Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 125-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__125_0>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C.97. — *On considère la fonction* $F(z)$ *définie par l'égalité* $F(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)\,dt}{z-t}$, *où* t *et* $f(t)$ *sont réelles,* $f(t)$ *continue pour* $-1 \leq t \leq 1$.

1° *Montrer que* $F(z)$ *est holomorphe dans le plan des* z *dont on a supprimé la portion d'axe réel comprise entre les points* -1, $+1$ (*on montrera que* $F(z)$ *a une dérivée en chaque point.*)

2° *Donner sous forme d'intégrales les expressions des coefficients du développement de Laurent de* $F(z)$ *pour* $|z| > 1$.

3° *En supposant* $f(t)$ *comprise entre deux nombres positifs* A *et* B, *que peut-on dire du produit* $(n+1)\int_{-1}^{+1} t^n f(t)\,dt$?

Montrer que dans ces conditions le développement de Laurent de $F(z)$ *ne converge plus pour* $|z| < 1$ *et que l'un des points* -1 *ou* $+1$ *est point singulier de* $F(z)$.

II. C.98. — *Les axes de coordonnées* $Oxyz$ *étant rectangulaires, on considère une surface et l'on appelle* N *le point où la normale en* M *à la surface perce le plan des* xy.

1° *Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que* OM = MN.

2° *Déterminer les surfaces intégrales qui sont de révolution autour de* Oz.

3° *Déterminer une intégrale complète et les caractéristiques.* (*Il sera commode d'employer les coordonnées semi-polaires.*)

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.99. — *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$q^2 x - py = 0.$$

1° *Trouver une intégrale complète.*

2° *Trouver la surface intégrale passant par la courbe* $x = 0$, $b^2 z = y^3$.

3° *Montrer que la surface intégrale* S *passant par la parabole* $y = 0$, $az - x^2 = 0$ *a pour équation*

$$9(az - x^2)^2 - 8ay^3 = 0.$$

4° *Calculer l'aire de la portion de* S *qui est à l'intérieur du prisme* *dont les arêtes sont parallèles à* O*z et dont la base est le carré de côtés*

$$y = 0, \quad y = a; \quad x = 0, \quad x = a$$

(*les axes sont rectangulaires*). (Strasbourg, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.100. — *Soit* O*xyz un trièdre rectangulaire. Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que le plan tangent en un quelconque de leurs points forme avec* OM *un angle constant donné* V.

*Montrer qu'il y a une caractéristique formée des points d'une courbe du plan x*O*z et des plans tangents à cette courbe parallèles à* O*y*.

Trouver toutes les caractéristiques.

Exprimer en fonction de deux paramètres les coordonnées des points de celle des surfaces cherchées qui passe par la droite

$$z = 0, \quad x = a,$$

où a est donné.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.101. — *On considère l'intégrale*

$$\int \frac{\operatorname{th}^2 z\, dz}{(\pi^2 + z^2)^4} \qquad (z = x + iy).$$

Soit ABCD *un rectangle de côtés parallèles aux axes, le côté* AB *étant porté par l'axe réel. Montrer qu'on peut trouver une suite de tels rectangles, grandissant indéfiniment, de manière à contenir, à partir d'un certain rang, à leur intérieur, n'importe quelle région du demi-plan $y > 0$ et tels que les intégrales prises le long des côtés autres que* AB *tendent vers zéro.*

Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}^2 x\, dx}{(\pi^2 + x^2)^4}.$$

(Clermont-Ferrand, novembre 1926.)