

Agrégation des sciences mathématiques (1925)

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 73-87

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__73_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1925).

Mathématiques élémentaires.

Étant donnés quatre points quelconques A, B, C, D, nous désignons par (A), (B), (C), (D) les cercles supposés distincts, respectivement circonscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC, et nous appellerons bissecteurs de deux cercles sécants d'une même sphère (ou d'un même plan) S les deux cercles passant par les points communs aux cercles considérés, faisant avec eux des angles égaux, et situés sur la sphère (ou le plan) S. La notation (a, b) représentera, d'autre part, l'angle, non orienté, des arcs de cercle ACB et ADB, appartenant aux cercles (D) et (C).

1° Comparer les angles (a, b) et (c, d) .

2° Les points A, B, C restant fixes, sur quel lieu doit se déplacer D pour que les angles (d, a) , (d, b) , (d, c) restent invariables?

3° Ces angles étant supposés égaux aux angles A, B, C du triangle fixe ABC, quels sont les lieux des centres des cercles inscrits et exinscrits aux triangles DBC, DCA, DAB?

4° Montrer que les points I, J, K, L, communs aux bissecteurs de (A) et (B) et aux bissecteurs de (A) et (C), appartiennent à des bissecteurs convenablement choisis des quatre autres combinaisons des cercles (A), (B), (C), (D), associés deux à deux.

Si A, B, C, D sont les sommets d'un tétraèdre, il en est de même de I, J, K, L . Montrer que chaque arête de l'un de ces tétraèdres rencontre deux arêtes opposées de l'autre.

5° Construire les points A, B, C, D , connaissant les points I, J, K, L .

6° Montrer que les angles $(i, j), (i, k), (i, l), \dots$, qui correspondent au système des quatre points I, J, K, L , sont égaux aux angles $(a, b), (a, c), \dots$, qui correspondent aux points A, B, C, D .

7° Lieux des points I, J, K, L , quand A, B, C restent fixes, et les angles $(d, a), (d, b), (d, c)$ invariables.

8° Dans les mêmes conditions, enveloppe des plans JKL, IKL, IJL, IJK .

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

I. La figure proposée possède des propriétés remarquables : l'une des plus importantes, à savoir la *réciprocité intime* des deux tétraèdres $ABCD, IJKL$, est signalée implicitement ; il importe de la signaler dès le début.

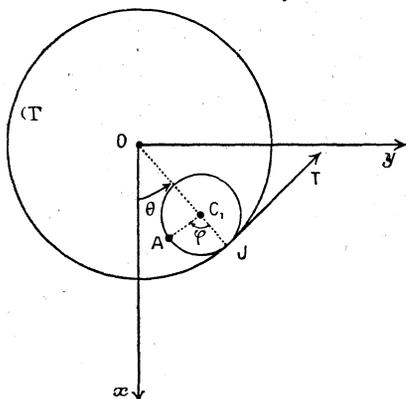
Si les points A, B, C, D se déplacent de façon à occuper des positions nouvelles A', B', C', D' , les points I, J, K, L prennent des positions nouvelles correspondantes I', J', K', L' : montrer que, l'ensemble A', B', C', D' coïncidant, dans un ordre quelconque, avec l'ensemble I, J, K, L , l'ensemble $I'J'K'L'$ coïncide avec $ABCD$, démontre la réciprocité, mais d'une façon incomplète : en effet on doit encore remarquer que les douze bissecteurs de $(A), (B), (C), (D)$ coïncident, dans leur ancienne position, avec les bissecteurs de $(I), (J), (K), (L)$. On a ainsi un système de douze cercles sur la sphère n'ayant qu'un total de huit points d'intersection deux à deux ; en chaque point d'intersection passent six cercles répartis en trois couples de cercles orthogonaux ; chaque cercle porte quatre points d'intersection ; les douze cercles étant tracés, on sait, par des procédés réguliers, séparer les huit points communs en deux groupes $(ABCD), (IJKL)$.

Ici, comme dans le problème classique : cercle tangent à trois cercles donnés, on peut adopter bien des méthodes ; celle qui doit

exiger le moins d'ingéniosité consiste à n'introduire que des éléments invariants par une inversion, car une inversion quelconque change la figure à étudier en une nouvelle de même définition. Nous adopterons une inversion de pôle A (ou B, C, D, ou encore I, J, K, L). Nous donnerons ensuite une indication sur une méthode différente.

Une inversion de pôle quelconque donne une figure sphérique encore; si le pôle est pris sur la sphère ABCD, on a une figure plane. Faisons venir plus particulièrement le pôle en A; on a une nouvelle figure (*fig. 1*) comprenant les droites $C_A D_A$, $D_A B_A$,

Fig. 1.



$B_A C_A$ et le cercle $B_A C_A D_A$ transformés de (B), (C), (D), (A). L'angle (a, b) est l'angle des *demi-droites* tangentes en A aux *demi-arcs* ACB et ADB; $(a, b) = (b, a)$ car ces angles sont symétriques par rapport au plan perpendiculaire à AB en son milieu. D'autre part, dans l'inversion, deux *demi-arcs* concourants forment le même angle que les *demi-arcs* respectivement homologues; les *demi-arcs* BCA et BDA étant respectivement remplacés par les demi-droites $B_A C_A$ et $B_A D_A$, $(a, b) = (b, a) = \hat{B}_A$, angle en B_A du triangle $B_A C_A D_A$. L'angle (c, d) devient de même l'angle de la demi-droite opposée à $C_A D_A$ avec la *demi-droite* tangente en C_A au *demi-arc* $C_A B_A D_A$: donc $(c, d) = \hat{B}_A = (a, b)$.

On a donc

$$(1) \quad (a, b) + (a, c) + (a, d) = \pi;$$

$$(2) \quad \begin{cases} (a, b) = (c, d) = \hat{B}_A = \hat{A}_B = \hat{D}_C = \hat{C}_D, \\ (a, c) = (d, b) = \hat{C}_A = \hat{D}_B = \hat{A}_C = \hat{B}_D, \\ (a, d) = (b, c) = \hat{D}_A = \hat{C}_B = \hat{B}_C = \hat{A}_D. \end{cases}$$

On retrouve ainsi une propriété classique : les triangles $B_A C_A D_A$, $A_B D_B C_B$, $D_C A_C B_C$, $C_D B_D A_D$ déduits du tétraèdre ABCD (accidentellement quadrilatère plan) par les inversions de pôle A, B, C, D sont semblables.

Écrivons, p_A étant la puissance d'inversion de pôle A,

$$(3) \quad \begin{cases} C_A D_A = \frac{p_A}{AB \cdot AC \cdot AD} (AB \cdot CD), \\ D_A B_A = \frac{p_A}{AB \cdot AC \cdot AD} (AC \cdot BD), \\ B_A C_A = \frac{p_A}{AB \cdot AC \cdot AD} (AD \cdot BC), \end{cases}$$

on aura

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\sin(a, b)}{AB \cdot CD} = \frac{\sin(a, c)}{AC \cdot D} = \frac{\sin(a, d)}{AD \cdot BC}, \\ (a, b) + (a, c) + (a, d) = \pi. \end{cases}$$

Chacun des produits $AB \cdot CD$, $AC \cdot BD$, $AD \cdot BC$ est inférieur à la somme des deux autres, supérieur à la valeur absolue de leur différence. L'une des égalités ne peut être remplacée par une égalité, ce qui se traduit par

$$AB \cdot CD \pm AC \cdot BD \pm AD \cdot BC = 0,$$

que si les quatre points A, B, C, D non seulement sont dans un même plan mais encore sur un même cercle : cette disposition particulière est exclue ici.

Les paramètres de grandeur d'un tétraèdre sont au nombre de six (arêtes par exemple), ceux de forme au nombre de cinq. Deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D' tels que l'on ait les deux relations de forme

$$(5) \quad \frac{A'D' \cdot B'C'}{AD \cdot BC} = \frac{B'D' \cdot C'A'}{BD \cdot CA} = \frac{C'D' \cdot A'B'}{CD \cdot AB},$$

peuvent être transformés l'un en l'autre, chaque lettre non accentuée correspondant à la même lettre accentuée, par deux inversions précédées ou suivies d'un déplacement; il suffit en effet de remarquer que les triangles $B_A C_A D_A$ et $B'_A C'_A D'_A$, pouvant être rendus égaux, on peut transformer ABCD en $B_A C_A D_A$, puis par une inversion convenablement choisie passer de $B_A C_A D_A$ à un tétraèdre *égal* (et non symétrique) à $A' B' C' D'$. Un cas extrêmement intéressant, que nous utiliserons plus tard, est celui où les sommets A', B', C', D' ne sont autres que B, A, D, C respectivement, dans cet ordre, ou encore C, D, A, B, ou encore D, C, B, A.

II. La relation $(a, d) + (b, d) + (c, d) = \pi$ prouve qu'il suffit que (a, d) et (b, d) restent constants, pour que (c, d) soit aussi constant. Faisons donc une inversion de pôle A : B_A et C_A en résultent, et D_A décrit un cercle Γ_A d'axe $B_A C_A$; le point D décrit le cercle Γ inverse de Γ_A .

Les cercles ABC et Γ offrent une configuration réciproque remarquable : appelons-les, au cours de cette solution, cercles *associés*. Deux cercles associés sont tels que chacun coupe orthogonalement toute sphère contenant l'autre : cette propriété, invariante par inversion, appartient au couple : droite $B_A C_A$ et cercle Γ_A . Le plan de chaque cercle est donc orthogonal à l'autre cercle : les plans des deux cercles sont rectangulaires et se coupent suivant la ligne des centres; la sphère décrite sur Γ comme cercle diamétral est donc coupée par le plan ABC suivant un cercle Γ' orthogonal au cercle ABC. La construction générale de deux cercles associés en résulte : deux cercles orthogonaux ABC, Γ' sont tracés dans un même plan et l'on fait tourner Γ' de $\frac{\pi}{2}$ autour de la ligne des centres. On remarquera encore que la ligne des centres perce les deux cercles associés en quatre points formant une division harmonique.

III. Si l'on suppose

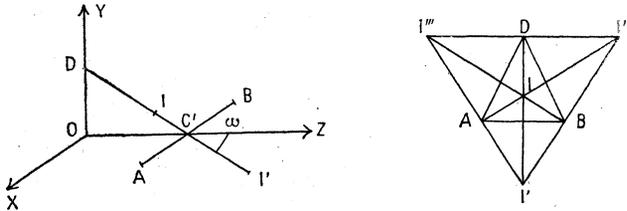
$$(a, d) = \hat{A}, \quad (b, d) = (a, c) = \hat{B}, \quad (c, d) = (a, b) = \hat{C},$$

on peut remplacer les numérateurs des rapports (4) par AB, AC,

BC respectivement et l'on a $CD = BD = AD$ et réciproquement. Le lieu de D est donc l'axe du cercle ABC.

Soient O le centre du cercle ABC, C' le milieu de AB, OY l'axe du cercle ABC, OZ la droite OC' et OX la parallèle à AB menée par O; le triangle DAB est isocèle, les centres I et I' (fig. 2) situés

Fig. 2.



sur la bissectrice intérieure de \hat{D} décrivent un lieu plan dans le plan OYZ pris pour plan de la figure; les centres I'', I''' situés sur la bissectrice extérieure de \hat{D} décrivent un lieu plan dans OXY. Figurons, à côté de la figure perspective, le triangle DAB, en vraie grandeur, transporté dans le plan de la figure. C'est une propriété bien connue (nous la retrouverons au n^o IV dans le cas plus général d'un triangle non isocèle) que le cercle décrit sur II' comme diamètre passe en A et B, la tangente en A étant DA, et que $DA = DB = DI'' = DI'''$. L'axe du cercle AIBI' est la perpendiculaire élevée dans le plan de figure OYZ à II' en son milieu; elle coupe OC' en un point ω et l'on a

$$\omega A = \omega I = \omega I'.$$

On a donc

$$(6) \quad DA^2 = DI \cdot DI' = D\omega^2 - \omega I^2 = D\omega^2 - \omega A^2.$$

En retranchant DO^2 de DA^2 et de $D\omega^2$, on a donc

$$(7) \quad OA^2 = O\omega^2 - \omega A^2.$$

Ceci prouve que le triangle $OA\omega$ du plan OXZ est rectangle en A, $A\omega$ est donc la tangente en A au cercle ABC, et ω est le pôle de AB par rapport à ce cercle : ω est donc un point fixe et la longueur $\omega I = \omega A$ est constante. Le point I ou le point I' décrivent donc un cercle de centre ω et rayon $\sqrt{O\omega^2 - OA^2}$ dans le plan YOZ; ce cercle est associé au cercle ABC.

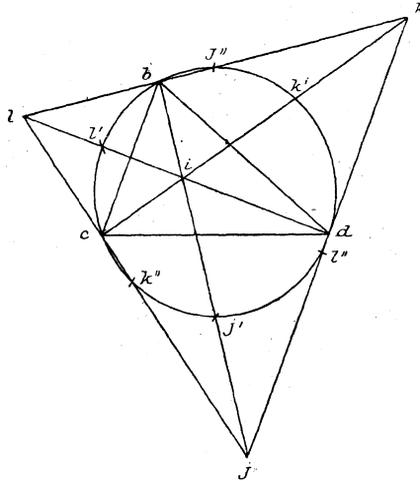
Puisque $DI' = DI'' = DA$ et que $DA^2 = DO^2 + OA^2$, le lieu de I'' et I''' est dans le plan XOY l'hyperbole équilatère d'équation

$$(8) \quad x^2 - y^2 = OA^2.$$

Chaque plan DBC et DCA fournit un cercle ou une hyperbole équilatère analogues; les trois hyperboles sont égales, mais non les trois cercles.

IV, V, VI. Pour simplifier les notations, désignons les inverses, par rapport à A, de B, C, D respectivement par b, c, d . Figurons (*fig. 3*) les bissectrices intérieures et extérieures du triangle bcd ,

Fig. 3.



d'où les centres i, j, k, l des cercles inscrit ou exinscrits au triangle bcd ; ces six droites sont les transformées des bissecteurs des cercles (B), (C), (D); leur concourance, par groupes de trois, en chaque point i, j, k, l prouve déjà que les plans des bissecteurs de (B), (C), (D) se groupent par séries de trois plans ayant en commun une même droite : cette propriété, contenue dans celle de l'énoncé, nous servira plus loin dans l'autre méthode que nous amorcerons.

bij et bkl percent de nouveau le cercle bcd en des points j' et j'' : c'est une propriété bien connue que le cercle de centre j' et rayon $j'd$ passe en i, j, c, d et que le cercle de centre j'' et rayon $j''d$

passe en k, l, c, d ; les tangentes à ces cercles en d sont dj'' et dj' , de sorte que ces cercles sont les bissecteurs du cercle bcd et de la corde cd . Les cercles analogues de centre k', k'', l', l'' réunis aux deux précédents et aux six bissectrices nous fournissent l'ensemble des douze bissecteurs transformés; en chaque point i, j, k, l en passent six; en i , les trois bissectrices intérieures et les cercles de centre j', k', l' ; en j une bissectrice intérieure, deux extérieures, le cercle de centre j' et ceux de centre k'', l'' . Les points transformés I, J, K, L de i, j, k, l sont donc les points signalés par l'énoncé.

Il sera commode, pour ce qui suit, de regarder comme confondus en un seul point, transformé du pôle d'inversion, tous les points à l'infini du plan ou de l'espace. L'inversion de pôle A a donc transformé le tétraèdre ABCD en le quadrilatère ∞bcd ; on sait que $ib \cdot ij = ic \cdot ik = id \cdot il$; donc une seconde inversion de pôle i et puissance (négative) $ib \cdot ij$ transforme le quadrilatère ∞bcd en le quadrilatère $ijkl$; une troisième inversion de pôle A transforme le quadrilatère $ijkl$ en le tétraèdre IJKL. On a donc

$$\begin{aligned}
 (b, c) &= (a, d) = (j, k) = (i, l), \\
 (c, a) &= (b, d) = (k, i) = (j, l), \\
 (a, b) &= (c, d) = (i, j) = (k, l).
 \end{aligned}$$

Au lieu de deux inversions et un déplacement, nous avons même obtenu trois inversions consécutives dont la composition transforme ABCD en IJKL. D'autre part l'inversion intermédiaire transforme chaque bissectrice intérieure en elle-même, chaque cercle de centre j'', k'', l'' en lui-même, les cercles de centre j', k', l' en les bissectrices extérieures kl, lj, jk respectivement. Donc six cercles bissecteurs de (∞bcd) sont transformés chacun en lui-même (dans son ensemble, un point du cercle s'échangeant avec un autre point du même cercle) et les six autres se répartissent en trois couples de deux cercles s'échangeant mutuellement. Ceci constitue la réciprocity intime signalée au début : les bissecteurs de IJKL sont précisément ceux de ABCD. Les questions V et VI sont donc résolues.

On remarquera que, dans le système $ijkl$, les cercles $jkl, ikl, ij l, ijk$ sont égaux entre eux et deux à deux symétriques par rapport à leur corde commune; chaque point i, j, k, l est orthocentre du triangle formé par les trois autres.

Si A, B, C, D sont dans un même plan, il est clair que I, J, K, L sont dans ce même plan; la réciprocity prouve que si I, J, K, L sont dans un même plan, A, B, C, D y sont aussi; de là résulte évidemment que si l'un ou l'autre des systèmes (A, B, C, D) ou (I, J, K, L) forme un véritable tétraèdre, l'autre en forme aussi un, inscrit dans la même sphère que l'autre.

La figure 3 peut être considérée comme perspective, sur le plan de cette figure, de la figure de l'espace. Le point b est à lui tout seul la perspective de AB; or b est situé au croisement de ij et lk , donc AB rencontre dans l'espace IJ et KL; AC, de même, IK et LJ; AD rencontre IL et JK; en vertu de la symétrie du rôle des six arêtes de ABCD, l'arête CD rencontre IJ et KL, l'arête BD rencontre IK et LJ, l'arête BC rencontre IL et JK [d'ailleurs il est très simple de remarquer que j''' désignant le point de rencontre de ij et cd , on a $j'''i \cdot j'''j = j'''c \cdot j'''d$ de sorte que les deux cercles de l'espace Acd et Aij se coupent en un même point situé sur le prolongement de Aj''' à la distance $\frac{j'''c \cdot j'''d}{j'''A}$ de j''' ; le transformé de ce point dans l'inversion de pôle A est le point commun à CD et IJ]. On remarquera que cd est partagée harmoniquement par ij et kl ; donc dans l'espace, les points où chaque arête de l'un des tétraèdres ABCD ou IJKL rencontrent deux arêtes de l'autre sont conjugués par rapport aux extrémités de cette arête ⁽¹⁾.

Si nous formons le tableau

$$\begin{array}{cc} \text{AB} & \text{CD} \\ \text{A} & \text{DB} \\ \text{AD} & \text{BC} \end{array} \parallel \begin{array}{cc} \text{IJ} & \text{KL} \\ \text{IK} & \text{LJ} \\ \text{IL} & \text{JK} \end{array}$$

qui indique les deux arêtes de l'un des tétraèdres rencontrant une arête de l'autre, inscrite sur la même horizontale, on pourrait croire que ce tableau indique une correspondance unique (AI), (BJ), (CK), (DL) entre les sommets des deux tétraèdres; mais il suffit d'écrire à la place de la seconde colonne l'une quelconque

(1) On voit aisément, par des conservations de rapports anharmoniques, que IJ passe par le point, intérieur au segment CD, divisant le segment proportionnellement aux produits CA.CB et DA.DB.

des quatre suivantes,

$$\begin{array}{cccc} \text{IJ} & \text{KL} & \parallel & \text{JI} & \text{LK} & \parallel & \text{KL} & \text{IJ} & \parallel & \text{LK} & \text{JI} \\ \text{IK} & \text{LJ} & \parallel & \text{JL} & \text{KI} & \parallel & \text{KI} & \text{JL} & \parallel & \text{LJ} & \text{IK} \\ \text{IL} & \text{JK} & \parallel & \text{JK} & \text{IL} & \parallel & \text{KJ} & \text{LI} & \parallel & \text{LI} & \text{KJ} \end{array}$$

pour voir le résultat suivant, conforme à ce qui a déjà été remarqué à la fin du paragraphe I : les points A, B, C, D étant donnés, l'ensemble des quatre points (I, J, K, L) en résulte sans que les noms individuels I, J, K, L à attribuer aux points du groupe soient déterminés d'une façon unique; on a, comme on sait, 24 façons différentes de répartir les noms. Choisir les notations de façon que l'on ait $(a, b) = (i, j)$, $(a, c) = (i, k)$, $(a, d) = (i, l)$, ne laisse plus que quatre façons de répartir les noms : on choisit l'une des deux arêtes rencontrant AB et CD, ce sera l'arête IJ et sur cette arête il y a deux façons de disposer I et J aux extrémités; cela donne les dispositions (IJKL), (JILK), (KLIJ), (LKJI) correspondant à (ABCD).

Si l'ensemble des douze bissecteurs est tracé, sans que les huit points d'intersection aient été affectés d'un nom, prenons l'un deux et appelons-le A; en A choisissons l'un des trois couples orthogonaux qui s'y croisent et appelons B le nouveau point commun à ces deux cercles; C et D s'obtiennent ensuite par le même procédé appliqué aux deux autres couples. Les points restants sont I, J, K, L.

Nous avons indiqué plus haut trois inversions successives qui échangent (ABCD) avec (IJKL) ou inversement, et cela en *grandeur et position* : les deux inversions extrêmes ont pour pôle A; il existe huit façons d'échanger ainsi ABCD avec IJKL, en respectant l'ordre de correspondance AI, BJ, CK, DL, en faisant jouer à l'un des huit points A, B, C, D, I, J, K, L le rôle dévolu ici à A. D'autre part, au lieu d'échanger IJKL avec ABCD, on peut l'échanger avec BADC; commençons en effet comme précédemment par l'échange (IJKL), $(ijkl)$ avec l'inversion de pôle A; prenons ensuite, non plus l'inversion de pôle i , mais celle de pôle j et puissance (positive) $(ji.jb)$; $(ijkl)$ devient $(b\infty dc)$; la troisième inversion, de pôle A encore, donne (BADC). Ceci confirme les résultats indiqués plus haut sur les correspondances (ABCD), (IJKL) ou (BADC), (IJKL). En mettant bout à bout les deux systèmes de trois inversions chacun qui transforment (ABCD) en

(IJKL) puis (IJKL) en (BADC), on a un total de six inversions où les troisième et quatrième opérations se détruisent, de sorte qu'en *grandeur et position* on passe du tétraèdre (ABCD) au tétraèdre équivalent (BADC) par quatre inversions de pôle (A, i, j, A) successivement suivant le schéma

| | | | | | | | |
|----------|----------|-----|-----|----------|-----|-----|-----|
| A | B | C | D | I | J | K | L |
| ∞ | b | c | d | i | j | k | l |
| i | j | k | l | ∞ | b | c | d |
| b | ∞ | d | c | j | i | l | k |
| B | A | D | C | J | I | L | K |

Il est facile de déduire de là de nombreuses relations *métriques*. D'abord l'inversion de pôle A ayant donné b, c, d sans que les noms i, j, k, l aient été encore décernés aux centres des cercles inscrit ou exinscrits dans b, c, d , on peut placer i arbitrairement en l'un des quatre centres : pourvu que i et j soient toujours alignés avec b ; i, k avec c ; i, l avec d on aura toujours l'une des dispositions (IJKL), (JILK), (KLIJ), (LKJI) qui assurent la conservation des angles $(a, b) = (i, j), (a, c) = (i, k), (a, d) = (i, l)$. On peut, comme cela a été fait pour la figure 3, convenir de placer i au centre du cercle *inscrit*, ce qui fixe aussitôt j, k, l d'après le criterium indiqué à l'instant. Il est intéressant de montrer que, ce choix fait, si l'on fait une inversion de pôle B, ou C, ou D, ce sera la droite BJ ou CK ou DL qui donnera le centre du cercle *inscrit* au triangle $A_B C_B D_B$ ou $A_C B_C D_C$ ou $A_D B_D C_D$. Pour le voir clairement remarquons que nous pouvons disposer de la grandeur p_B , puissance d'inversion adoptée en B, de façon que le triangle $A_B D_B C_B$ soit égal au triangle bcd ; si nous transportons le solide constitué par ABCD et le triangle $A_B D_B C_B$ de façon que A_B recouvre b, D_B, c et C_B, d , les points B, A, D, C occupent des positions nouvelles que nous pouvons appeler A', B', C', D' , et regarder comme homologues de A, B, C, D; l'inversion de puissance p_B et de pôle A' transforme i, j, k, l en I', J', K', L' ; nous savons que le tétraèdre $A'B'C'D'$ (auquel sont supposés liés I', J', K', L') est égal au tétraèdre BADC (dont les sommets sont pris dans cet ordre), auquel sont supposés liés J, I, L, K. D'autre part on peut passer de $A'B'C'D'$ à BADC non plus par un déplacement, mais par une série d'inversions (de pôles successifs A', A pour obtenir

ABCD, puis de pôles A, i, j, A pour obtenir BADC; on peut donc garder seulement quatre inversions de pôle A', (i, j, A); dans cette série d'inversions un élément quelconque lié à A'B'C'D' sur la sphère qui lui est circonscrite se trouve transporté finalement sur l'élément homologue de BADC; cette propriété, qui est vraie même pour tout l'espace supposé lié à A'B'C'D', se démontre aisément en remarquant que les deux sphères A'B'C'D' et BADC sont soumises à une correspondance ponctuelle biunivoque qui conserve à la fois les angles et les longueurs; donc J est l'homologue de I', I de J', L de K' et K de L'; BJ (ou ce qui revient au même A'I) passe bien par le centre du cercle *inscrit* à A_BC D_B, Écrivons les deux lignes

$$\begin{array}{cccccccc} A' & B' & C' & D' & I' & J' & K' & L' \\ B & A & D & C & J & I & L & K \end{array}$$

et voyons les égalités métriques obtenues par ce fait que les inversions (A, p_A) ou (A', p_B) effectuées sur $\infty bcdijkl$ donnent ABCDIJKL ou A'B'C'D'I'J'K'L'. On a

$$(9) \quad cd = CD \frac{p_A}{AC \cdot AD} = C'D' \frac{p_B}{A'C' \cdot A'D'} = CD \frac{p_B}{BD \cdot BC}$$

On déduit de là les conditions

$$(10) \quad \frac{p_A}{AB \cdot AC \cdot AD} = \frac{p_B}{BA \cdot BC \cdot BD} = \frac{p_C}{CA \cdot CB \cdot CD} = \frac{p_D}{DA \cdot DB \cdot DC},$$

pour que les quatre triangles B_AC_AD_A, A_BD_BC_B, D_CA_CB_C, C_DB_DA_D soient non seulement semblables mais tous égaux. Chacun des rapports (10) est égal à

$$(11) \quad \frac{bc}{BC \cdot AD} = \frac{bd}{BD \cdot AC} = \frac{cd}{CD \cdot AB}$$

On a de même, en n'utilisant que les arêtes IJ et LK dont les longueurs restent inaltérées,

$$(12) \quad ij = IJ \frac{p_A}{AI \cdot AJ} = IJ \frac{p_B}{BI \cdot BJ}, \quad lk = LK \frac{p_A}{AL \cdot AK} = LK \frac{p_B}{BL \cdot BK}$$

Des égalités (12) on déduit de nouvelles expressions des rapports $p_A : p_B : p_C : p_D$ et l'on a en particulier

$$(13) \quad \frac{p_A^2}{AI \cdot AJ \cdot AK \cdot AL} = \frac{p_B^2}{BI \cdot BJ \cdot BK \cdot BL} = \frac{p_C^2}{CI \cdot CJ \cdot CK \cdot CL} = \frac{p_D^2}{DI \cdot DJ \cdot DK \cdot DL}$$

En comparant avec (10) on a les égalités remarquables

$$(14) \quad \frac{(AB.AC.AD)^2}{AI.AJ.AK.AL} = \frac{(BA.BC.BD)^2}{BI.BJ.BK.BL} = \frac{(CA.CB.CD)^2}{CI.CJ.CK.CL} = \frac{(DA.DB.DC)^2}{DI.DJ.DK.DL}.$$

En égalant diverses expressions du rapport $p_A : p_B$ déduites de (10) et (12) on a

$$(15) \quad \frac{AI.AJ}{BI.BJ} = \frac{AL.AK}{BL.BK} = \frac{AC.AD}{BC.BD},$$

qui font intervenir les distances des points A, B aux extrémités de l'arête opposée CD du tétraèdre ABCD et aux extrémités des arêtes IJ et LK qui rencontrent AB et CD. Les relations du type (15) entraînent immédiatement les relations (14). On peut écrire ensuite les relations analogues obtenues en permutant les rôles de A, B, C, D et I, J, K, L.

Chaque rapport (15) est égal au rapport dans lequel le segment AB est divisé par IJ ou KL.

Nous avons ainsi rattaché l'étude de la figure aux propriétés du groupe des inversions et déplacements. Les divers tétraèdres déduits de ABCD par les opérations de ce groupe offrent deux configurations *canoniques* : $bcd\infty$ obtenue par une inversion de pôle A, B, C ou D et $ijkl$ par une inversion de pôle I, J, K, L. Nous avons reconnu pour une configuration canonique telle que $\infty bcdijkl$ l'intérêt d'une inversion de pôle i, j, k, l ; à signaler qu'une inversion de pôle b par exemple et puissance $bi.bj$ remplace cette configuration (dans son ensemble) par la configuration symétrique relative à bij .

A signaler aussi que la construction de I, J, K, L quand A, B, C, D sont donnés (ou inversement de A, B, C, D quand I, J, K, L sont donnés) se fait beaucoup plus simplement par la construction de i, j, k, l que par des constructions directes dans l'espace; la solution présentée ici remplace elle aussi des théorèmes de l'espace par des théorèmes du plan.

VII. Cette partie se résout comme II : l'inversion de pôle A conduit à des points D_A, I_A, J_A, K_A, L_A engendrant chacun un cercle d'axe $B_A C_A$; chaque point D, I, J, K, L engendre un cercle associé au cercle ABC.

VIII. L'inversion de pôle A donne la figure $bcdijkl$ qui, dans les conditions de l'énoncé, pivote autour de bc ; donc les points où BC est coupée par IL ou JK sont fixes : en effet bc est une droite fixe du plan ABC et les perspectives sur cette droite fixe, à partir de A, des points en jeu sont fixes. Pour la même raison, A, B, C jouant le même rôle, CA est coupée en des points fixes par IK et LJ, et AB par IJ et KL; donc le plan JKL pivote autour de la droite fixe joignant les intersections de BC et JK d'une part, de CA et LJ d'une autre, AB et KL de l'autre. Le cercle JKL et le cercle ABC se coupent aussi en deux points fixes, ayant pour perspective les points fixes où bc est coupée par le cercle jkl ; on a ainsi deux nouveaux points de la droite autour de laquelle pivote le plan JKL. Mêmes résultats pour les autres plans IKL, IJL, IJK. Le raisonnement employé prouve aussi que les droites IJ, KL engendrent chacune un cône du second degré ayant son sommet sur AB et s'appuyant, le premier sur les cercles, associés au cercle ABC, lieux de I et J, le second sur les cercles analogues lieux de K et L. Mêmes résultats pour les droites IK, JL ou IL et JK.

Remarque. — Soient \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} les sphères orthogonales à la sphère ABCD le long des cercles (A), (B), (C), (D) respectivement; \bar{A} et \bar{B} passent toutes deux en C et D; soient (AB), (AB)' leurs centres de similitude directe ou inverse; les centres de \bar{A} et \bar{B} sont tous deux dans le plan tangent en C, ou en D, à la sphère ABCD, de sorte que la ligne des centres α , β de \bar{A} , \bar{B} est la droite conjuguée de CD; α est d'ailleurs pôle de BCD et β de ACD. L'inversion de pôle (AB) et puissance $(\overline{AB})C^2$ change la sphère ABCD en elle-même, échange \bar{A} et \bar{B} , donc les deux cercles (A) et (B) : mais alors le plan polaire de (AB) coupe la sphère ABCD suivant l'un des bissecteurs de (A) et (B). Propriétés analogues pour (AB)', la sphère de centre (AB)' et de rayon $(\overline{AB})C$. Les propriétés établies dans cette solution prouvent que les quatre sphères \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , prises deux à deux, ont douze centres de similitude répartis, comme on sait, en huit plans par groupes de six : ces huit plans sont les plans tangents en A, B, C, D, I, J, K, L à sphère ABCD. Si l'on considère un groupe de trois sphères \bar{A} , \bar{B} , \bar{C}

par exemple, le plan de leurs centres est, d'après une remarque déjà faite, le plan tangent en D à $ABCD$; ce plan contient les quatre axes de similitude des trois sphères \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} ; le plan tangent, autre que le plan tangent en D , mené à la sphère $ABCD$ par l'un de ces quatre axes est le plan tangent à la sphère $ABCD$ en l'un des quatre points I , J , K , L . Les sphères \bar{I} , \bar{J} , \bar{K} , \bar{L} forment un système réciproque de \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} . On aurait pu baser la solution sur l'étude directe des sphères \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} ; mais les centres de similitudes ou axes de similitude ne sont pas des éléments invariants dans une inversion; c'est ce qui nous a fait préférer la méthode du texte.