

Solution de question proposée

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 64

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1_64_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2474.

(1924, p. 351.)

Étant donnée l'équation

$$x^n + x + 1 = 0$$

dans laquelle n est un entier plus grand que 2, la somme des $(n^2 + n - 1)$ ièmes puissances des racines de cette équation est nulle.

L. TITS.

SOLUTION.

Par M. J. DE CAUMONT.

On a

$$x^{n^2+n-1} = \frac{(x^n)^{n+1}}{x},$$

et, en tenant compte de l'équation donnée,

$$\begin{aligned} (1) \quad x^{n^2+n-1} &= (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{x} \\ &= (-1)^{n+1} \left[x^n + (n+1)x^{n-1} + \dots + (n+1) + \frac{1}{x} \right]. \end{aligned}$$

Or les formules classiques qui donnent les sommes S_1, S_2, \dots des puissances d'exposants 1, 2, ... des racines d'une équation entière montrent qu'ici :

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 = \dots = S_{n-2} &= 0, \\ S_{n-1} &= -(n-1). \end{aligned}$$

La somme des inverses des racines de l'équation proposée est évidemment -1 ; enfin remplaçons dans le crochet de la formule (1) x^n par $-x-1$ et nous voyons que la somme des puissances d'exposants $n^2 + n - 1$ est

$$(-1)^{n+1} [-n - (n-1)(n+1) + n(n+1) - 1] = 0.$$

Autre solution par MM. R. MARCHAY, et G. MÉTROD.