NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Exercices de mathématiques générales (suite et fin)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 61-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__61_1>

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

(*Suite et fin.*)

C. 15. — Soit le champ vectoriel défini, en coordonnées rectangulaires par ses composantes $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$. Trouver le flux sortant de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + 2y + 3z.$$

Trouver la surface, passant par l'origine et orthogonale au champ en chacun de ses points. Montrer que les surfaces tangentes au champ en chacun de leurs points peuvent se déduire de cylindres par la transformation

$$X = \frac{1}{x}, \qquad Y = \frac{1}{y}, \qquad Z = \frac{1}{z}.$$

C.16. — Faire la récapitulation de la théorie des courbes gauches sur l'exemple suivant :

$$x = \cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t; \qquad y = \frac{2}{3}\sin^3 t; \qquad z = \sin t$$

(écrire explicitement les trois groupes de formules de Frenet). Construire les projections de la courbe sur les plans de coordonnées. Montrer que cette courbe est algébrique et trouver son degré (*voir* BOULIGAND, *Géométrie analytique*, nos 91 et 96).

C.17. — Calculer explicitement les deux fonctions

$$x(t) = \int_0^t \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y(t) = \int_0^t \frac{1-t^2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt.$$

Soit $z(t)$ une troisième fonction de t qui s'annule pour $t = 0$. On considère la courbe, lieu du point de coordonnées $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, dans un système d'axes rectangulaires $Oxyz$. Comment faut-il choisir la fonction $z(t)$ pour que t soit précisément l'abscisse curviligne du point correspondant de cette courbe. Ce choix étant effectué, construire les projections de la courbe sur les plans de coordonnées. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.

C.18. — Les composantes d'un champ vectoriel sont de la forme

$$X = \lambda(x, y, z) + x\,\mu(x, y, z);$$
$$Y = \lambda(x, y, z) + y\,\mu(x, y, z);$$
$$Z = \lambda(x, y, z) + z\,\mu(x, y, z).$$

1° Déduire de ces formules que le champ proposé est la somme géométrique de deux autres champs, dont l'un est formé de vecteurs parallèles à une même direction, l'autre de vecteurs concourants. En déduire que les courbes intégrales du système

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

sont contenues dans des plans passant par une même droite.

2° On suppose que λ et μ soient exclusivement fonctions de $x + y + z$ et de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Montrer que les courbes intégrales du système (1) sont égales.

3° Appliquer ce qui précède au cas où l'on a

$$X = x^2 - yz; \qquad Y = y^2 - zx; \qquad Z = z^2 - xy$$

et trouver dans ce cas les surfaces normales en chacun de leurs points au champ proposé. Calculer le flux de ce champ à travers la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z.$$

C.19. — Trouver les surfaces orthogonales aux surfaces de la famille

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3.$$

Existe-t-il parmi ces surfaces des surfaces du second degré?

C.20. — Intégrer l'équation

$$(y + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z + x)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$$

Comment sont engendrées les surfaces intégrales. Montrer que ces surfaces coupent à angle droit une famille de quadriques à un paramètre.

C.21. — On considère une fonction de $x + y + z$ et de $x^2 + y^2 + z^2$. Soient P, Q, R les composantes de son gradient. Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R.$$

Application à la fonction

$$\frac{x + y + z}{\sqrt{3}} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

C.22. — On considère le champ vectoriel

$$X = y + z - x; \qquad Y = z + x - y; \qquad Z = x + y - z.$$

Trouver le lieu des points M où le vecteur du champ est porté par la droite OM. Trouver les surfaces orthogonales au champ. Trouver le flux du champ émanant de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = Z.$$