Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 121-124

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__121_0>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un point matériel pesant de masse m est mobile sans frottement sur une circonférence de rayon l tournant à la vitesse angulaire constante* ω *autour d'un diamètre vertical.*

1. *Le mobile étant lancé du point le plus bas à la vitesse initiale* V_0, *déterminer son mouvement et calculer les composantes de la réaction suivant le rayon et la normale au plan du cercle en fonction de la seule position du mobile;*

2. *Discuter le problème suivant la valeur de* V_0; *en particulier, déterminer les valeurs de* V_0 *pour lesquelles la liaison dans le plan du cercle peut être réalisée par un simple fil;*

3. *Étudier la stabilité autour de chaque position d'équilibre relatif suivant la valeur de* ω; *former l'équation différentielle des petits mouvements autour de chaque position d'équilibre stable et en déduire la période* T *des oscillations;*

4. *Retrouver la loi du mouvement par la méthode de Jacobi appliquée au mouvement absolu;*

5. *Calculer les deux composantes de la réaction au point le plus bas pour*

$$m = 1^{\text{kg}}, \qquad l = 1^{\text{m}}, \qquad V_0 = 3 \text{ m/sec},$$
$$\omega = 10 \text{ rad/sec}, \qquad g = 9{,}81 \text{ m/sec}^2.$$

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1. Les axes xOy étant pris dans le plan du cercle et Oy étant le rayon vertical descendant, l'intégrale des forces vives donne

$$V^2 = \omega^2 x^2 + 2gy + V_0^2 - 2gl,$$

d'où

$$t = l \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\omega^2 l^2 \sin^2\theta + 2gl\cos\theta + V_0^2 - 2gl}},$$

θ étant l'angle de position du mobile compté à partir de Oy; les composants N et Z de la réaction suivant le rayon et la normale Oz au plan du cercle sont

$$\frac{N}{m} = 2\frac{\omega^2}{l}x^2 + 3\frac{g}{l}y + \frac{V_0^2}{l} - 2g, \qquad Z = -2m\omega V\cos\theta.$$

2. V^2 est positif au-dessous de la parabole

$$y = l - \frac{V_0^2}{2g} - \frac{\omega^2}{2g}x^2,$$

N est positif au-dessous de la parabole

$$y = \frac{2}{3}\left(l - \frac{V_0^2}{2g}\right) - \frac{2\omega^2}{3g}x^2.$$

On est donc ramené à une discussion analogue à celle du pendule simple, sauf que les plans horizontaux sont ici remplacés par des paraboles. En particulier, la liaison dans le plan du cercle peut être réalisée par un fil pour

$$V_0^2 \leqq 2gl + \frac{g}{2}\left[-\frac{g}{\omega^2} + \sqrt{\left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 + l^2}\right] \qquad \text{ou} \qquad V_0^2 \geqq 5gl.$$

3. Pour $\omega^2 < \frac{g}{l}$, la seule position d'équilibre stable est $\theta = 0$; l'équation correspondante des petits mouvements est

$$\theta'' + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\theta = 0, \qquad \text{d'où} \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2}}.$$

Pour $\omega^2 > \frac{g}{l}$, la seule position d'équilibre stable est $\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}$; l'équation correspondante des petits mouvements est

$$\varepsilon'' + \left[\omega^2 - \left(\frac{g}{l\omega}\right)^2\right]\varepsilon = 0, \qquad \text{d'où} \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{g}{l\omega}\right)^2}}.$$

4. Dans le mouvement absolu

$$2T = ml^2(\theta'^2 + \omega^2\sin^2\theta), \qquad U = mgl\cos\theta$$

et l'équation de Jacobi est

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{l^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 - \omega^2 l^2 \sin^2\theta\right] - gl\cos\theta = 0.$$

En posant $V = \alpha t + \Theta(\theta, \alpha)$, on a Θ par une quadrature et, d'après les conditions initiales, on reconnaît que l'équation du mouvement

$$t + \frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \beta$$

coïncide avec le résultat du n° 1.

5. Au point le plus bas,

$$N = mg\left(1 + \frac{V_0^2}{gl}\right), \qquad Z = -2m\omega\dot{V}_0;$$

d'où

$$N = 1 + \frac{9}{9{,}81} = 1{,}92 \text{ kg-f}, \qquad Z = -2\frac{1}{9{,}81}10.3 = -6{,}12 \text{ kg-f}.$$

(Toulouse, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Ox, Oy, Oz étant trois axes rectangulaires fixes, Oz vertical ascendant, un tube rectiligne homogène OA de section négligeable, de longueur a, de masse m, peut tourner librement sans frottement autour de l'axe Oz, avec lequel il fait un angle de 45°.*

Un corps solide S pesant est formé d'une petite sphère de masse négligeable et d'une aiguille homogène BC de longueur $2l$, de masse m. Cette aiguille peut se mouvoir sans frottement dans le tube OA. La sphère est seulement destinée à empêcher S de pénétrer entièrement dans le tube OA.

1° *Calculer la force vive du système en fonction des paramètres r et ψ qui définissent sa position et de leurs dérivées (ψ désignera l'angle du plan zOA avec le plan zOx; r désignera la distance du point O au centre de gravité de l'aiguille).*

2° *Écrire les équations du mouvement, et discuter, en supposant $\frac{dr}{dt}$ nul à l'instant initial, et $\frac{d\psi}{dt} = \omega$, constante donnée.*

3° *Il peut arriver que l'aiguille quitte le tube. Étudier le mouvement ultérieur.*

4° *Il peut arriver que la sphère vienne heurter l'extrémité A du tube; état ultérieur des vitesses, en supposant que la force vive se conserve.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Les équations du mouvement sont

$$(1)\quad \begin{cases} \psi' = \omega \dfrac{r_0^2 + k^2}{r^2 + k^2} \\ r'^2 = -\, gr\sqrt{2} + h - \dfrac{1}{2}\,\omega^2 \dfrac{(r_0^2 + k^2)}{r^2 + k^2} \end{cases} \qquad \left(k^2 = \frac{l^2 + a^2}{3}\right).$$

Les zéros de r'^2 s'obtiennent en coupant la courbe

$$(\gamma)\qquad y = \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2(r_0^2 + k^2)}{r^2 + k^2}$$

par la droite

$$(\delta)\qquad y = -\, gr\sqrt{2} + h,$$

et remarquant que l'un de ces zéros est r_0.

Si ω est suffisamment petit pour que l'on ait

$$(2)\qquad \frac{3\sqrt{3}}{16k^3}\,\omega^2(r_0^2 + k^2) < g\sqrt{2},$$

la droite (δ) coupe (γ) en un seul point $r = r_0$; r décroît constamment : le choc survient nécessairement. Si la condition (2) n'est pas remplie, la courbe (γ) admet deux tangentes parallèles à (δ) dont les points de contact $M_1 M_2$ ont pour abscisses r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$). La tangente en M_1 coupe (γ) en un autre point M_3 d'abscisse r_3.

Si r_0 est inférieur à r_1 ou supérieur à r_3, le mouvement a lieu comme ci-dessus; si r_0 est entre r_1 et r_3 le mouvement est oscillatoire.

Le solide S quitte le tube si r atteint la valeur $a + l$; son centre de gravité décrit ensuite la parabole définie par la vitesse qu'il possède à cet instant. L'épingle tourne autour de son centre de gravité dans un plan fixe perpendiculaire à la position du plan zOA au moment où l'épingle quitte le tube.

S'il y a choc, avec conservation de la force vive, ψ' se conserve, r' change de signe sans changer de valeur absolue.

Épreuve pratique. — *Une boîte cubique pesante est formée de six carrés homogènes identiques de côté $2a$, de même masse m; l'un d'eux* ABA'B' *formant couvercle est articulé sans frottement suivant le côté* AA' *à la boîte proprement dite.*

La boîte repose par son fond sur une table horizontale fixe P *parfaitement polie.*

On abandonne la boîte sans vitesses dans la position où le couvercle fait avec la verticale un angle θ_0 infiniment petit.

1° *Calculer, pour chaque inclinaison θ du couvercle sur la verticale, la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ du couvercle et la vitesse de translation de la boîte.* [*On négligera bien entendu θ_0; on supposera que la boîte ne peut se renverser (liaison bilatérale), et que le couvercle se rabat en arrière dans son mouvement.*]

On indiquera en particulier les valeurs de ces vitesses pour $\theta = 90°$, et $\theta = 180°$.

2° *Déterminer, en grandeur et position, pour chaque valeur de θ, la réaction de la table* P *sur la boîte, en particulier pour $\theta = 0°$, $\theta = 90°$ et $\theta = 180°$.*

Indications sur la solution. — Si x désigne l'abscisse du centre de gravité de la boîte, comptée parallèlement au plan de la figure, on a les équations

$$6x = -a\sin\ ,$$

$$a\theta'^2(7\cos^2\theta + 8\sin^2\theta) = 12g(1 - \cos\theta).$$

La réaction de la table P est verticale, soient Z sa valeur, h sa distance à l'arête AA'.

J'applique le théorème du centre de gravité en projetant sur la verticale, j'obtiens

$$Z = 6mg - m(a\theta'^2\cos\theta + a\theta''\sin\theta).$$

Pour avoir h, je remarque que les forces d'inertie, la force Z et le poids $5mg$ de la boîte proprement dite ont un moment nul par rapport à AA' :

$$hZ - 5mga - 5max'' = 0.$$

(Lille, novembre 1926.)