NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 111-114

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__111_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2392.

(1919, p. 40.)

On considère les paraboles tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements H_3 *et à la tangente et la normale en un sommet* S *de cette courbe. Démontrer que les polaires de* S *par rapport à ces paraboles enveloppent le cercle décrit sur* SA *comme diamètre,* A *étant le point de rebroussement de* H_3 *correspondant à* S.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient Sx et Sy la tangente et la normale en S à H_3. M un point quelconque du cercle de diamètre SA, α et β les projections de M sur Sx et Sy, γ le milieu de α et β, MT la tangente au cercle SA en M. On sait que $\alpha\beta$ touche H_3 au point K intersection de $\alpha\beta$ avec MK symétrique de MT par rapport à $M\alpha$.

Envisageons maintenant la parabole qui touche Sx, Sy et $\alpha\beta$ au point K. Son foyer est quelque part sur le cercle $S\alpha\beta$. Le symétrique φ de ce foyer par rapport à $\alpha\beta$ définit la directrice $S\varphi$ et la direction de l'axe $K\varphi$, comme l'angle en φ est droit $K\varphi$ va passer par M. MF est symétrique par rapport à $M\alpha$, c'est donc la tangente MT; cette dernière droite est donc la polaire de S par rapport à la parabole.

Autres solutions de l'auteur et de MM. LHERMITTE, G. ROY, SAGAZAN.

2397.

(1922, p. 39.)

Soient P *et* Q *les intersections d'une conique* (S) *avec les tangentes à une conique* (Σ) *issues d'un point* M *de la première. On sait que* PQ *enveloppe une conique appartenant au faisceau* (S, Σ). *Démontrer que le point de contact de* PQ *avec son enveloppe est, par rapport à* PQ, *le conjugué harmonique de l'intersection de cette droite avec la polaire de* (M) *par rapport à* (Σ).

G. BOULLOUD.

SOLUTION

Par M. H. MC WEENEY.

Prenons M' près de M sur (S), et soient P', Q' les points de rencontre de (S) avec les tangentes à (Σ) issues de M'. Désignons par X, Y, Z les points (PM, P'M'), (QM, Q'M'), (PQ', P'Q). Le théorème de Pascal relatif à l'hexagone PMQ P'M'Q' montre que X, Y, Z sont sur une même droite.

Faisons tendre M' vers M. A la limite, XY devient la polaire de M par rapport à (Σ), et Z devient l'intersection de cette droite avec PQ; enfin, le point (PQ, P'Q') devient en même temps le point de contact de PQ avec son enveloppe et le conjugué harmonique de Z par rapport à PQ.

Autres solutions de l'auteur et de MM. FAUCHEUX, ÉGAN, PARROD, ROY, SERBAN A. GHEORGHIN.

2424.

(1919, p. 399.)

Dans un plan deux courbes de grandeurs invariables roulent respectivement sur deux courbes fixes, et cela de manière à se couper sous un angle constant.

Démontrer que la normale à la courbe décrite par leur point d'intersection concourt avec les droites joignant leurs centres de courbure en ce point respectivement à leurs points de contact avec les courbes fixes.

R. B.

SOLUTION

Par JOSEPH DENAUX.

Nous désignons par C et C' les deux courbes roulantes, par P et P' deux plans qui leur sont respectivement liés et qui glissent sur le plan de référence P_0. Soient enfin I et I' les centres instantanés de rotation dans les mouvements $\left(\frac{P}{P_0}\right)$ et $\left(\frac{P'}{P_0}\right)$ (ce sont les points de contact avec les courbes fixes). Puisque les courbes C et C′ se coupent en un point M sous un angle constant on peut considérer les tangentes et normales à ces courbes en M comme étant quatre droites fixes d'un quatrième plan Q qui glisse par rapport à P, P′ et P_0 et dont un point bien déterminé se trouve constamment en M, point d'intersection de C et C′.

Dans le mouvement $\left(\frac{Q}{P}\right)$ le centre instantané est en ω, centre de courbure de C au point M, dans le mouvement $\frac{P}{P_0}$ il est en I, donc dans le mouvement $\left(\frac{Q}{P_0}\right)$ il sera sur la droite Iω; il est de même sur la droite I′ω′, donc à leur intersection et la normale à la trajectoire de M dans P_0 sera par suite concourante avec Iω et I′ω′.

Autre solution de M. A. VANLOT.

2454.

(1923, p. 189.)

Si l'on choisit un point arbitrairement sur chaque arête d'un tétraèdre, les quatre sphères O_a, O_b, O_c, O_d, *passant respectivement par chaque sommet* A, B, C, D, *et par les points situés sur les arêtes adjacentes, ont un point commun* K (S. Roberts 1880).

Montrer que ce point K *est l'inverse* (*conjugué isogonal*), *par rapport au tétraèdre* $O_aO_bO_cO_d$, *du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre dont les sommets sont les points communs à trois des sphères sur les faces du tétraèdre* ABCD. V. THEBAULT.

SOLUTION
Par E. BALLY.

Par définition, deux points isogonaux relativement à un tétraèdre sont tels que les deux plans qui les unissent à chaque arête soient symétriques relativement aux plans bissecteurs des faces unies à cette arête.

Cette définition se ramène immédiatement à la suivante ([1]) : Chacun de deux points isogonaux est le centre de la sphère qui contient les symétriques de l'autre relatifs aux faces du tétraèdre.

Or, dans le problème actuel, les seconds points de concours X_a, X_b, X_c, X_d des quatre sphères trois à trois sont évidemment les symétriques du point K, commun aux quatre sphères, relativement aux plans que forment trois à trois leurs quatre centres (O).

([1]) Car si X_1 et X_2 sont les symetriques d'un même point X relatifs à deux plans p_1 et p_2, le plan de symétrie du couple de points (X_1, X_2) et le plan qui unit X à l'intersection des plans (p_1, p_2) sont symétriques relativement aux plans bissecteurs de ces plans p_1 et p_2.

Le point K et le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre des points (X) sont donc isogonaux relativement au tétraèdre des centres (O).

Autre solution de MM. Bouvaist, Harmegnies, Roy.

2446.

(1920, p. 79; 1923, p. 188).

Si MN *est une corde d'une conique tangente en* P *et* Q *à deux cercles bitangents à la courbe et ayant leurs centres sur le même axe, les deux segments* MN *et* PQ *ont même milieu.* G. Fontené.

Solution

Par G. Roy.

Si l'on fait tourner la conique et les deux cercles autour de l'axe des centres on obtient une quadrique de révolution et deux sphères inscrites. Un plan tangent aux deux sphères coupe la quadrique suivant une conique ayant pour foyers les deux points de contact de ce plan avec les sphères et pour directrices l'intersection de ce plan et des deux plans des contacts. Si le plan tangent est choisi perpendiculairement au plan méridien initial, la conique d'intersection a pour foyers P et Q, et MN est l'axe de cette conique, ce qui démontre la propriété énoncée. On peut même ajouter que si M' et N' sont les intersections de MN avec les cordes de contact, MN et M'N' ont mêmes milieux. G. Roy.

Autres solutions de MM. Bouvaist, Faucheux, Harmegnies, Piedvache.