NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 114-120
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__114_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.31.

[*Calcul différentiel et intégral; épreuve théorique; énoncé publié en janvier* 1926, p. 117.]

SOLUTION

Par BERNARD PARIS.

A tout point $M(x, y, z)$ de l'espace on fait correspondre le plan P

$$x(X - x) + y(Y - y) + e^{\lambda(x,y)}(Z - z) = 0$$

et l'on désigne par Γ une courbe gauche telle que le plan osculateur en un quelconque de ses points M, soit le plan P correspondant à ce point.

1° $\lambda(x, y)$ étant donnée on demandait de prouver qu'il existe en général deux familles de courbes Γ, de telle sorte qu'il passe une courbe de chaque famille et une seule par un point M quelconque de l'espace.

En effet, les accents désignant des dérivées par rapport au paramètre dont dépend le point courant de Γ, on doit avoir

$$xx' + yy' + e^{\lambda} z' = 0,$$
$$xx'' + yy'' + e^{\lambda} z'' = 0;$$

la seconde de ces équations peut être remplacée par

$$x'^2 + y'^2 + e^{\lambda} z'(\lambda'_x x' + \lambda'_y y') = 0.$$

comme on le voit immédiatement en dérivant la première. On en déduit, en éliminant z',

$$(x'^2 + y'^2) - (xx' + yy')(\lambda'_x x' + \lambda'_y y') = 0$$

ou

$$(1) \qquad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(x + y\frac{dy}{dx}\right)\left(\lambda'_x + \lambda'_y \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

C'est l'équation différentielle des courbes γ, projections des Γ sur le plan xOy; l'existence (en général) des deux familles de courbes Γ, résulte immédiatement du fait que cette équation est du second degré en $\dfrac{dy}{dx}$.

2° Existe-t-il des surfaces dont toutes les lignes asymptotiques sont des courbes Γ?

Le plan P doit être tangent, donc

$$p = -e^{-\lambda} x, \qquad q = -e^{-\lambda} y$$

et la condition $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}$ conduit à

$$x\frac{\partial \lambda}{\partial y} - y\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \Phi(x^2 + y^2),$$

où Φ désigne une fonction arbitraire. Il en résulte immédiatement que les surfaces cherchées sont les surfaces de révolution autour de Oz.

3° On demande de déterminer λ pour que les deux familles de courbes Γ soient confondues.

L'équation différentielle précédente (1) conduit immédiatement à

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} y - \frac{\partial \lambda}{\partial y} x\right)^2 - 4\left(1 - y\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)\left(1 - x\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) = 0$$

ou, en désignant par p et q les dérivées partielles de λ, à

$$(2)\qquad (py-qx)^2-4(1-px-qy)=0.$$

Le système différentiel associé conduit à l'intégrale première

$$py-qx=2a,$$

d'où

$$px+qy=(1-a^2)$$

et enfin, après avoir résolu en p et q,

$$d\lambda=p\,dx+q\,dy=2a\frac{(y\,dx-x\,dy)}{x^2+y^2}+(1-a^2)\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2},$$

$$\lambda=-2a\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}+(1-a^2)\operatorname{Log}\sqrt{x^2+y^2}+b;$$

c'est une intégrale complète de l'équation (2).

4° Pour que les courbes Γ se projettent sur le plan xOy suivant deux familles de courbes orthogonales, il faut que le produit des racines en $\frac{dy}{dx}$ de l'équation (1) soit égal à -1, d'où la condition

$$x\frac{\partial\lambda}{\partial x}+y\frac{\partial\lambda}{\partial y}=2.$$

équation linéaire qui admet les deux intégrales premières

$$\frac{y}{x}=a,\qquad \lambda=\operatorname{Log}(x^2+y^2)+b,$$

et l'intégrale générale

$$\lambda=\operatorname{Log}(x^2+y^2)+\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Inversement soit donné un réseau de courbes orthogonales dans le plan, il sera défini par une équation différentielle de forme

$$y'^2-2u(x.y)y'-1=0$$

et cette equation sera identique à (1) si l'on a

$$x\frac{\partial\lambda}{\partial x}+y\frac{\partial\lambda}{\partial y}=2$$

et

$$y\frac{\partial\lambda}{\partial x}-x\frac{\partial\lambda}{\partial y}=u(x\lambda'_x-y\lambda'_y).$$

La formule précédemment trouvée pour λ montre que u ne doit dépendre que de $\frac{y}{x}$ et la réciproque est immédiate; l'equation différentielle sera donc homogène en $\frac{y}{x}$ et ces courbes seront homothétiques par rapport à l'origine.

Exemple. — Il en est ainsi des courbes $y^2 = 2Cx$ qui vérifient l'équation différentielle

$$y' = \frac{y}{2x},$$

leurs trajectoires orthogonales vérifient

$$y' = -\frac{2x}{y},$$

d où

$$u = \frac{y^2 - 4x^2}{4xy};$$

on obtient φ, et par suite λ, par une quadrature.

Autre solution de M. A. Monjallon.

Question C.46.

[*Mathématiques générales; épreuve théorique; énoncé publié en février* 1926, *p.* 146.]

Solution

Par A. Monjallon.

On considère dans le plan xOy une courbe passant par l'origine et telle que le cosinus de l'angle que fait Ox avec la normale soit

$$\frac{1-x}{1+x}$$

et l'on demande d'abord d'évaluer en fonction de x l'arc OM de cette courbe. On aura

$$\pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1-x}{1+x}, \qquad y' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}},$$

d'où

$$ds^2 = (1+y'^2)\,dx^2 = \frac{(1+x)^2}{4x}\,dx^2,$$

et, pour l'arc OM,

$$S = \int_0^x \frac{1+x}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{3}x\right).$$

D'autre part

$$y'' = -\frac{1}{4}\,\frac{x+1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

d'où le rayon de courbure

$$\frac{(1+x)^2}{2}.$$

Enfin

$$y = \int_0^x \frac{1-x}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{3}x\right)$$

ou

$$y^2 = \frac{x}{9}(3-x)^2;$$

la courbe est une cubique ayant le point double $x=3$ et passant par l'origine.

Autres solutions de MM. BERNARD PARIS et J. DEVISME.

Question C.48.

[*Mathématiques générales; épreuve pratique* (*Mécanique*); *énoncé publié en février* 1926, *p.* 151.]

SOLUTION
Par BERNARD PARIS.

1° L'axe Oy étant vertical et dirigé vers le bas on considère un point m de masse m, de poids mg, mobile sans frottement sur la courbe

$$x = au^3, \qquad y = au^2.$$

Il part du point le plus haut de la courbe ($u=0$) avec la vitesse initiale v_0 telle que

$$v_0^2 = 2\lambda g a.$$

Le théorème de la force vive donne immédiatement

$$v^2 = 2ag(u^2+\lambda),$$

c'est-à-dire, en remplaçant v par sa valeur,

$$a(4+9u^2)u^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2g(u^2+\lambda).$$

2° Dans le cas où $\lambda = 0$ l'intégration donne

$$\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t = \frac{u}{2}\sqrt{9u^2+4} + \frac{2}{3}\operatorname{Log}\frac{3u+\sqrt{9u^2+4}}{2}.$$

3° Dans le cas où λ est quelconque $\left(\text{différent de } \frac{4}{9}\right)$ on obtient (en posant $\frac{9u^2+4}{u^2+\lambda} = z^2$)

$$\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t = (9\lambda - 4)\int_{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}^{z} \frac{z^2\,dz}{(9-z^2)^2}.$$

Or

$$\frac{z}{9-z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z}\right),$$

l'intégrale indéfinie est donc

$$\frac{1}{4}\left\{\int\frac{dz}{(3-z)^2} + \int\frac{dz}{(3+z)^2} + 2\int\frac{dz}{z^2-9}\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2z}{9-z^2} + \frac{1}{3}\,\mathrm{L}\,\frac{z-3}{z+3}\right]$$

et l'on revient à la variable u sans difficultés.

4° Dans le cas particulier où $\lambda = \frac{4}{9}$ l'équation différentielle se simplifie, on a

$$u^2 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t,$$

c'est-à-dire les coordonnées du mobile

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{2ga}\,t, \qquad x = a\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

La force qui, appliquée au mobile supposé libre et non pesant, produirait ce mouvement aurait les composantes

$$X = \frac{2}{3}\,mg\sqrt{\frac{a}{y}}, \qquad Y = 0.$$

Question C.83.

[*Calcul différentiel et intégral; épreuve théorique; énoncé publié en janvier* 1927, *p.* 28.]

Solution

Par J. Laureau.

1° L'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^z \sin(x+y)$$

s'intègre au moyen du système

$$dx = dy = \frac{dz}{e^z \sin(x+y)},$$

d'où les intégrales premières

$$x - y = c, \qquad \frac{1}{2}\cos(x+y) - e^{-z} = c_1$$

et la solution générale

$$e^{-z} = \frac{1}{2}\cos(x+y) - f(x-y).$$

2° La surface intégrale qui passe par la courbe

$$x + y = 0, \qquad e^z \cos^2 x = 1$$

est

$$z = -\operatorname{Log}\cos x - \operatorname{Log}\cos y.$$

3° On a, pour cette surface,

$$p = \operatorname{tang} x, \qquad q = \operatorname{tang} y, \qquad r = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad s = 0, \qquad t = \frac{1}{\cos^2 y},$$

et l'équation différentielle des lignes de courbure

$$\left(\frac{dy}{\cos y}\right)^2 = \left(\frac{dx}{\cos x}\right)^2,$$

d'où les deux systèmes de lignes de courbure

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \text{const.},$$

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \text{const.}$$

4° L'équation differentielle des lignes asymptotiques

$$\left(\frac{dx}{\cos x}\right)^2 + \left(\frac{dy}{\cos y}\right)^2 = 0$$

montre qu'elles sont imaginaires.

Autre solution de M.M. BERNARD PARIS, R. ODILE, J. DEVISME.