NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ILIOVICI

WEILL

Quelques remarques de géométrie élémentaire sur les coniques considérées comme enveloppes de droites

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 65-67

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__65_0>

QUELQUES REMARQUES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE SUR LES CONIQUES CONSIDÉRÉES COMME ENVELOPPES DE DROITES ;

PAR ILIOVICI ET WEILL.

Nous nous proposons de démontrer par des procédés de géométrie élémentaire que la perspective d'une conique est une conique.

PROBLÈME PRÉLIMINAIRE. — *Construire le sommet* A *d'un triangle* ABC *connaissant le côté* BC, *la moyenne géométrique* l *des côtés* AB *et* AC, *et la direction de la bissectrice intérieure de l'angle* A.

Si par le milieu M de BC, on mène la parallèle à la bissectrice extérieure de l'angle A et qu'on y porte une longueur $MD = l$, les points A et D sont les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse de foyers B et C. Pour construire A, on connaît, dès lors, le côté BC, la direction de la bissectrice de l'angle A et la somme $AB + AC = DB + DC$ des deux autres côtés. Comme on a $DB + DC > BC$, on obtiendra dans tous les cas deux positions du point A symétriques par rapport au point M (1).

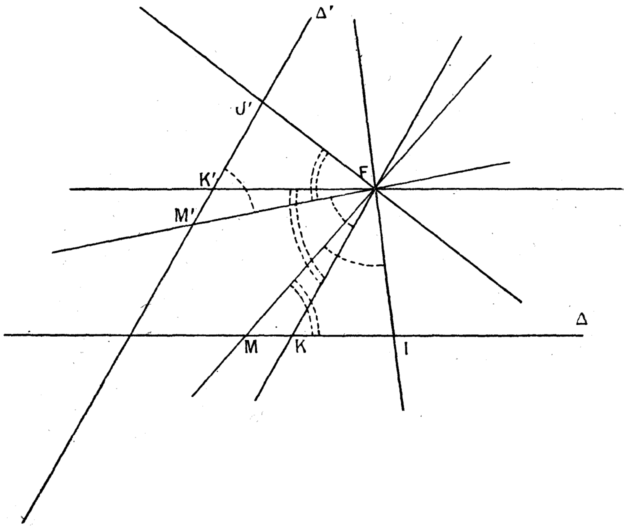
THÉORÈME I. — *Étant données deux divisions homographiques non semblables portées sur deux axes distincts, il existe toujours deux points réels d'où l'on voit sous un angle constant le segment qui joint les points homologues.*

On sait que les côtés d'un angle constant qui tournent autour du sommet F, déterminent sur deux droites D et D', deux divisions homographiques, que l'on peut aussi définir à l'aide de trois couples d'éléments homologues : 1° le point limite I sur D (auquel

(1) Le problème comporte quatre solutions mais deux sont toujours réelles et deux toujours imaginaires.

correspond le point à l'infini sur D'), 2° le point limite J' sur D' et 3° deux points homologues quelconques M et M'.

Si donc on mène par F (*fig.*) les deux parallèles FK et FK' à D et D', les angles $\widehat{\mathrm{IFK}}$, $\widehat{\mathrm{MFM}'}$ et $\widehat{\mathrm{K'FJ'}}$ sont égaux et orientés dans



le même sens. On en déduit que les bissectrices de l'angle IFJ' sont confondues avec celles de $\widehat{\mathrm{KFK}'}$ (donc parallèles à celles de l'angle $\widehat{\mathrm{DD}'}$), et que

$$\mathrm{FI.FJ'} = \mathrm{IM.J'M'}$$

(conséquence de la similitude des triangles IFM et J'F'M').

Une correspondance homographique étant définie par les points limites I et J' et un couple de points homologues M et M', pour déterminer le point F, on est ramené au problème préliminaire qui fournit toujours deux solutions réelles.

Remarque. — Si les divisions étaient semblables, les points I et J' seraient rejetés à l'infini, ainsi qu'un des points F, l'autre existerait toujours et serait facile à determiner.

THÉORÈME II [1]. — *Lorsque les côtés d'un angle constant tournent autour du sommet* F, *la droite qui joint les points où chacun des côtés rencontre respectivement deux droites fixes* D *et* D′, *enveloppe une conique de foyer* F *et tangente à* D *et* D′.

En effet, deux points correspondants M et M′ sur les deux droites, définissent l'angle MFM′. Or il existe une conique et une seule, ayant pour foyer F, et tangente aux trois droites D, D′ et MM′.

Le segment déterminé sur une tangente à cette conique, par les droites D et D′ est vu du point F sous un angle constant qui est MFM′, ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME III. — *La perspective d'une conique est une conique.*

Considérons une conique et deux tangentes fixes D et D′. Une tangente quelconque à cette conique coupe D et D′ en M et M′, qui se correspondent homographiquement, puisque le segment MM′ est vu du foyer sous un angle constant.

Comme la correspondance homographique est projective, les projections μ et μ' des points M, M′ se correspondent homographiquement sur Δ et Δ' (projection de D et D′) et, d'après le théorème I, il existe un point φ d'où le segment $\mu\mu'$ est vu sous un angle constant. En vertu du théorème II, la droite $\mu\mu'$ enveloppe une conique, qui est évidemment la projection de la première.

Comme toute définition générale des coniques, la définition qui précède permet de mettre en évidence les propriétés qui caractérisent ces courbes. Donnons, à titre d'exemple, après M. Montel [2], la propriété énoncée par le second théorème de Poncelet.

La réciproque de ce théorème est une conséquence du théorème II.

Étant donnés dans un plan un point F *et une courbe* C, *si la droite* FT, *qui joint le point* F *au point de rencontre des tangentes en deux points quelconques* P *et* P′ *de la courbe, est bissectrice de l'angle* PFP′, *cette courbe est une conique de foyer* F.

---

[1] Réciproque du théorème classique : Le segment déterminé sur une tangente mobile, par deux tangentes fixes d'une conique, est vu de chacun des foyers sous un angle constant.

[2] P. MONTEL, *Sur une transformation géométrique* (*Revue de l'Enseignement des Sciences*, nos 81-82, janvier-février 1915).