H. MITAULT

Sur une forme vectorielle de la puissance d'un point

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 109-110

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__109_1>

SUR UNE FORME VECTORIELLE DE LA PUISSANCE D'UN POINT;

PAR H. MITAULT.

1. Soient A, B, C trois points. On a

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}\right) = \overline{AO}^2 - \overline{OB}^2,$$

si O est le milieu de BC.

Il en résulte que si O est le centre d'un cercle dont B et C sont deux points diamétralement opposés et si A est un point quelconque *de l'espace*, on a

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = d^2 - R^2$$

quels que soient les points B et C.

Remarque. — Ceci définit la puissance d'un point quelconque de l'espace. C'est, d'ailleurs, la puissance de ce point par rapport à la sphère ayant pour équateur le cercle considéré.

Nous nous proposons de montrer comment l'emploi des notations vectorielles permet d'utiliser ce résultat pour retrouver simplement des propriétés des cercles, propriétés d'ailleurs classiques et bien élémentaires.

2. Soient deux cercles O_1 et O_2 et soit A un de leurs points communs, réel ou non mais non cyclique.

Soient A_1 et A_2 les points diamétralement opposés à A.

Si un point M a même puissance par rapport aux deux cercles

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA_2}.$$

d'où

$$\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{MA_2}\right) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{A_2A_1} = 0.$$

Le lieu de M est le plan perpendiculaire à A_2A_1 mené par A.

3. Les notations étant les mêmes que précédemment, soient P_1 et P_2 les puissances de M par rapport aux cercles O_1 et O_2.

Considérons la quantité

$$\mu = \frac{P_1 + \lambda P_2}{1+\lambda} = \frac{\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MA_1} + \lambda\overrightarrow{MA_2}\right)}{1+\lambda} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{M\alpha},$$

si α est le point qui partage A_1A_2 dans le rapport

$$-\lambda.$$

Il en résulte que μ est la puissance du point M par rapport au cercle de diamètre $A\alpha$.

Conséquences. — Le lieu des points pour lesquels $P_1 + \lambda P_2$ est constant est une sphère ayant son centre au point ω, partageant O_1O_2 dans le rapport $-\lambda$.

Le lieu des points pour lesquels

$$P_1 = kP_2$$

est la sphère passant par A et dont le centre partage O_1O_2 dans le rapport k.

La demi-somme des puissances d'un point par rapport à deux cercles orthogonaux O_1, O_2 est égale à la puissance de ce point par rapport au cercle de diamètre O_1O_2.