# Certificats de calcul différentiel et intégral

*Nouvelles annales de mathématiques 6e série*, tome 1 (1925), p. 94-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__94_1>

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. C.25 — *Intégrer le système*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xz^2,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y}(1 + z + zx^2).$$

*Trouver l'expression la plus générale de la fonction* $F(x, y, z)$ *telle que la solution du système*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xz^2,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = F(x, y, z)$$

*dépende d'une constante arbitraire.*

C.26. — *$z$ désignant une variable complexe, déterminer les points singuliers de la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{(z'-2)^2(z^2+z+1)}.$$

*Calculer la valeur de l'intégrale* $\int f(z)\,dz$ *le long des cercles de centre* O *ne passant par aucun point singulier.*

ÉPREUVE PRATIQUE. C.27. — *Déterminer les lignes de courbure de la surface représentée par les équations*

$$x = (au + bv - 2a)\sqrt{u},$$
$$y = (au + bv - 2b)\sqrt{v},$$
$$z = (au + bv)\sqrt{1 - u - v},$$

*où $a$ et $b$ désignent deux constantes données.*

C.28. — *On considère le quadrilatère curviligne* A *limité par les courbes*

$$y = ae^{x}, \qquad y = a'e^{x},$$
$$y = be^{-x}, \qquad y = b'e^{-x}.$$

*Indiquer un changement de variables permettant de simplifier le calcul de l'intégrale double* I *qui représente l'aire de* A, *et calculer* I *à l'aide de ce changement de variables.* (Caen, juin 1925.)

Épreuve théorique. I. — *Déterminer la fonction* $z$ *des deux variables* $x$, $y$ *de manière que l'expression*

$$\frac{z\,dx - dy}{zy - x}$$

*soit une différentielle totale exacte. Donner l'expression de la fonction* $z$ *qui se réduit pour* $y = 0$ *à* $\frac{1 + x^2}{1 - x^2}$.

II. — *Quels sont les points singuliers de la fonction* $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}$. *Nature de ces points singuliers. Périodes de l'intégrale*

$$\int_{M_0}^{M_1} f(z)\,dz,$$

*le chemin d'intégration* $M_0\,M_1$ *ne passant par aucun point singulier.*

III. — *En remarquant que* $y = \operatorname{tang} x$ *est une solution particulière de l'équation*

$$y'' \cos^2 x - 2y = 0,$$

*trouver l'intégrale générale de cette équation.*

*Intégrer l'équation*

$$z' \cos x + z^2 + z \sin x - 2 = 0.$$

Solution. I. — $z$ doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 - 1 = 0,$$

dont la solution générale est donnée par la formule

$$\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} = (x+y)f(x^2 - y^2),$$

où $f$ est une fonction arbitraire.

La fonction $z$ qui se réduit pour $y = 0$ à $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ est $\frac{1+(x-y)^2}{1-(x-y)^2}$.

II. — La fonction $f(z)$ admet $z = 0$ pour *point singulier essentiel* et

$z = 1$ pour *pôle double*. Les périodes relatives à ces points sont respectivement

$$2\pi e i, \qquad -2\pi e i,$$

III. — La solution générale de l'équation $y'' \cos^2 x - 2y = 0$ est

$$y = a \operatorname{tang} x + b\,(1 + x \operatorname{tang} x),$$

où $a$ et $b$ sont deux constantes arbitraires. On en déduit la solution générale de l'équation

$$z' \cos x + z^2 + z \sin x - 2 = 0.$$

Cette solution est donnée par la formule

$$z = \frac{y'}{y} \cos x = \frac{1 + C\,(\sin x \cos x + x)}{\sin x + C\,(\cos x + x \sin x)}$$

où C est une constante arbitraire.

Épreuve pratique. — *On considère la surface définie par les expressions suivantes des coordonnées $x$, $y$, $z$ en fonction de deux paramètres $u$, $v$ :*

$$x = \frac{v}{\operatorname{ch} u}, \qquad y = \frac{uv}{\operatorname{ch} u}, \qquad z = \operatorname{arc\,tang} v.$$

1° *Donner les expressions des dérivées partielles $p$, $q$ de $z$ par rapport à $x$, $y$ en fonction des paramètres $u$, $v$.*

2° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface.*

Solution. — 1° En formant les expressions de $\frac{dx}{x}$, $\frac{dy}{y}$, $dz$ et éliminant $du$, $dv$ entre les trois équations obtenues, on obtient

$$dz = \frac{\operatorname{ch} u - u \operatorname{sh} u}{1 + v^2}\,dx + \frac{\operatorname{sh} u}{1 + v^2}\,dy,$$

ce qui met en évidence les expressions cherchées de $p$, $q$.

2° Les lignes asymptotiques sont données par l'équation différentielle

$$dp\,dx + dq\,dy = 0$$

qui se réduit à

$$du^2 - \frac{2}{1 + v^2}\,dv^2 = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle est donnée par la formule

$$v = \operatorname{sh}\left(\pm \frac{u}{\sqrt{2}} + C\right),$$

où C est une constante arbitraire. (Caen, novembre 1925.)