Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 53-59

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__53_1>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.9. — I. *On désigne par a, b, c trois quantités réelles* ($a < b < c$) *et par* α, β, γ *trois quantités positives telles que*

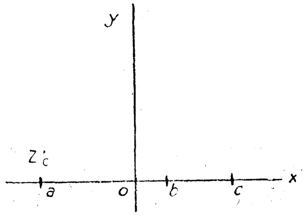
$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Soit encore z_0 *une quantité complexe dans laquelle le coefficient de* i *est positif. On considère dans le plan de la variable complexe* z *le demi-plan situé au-dessus de* Ox *et l'on forme l'intégrale*

$$Z = \int_{z_0}^{z} (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}(z-c)^{\gamma-1}\,dz.$$

L'intégration est faite en restant dans le demi-plan et, quand on intègre le long de l'axe réel, on évite les points a, b, c *par des demi-*

circonférences infiniment petites situées au-dessus de Ox. *On demande de caractériser la portion du plan* Z *correspondant au demi-plan de la variable complexe* z.



II. *Étant considérée l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c(x, y)\,u=0,$$

où $c(x, y)$ *est une fonction réelle et holomorphe dans le voisinage de* $x=0$, $y=0$, *montrer qu'il existe des intégrales de cette équation susceptibles, dans le voisinage de l'origine, d'être mises sous la forme*

$$\frac{P(x, y)}{x^2+y^2}+Q(x, y)\log(x^2+y^2),$$

où P *et* Q *sont réelles et holomorphes autour de l'origine. Dans le développement de* $P(x, y)$ *qui est supposée s'annuler à l'origine,*

$$P(x, y)=\alpha x+\beta y+\ldots,$$

les coefficients α *et* β *des termes du premier degré sont donnés, et la valeur de* $Q(x, y)$ *à l'origine,* $Q(0, 0)$, *a la valeur* g, *qui est également donnée.*

III. *Dans l'équation de Fredholm*

$$\varphi(x, y)+\lambda\iint f(x, y;\, u, v)\,\varphi(u, v)\,du\,dv=\psi(x, y)$$

on suppose que le noyau $f(x, y;\, u, v)$ *est égal à* $\dfrac{1}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}$. *On demande si le premier noyau* itéré $f_1(x, y;\, u, v)$ *devient encore infini, et, dans le cas de l'affirmative, à quelle fonction il est comparable.*

IV. *Démontrer que les valeurs singulières de* λ *relatives à une certaine aire et à l'équation*

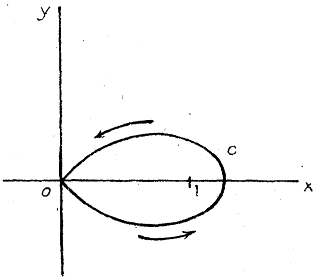
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda\, c(x, y)\,u,$$

où $c(x, y)$ est positive dans l'aire considérée, ne peuvent être que réelles et négatives.

C. 10. — ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{1-z^3}}$$

prise le long du contour c marqué sur la figure, partant de l'origine et entourant une fois le point critique $z = 1$ du radical cubique.



On partira de l'origine avec la valeur $+1$ du radical.

N. B. — *On désignera dans le calcul par α la racine cubique imaginaire de l'unité, pour laquelle le coefficient de i est positif.*

(Paris, juin, 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soit, pour une équation de Fredholm $k(x, y)$ un noyau principal de la forme*

$$k(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_m(x)\psi_m(y).$$

Expliquer la réduction de ce noyau à la forme canonique et montrer qu'il est la somme d'un certain nombre de noyaux canoniques orthogonaux deux à deux. (On admettra le théorème fondamental sur la réduction d'une substitution linéaire à la forme canonique.)

C. 11. — II. *Déterminer la fonction $f(x)$ satisfaisant à l'équation intégrale :*

$$\int_0^y \frac{f(x)\,dx}{(y-x)^{\frac{1}{3}}} = \cos y.$$

C. 12. — ÉPREUVE PRATIQUE. — *L'élément linéaire d'une surface S est donné par la formule*

$$ds^2 = \frac{1+u^2}{u^2(1-u^2)^3}\,du^2 + \frac{2\,du\,dv}{u(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{dv^2}{1-u^2}.$$

Montrer que cette surface peut être appliquée sur une surface de révolution Σ *engendrée par une chaînette tournant autour de sa base* $\Big($*c'est-à-dire sur une surface dont l'équation en coordonnées rectangulaires est de la forme* $\sqrt{x^2+y^2} = a\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{a}\Big)$.

Calculer la torsion en valeur absolue d'une ligne asymptotique de S *en un point* u, v.

(Bordeaux, 4 juin 1924.)

Épreuve théorique. — I. *Théorie de l'équation intégrale de première espèce*

$$\int_0^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x),$$

donner un exemple.

II. — *Pour une surface* (S), *on a* (notations classiques)

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Une courbe (C) *est définie sur cette surface par les équations paramétriques*

$$u = f(t), \qquad v = \varphi(t).$$

Soient, en un point M *de* (C), R *son rayon de courbure et* θ *l'angle de sa binormale avec la normale à la surface* (S) *au même point. Calculer le quotient*

$$\frac{\cos\theta}{R}$$

à l'aide des fonctions E, F, G, $f(t)$, $\varphi(t)$ *et de leurs dérivées en considérant ces fonctions comme données.*

C. 13. — Épreuve pratique. — *Calculer les valeurs singulières de* λ *pour l'équation de Fredholm*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{3}{2}xy + \frac{5}{2}x^2y^2\right)\varphi(y)\,dy.$$

Dans le cas où $\lambda = 1$ *et* $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tang} x}{x}$, *résoudre l'équation.*

(Bordeaux, novembre 1924.)

Épreuve théorique. — *On considère une transformation de contact à une équation directrice :*

$$F(xyz, XYZ) = 0.$$

On supposera les espaces xyz, XYZ *rapportés aux mêmes axes.*

1° *Établir les équations qui permettent de trouver l'élément de contact* XYZ, PQ *correspondant à un élément donné xyz, pq. Quelle est l'interprétation géométrique?*

2° *A quelle condition les normales aux éléments correspondants se rencontrent-elles? Montrer que la fonction* F *doit satisfaire à une certaine équation aux dérivées partielles. On pourra désigner dans cette équation par abc*, ABC *les dérivées de* F *par rapport à xyz*, XYZ.

3° *Former les équations différentielles des caractéristiques. Elles présentent de nombreuses combinaisons intégrables, les interpréter géométriquement. Montrer en particulier que les points abc*, ABC *décrivent deux cercles dont l'axe commun passe par l'origine.*

Montrer qu'on peut achever l'intégration des équations différentielles en plaçant convenablement ces cercles par rapport aux axes. Interpréter le résultat obtenu, démontrer que pour une caractéristique donnée :

a. Les points xyz, XYZ *décrivent deux cercles de même axe ;*

b. Les directions abc, ABC *passant par ces points se coupent en un point fixe de cet axe.*

En déduire les équations finies des caractéristiques.

4° *Comment alors peut-on intégrer l'équation aux dérivées partielles.*

Indications. — 2° L'équation est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ X-x & Y-y & Z-z \end{vmatrix} = 0;$$

3°

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} b & c \\ Y-y & Z-z \end{vmatrix}} = \frac{dX}{-\begin{vmatrix} B & C \\ Y-y & Z-z \end{vmatrix}} = \frac{da}{-\begin{vmatrix} B & C \\ b & c \end{vmatrix}} = \frac{dA}{\begin{vmatrix} B & C \\ b & c \end{vmatrix}}.$$

On trouve que $A+a$, $B+b$, $C+c$, $A^2+B^2+C^2$, $a^2+b^2+c^2$ sont des constantes.

Le reste est indiqué dans l'énoncé. Il suffit de placer les cercles perpendiculaires à Oz.

4° Méthode classique de Cauchy.

(Nancy, octobre 1922.)

Épreuve théorique. — *On considère un plan rapporté à deux coordonnées rectangulaires xy.*

Un point P *est placé au hasard dans ce plan, la probabilité pour qu'il tombe entre les abscisses* x, $x+\Delta x$, *entre les ordonnées* y, $y+\Delta y$, est

$$kk' e^{-k^2x^2-k'^2y^2} \Delta x \Delta y.$$

1° *Un rectangle compris entre les abscisses* $x_1 x_2$, *entre les ordonnées* $y_1 y_2$ *étant donné, quelle est la probabilité pour que ce rectangle soit atteint par un point* P, *la probabilité pour qu'il soit atteint au moins une fois dans* n *épreuves successives?*

2° *Chaque point* P *est entouré d'un rectangle efficace, parallèle aux axes, de centre* P, *de longueur* $2l$, *de hauteur* $2l'$. *Probabilité pour que le rectangle de la première partie soit atteint par une portion du rectangle efficace.*

3° *On jette au hasard deux points* P *avec leurs rectangles. Quelle est la probabilité pour que ces rectangles soient extérieurs l'un à l'autre, la probabilité pour qu'ils se recouvrent partiellement?*

On jette au hasard n *points* P. *Quelle est la probabilité pour qu'ils soient tous extérieurs l'un à l'autre?*

4° *On jette au hasard deux points* P *avec leurs rectangles. Comment calculera-t-on la valeur probable de la surface recouverte?*

INDICATIONS. — La probabilité $p = \int\int kk' e^{-k^2x^2-k'^2y^2} dx\, dy$ étendue au rectangle $x_1 x_2$, $y_1 y_2$.

Elle se calcule à l'aide de la fonction bien connue θ.

L'autre probabilité est $1-(1-p)^n$.

2° Il suffit de border le rectangle de chaque côté de $2l$ en x, de $2l'$ en y.

3° Les centres étant $\xi_1 \eta_1$, $\xi_2 \eta_2$, la probabilité de recouvrement est

$$\int\int\int\int k^2 k'^2 e^{-k^2(\xi_1^2+\xi_2^2)-k'^2(\eta_1^2+\eta_2^2)} d\xi_1\, d\xi_2,\ d\eta_1\, d\eta_2$$

étendue au domaine

$$|\xi_1-\xi_2| < 2l, \qquad |\eta_1-\eta_2| < 2l'.$$

Elle se calcule à l'aide de la fonction θ.

4° Dans le cas de recouvrement, l'aire est $[2l-(\xi_1-\xi_2)]\,[2l'-(\eta_1-\eta_2)]$.

Il suffit de multiplier par la probabilité et d'intégrer.

(Nancy, juin 1923.)

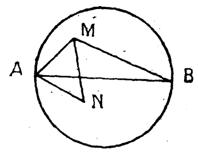
C.14. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère dans un plan un cercle de rayon* R. *Un point* M *est pris au hasard dans le cercle. La probabilité pour qu'il soit dans une aire infiniment petite est proportionnelle à cette aire.*

Définir et calculer les valeurs probables :

1° *De l'aire du triangle* AMB, AB *étant un diamètre du cercle.*

2° *De l'aire du triangle* AMN, A *étant pris sur le cercle* M *et* N *étant pris au hasard (on pourra adopter des coordonnées polaires).*

3° M *étant supposé fixe, quelle est la probabilité pour que* MN *soit inférieure à une longueur donnée a ?*



4° *Quelle est cette probabilité quand* MN *sont quelconques dans le cercle ?*

(Nancy, octobre 1923.)