont ces surfaces qui sont étudiées, d'après Peterson, par Darboux (*Théorie des surfaces*, t. I, 2e édition, p. 181-184). Les déformées sont du même type. La développable D est un cône. A tout couple obtenu ici correspond, en annulant purement et simplement les fonctions η_1, η, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}$, un couple de Darboux-Peterson, la développable D étant remplacée par le cône directeur de ses génératrices.

6° Sauf ce cas spécial, où λ est constant, on pourra simplifier les formules en supposant que λ et a coïncident. S'il ne s'agit que d'une surface à représenter, comme

$$\eta'_1 = a\theta'_1, \qquad \eta' = a\theta',$$

on pourra, pour n'avoir plus de quadratures du tout dans les expressions paramétriques de la surface, remplacer θ_1 et θ par θ'_1 et θ', de sorte que la surface S serait représentée par

$$S \left\{ \begin{aligned} y &= f(x)\theta'_1(a) + a\theta'_1 - \theta_1, \\ z &= f(x)\theta'(a) + a\theta' - \theta. \end{aligned} \right.$$

7° Donnons un exemple particulièrement simple où toutes les surfaces S applicables entre elles sont algébriques. Je l'emprunte, en partie tout au moins, à mon Mémoire *Sur les mécanismes transformables ou déformables* (*Journal de Liouville*, 9e série, t. 1, 1922). Je considère un polynome arbitraire $f(x)$, de degré 3 ou 2, tel que $f'(x)$ ne soit pas carré parfait; faisons varier la constante réelle C dans un intervalle convenable de façon que l'équation $f(x) - C = 0$ ait deux racines imaginaires conjuguées et une seule réelle : à chaque valeur de C ainsi choisie correspondent donc, par une équation du second degré, deux valeurs u_0, u_1 réelles et deux nombres λ_0, λ_1 réels, tels que l'on ait (u_0, u_1, λ_0, λ_1 étant fonction de C)

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} f(u) - \mathrm{C} &\equiv \lambda_1(u-u_0)^3 + \lambda_0(u-u_1)^3, \\ f'(u) &\equiv 3[\lambda_1(u-u_0)^2 + \lambda_0(u-u_1)^2], \\ f''(u) &\equiv 6[\lambda_1(u-u_0) + \lambda_0(u-u_1)]. \end{aligned}\right.$$

En écrivant

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \int \sqrt{\mathrm{H}(t)+\mathrm{C}}\,dt, \\ \mathrm{Y} &= t\sqrt{\lambda_1(u-u_0)^3} + \frac{3}{2}\int \mathrm{U}\sqrt{\lambda_1(u-u_0)}\,du, \\ \mathrm{Z} &= t\sqrt{\lambda_0(u-u_1)^3} + \frac{3}{2}\int \mathrm{U}\sqrt{\lambda_0(u-u_1)}\,du, \end{aligned}\right.$$

où H est une fonction arbitraire de t, U une fonction arbitraire de u, nous définissons une infinité de surfaces (une pour chaque valeur de C) ayant pour ds^2,

$$(3)\quad ds^2 = [f(u) + \mathrm{H}(t)]\,dt^2 + (t+\mathrm{U})f'(u)\,dt\,du + \frac{3}{8}(t+\mathrm{U})^2 f''(u)\,du^2.$$

Ces surfaces sont donc applicables les unes sur les autres. Pour avoir des surfaces algébriques, il suffit par exemple de définir la relation entre $\mathrm{H}(t)$ et t par l'équation $t = \varphi(\mathrm{H})$, où φ est un polynome entier; en posant $\mathrm{H}+\mathrm{C} = \mathrm{H}_1$, on a encore $t = \psi(\mathrm{H}_1)$, où H_1 est un nouveau polynome et l'intégrale X devient

$$\mathrm{X} = \int \sqrt{\mathrm{H}_1}\,\psi'(\mathrm{H}_1)\,d\mathrm{H}_1$$

qui est un polynome entier en $\sqrt{\mathrm{H}_1}$ ou $\sqrt{\mathrm{H}+\mathrm{C}}$; de même il suffira de prendre pour U un polynome entier en u et de faire le changement de variable $u = u_0 + v^2$ ou $u = u_1 + w^2$ pour avoir Y et Z algébriquement. On a ainsi une application élégante de la méthode classique de résolution de l'équation générale du troisième degré.

6. Enfin, conformément à un théorème général sur les surfaces admettant deux séries de lignes planes, conjuguées, on vérifie que

la surface S est l'enveloppe du plan radical des deux sphères

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2Xf' - 2(f - xf') = 0,$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\frac{\theta'}{\theta_1\theta' - \theta\theta_1}Y + 2\frac{\theta'_1}{\theta_1\theta' - \theta\theta'_1}Z + 2\frac{\eta_1\theta' - \theta'_1\eta}{\theta_1\theta' - \theta\theta_1} = 0$$

et le plan radical de deux sphères infiniment voisines d'une même série est le plan de l'une des deux lignes conjuguées relatives au point de contact.