Certificat de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 48-50

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__48_0>

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soit la surface* S, *définie par l'équation*

$$z = \frac{x^4 + 64y^2 - 8x^2}{y^3(y+1)}.$$

1° *Trouver le lieu des asymptotes de ses sections par les plans parallèles au plan des xy. Montrer que ce lieu est un conoïde droit.*

2° *On considère, en particulier, la section* C *par* xOy. *On pose*

$$\cos\varphi = 2\sqrt{2}\frac{y}{x}.$$

Calculer x et y en fonction de φ, *ainsi que l'arc s de la courbe, son rayon de courbure et les coordonnées de son centre de courbure. Vérifier que le rayon de courbure et l'abscisse du centre de courbure s'expriment rationnellement en fonction de x. Vérifier également la relation*

$$2y = \sin(s - y).$$

II. *Déterminer toutes les courbes planes qui satisfont à la relation*

$$(\rho + 1)\sin V = 1,$$

où ρ *désigne le rayon vecteur et* V *l'angle de ce rayon vecteur avec la tangente. Construire l'une de ces courbes.*

III. *Un fil élastique, de longueur naturelle* $2a$, *est fixé par ses deux extrémités en deux points* A *et* B *d'un plan horizontal* H. *La distance* $AB = 2a$. *On coupe le fil en son milieu et l'on attache les deux bouts obtenus à un même point matériel* M. *Quand on amène* M *en* A, *la tension du fil* BM *égale le poids de* M. *En outre, le coefficient de frottement de* M *sur le plan* H *est* 0,2. *Étudier le mouvement de* M, *abandonné en* A, *sans vitesse initiale. Construire le diagramme des espaces.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. LOUVET. — I. 1° La section par le plan $z = h$ a des directions asymptotiques données par $x^4 - hy^4 = 0$; aucune n'est réelle pour $h < 0$. Pour h positif on trouve les directions asymptotiques réelles $x \pm \sqrt[4]{h}\,y = 0$ et les asymptotes correspondantes, obtenues par les procédés ordinaires, sont

$$x \pm \sqrt[4]{h}\left(y + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Elles s'appuient sur la droite $x = 0$, $y = -\frac{1}{4}$ et engendrent donc un conoïde droit dont l'équation est évidemment

$$z = \frac{256 x^4}{(4y+1)^4}.$$

2° On trouve

$$x = 2\sqrt{2}\sin\varphi, \qquad y = \sin\varphi\cos\varphi;$$

$$s = 2\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} = 2\varphi + y;$$

d'où immédiatement

$$\sin(s-y) = \sin 2\varphi = 2y.$$

Le rayon de courbure et l'abscisse du centre de courbure sont respectivement

$$\frac{(12-x^2)^2}{16|x|} \quad \text{et} \quad \frac{48+x^4}{16x}.$$

II. En remplaçant $\sin V$ par $\frac{|\rho|}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}$, l'équation proposée donne

$$\rho'^2 = \rho^2(\rho^2+2\rho),$$

d'où

$$\pm d\omega = \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2+2\rho}} = -d\sqrt{1+\frac{2}{\rho}}$$

et enfin

$$\rho = \frac{2}{(\omega-\omega_0)^2-1};$$

toutes les courbes se déduisent de l'une d'elles, par simple rotation autour du pôle.

III. L'origine étant le milieu de AB, on a l'équation différentielle

$$x'' = -g\frac{x}{a} \mp \frac{g}{5},$$

où l'on doit prendre, devant le dernier terme, le signe opposé à celui de la vitesse. Le mouvement consiste donc en demi-oscillations sinusoïdales, ayant pour centres les points $x = \pm\frac{a}{5}$ qui limitent la région d'équilibre. Dans le cas de l'énoncé, les élongations successives seront $-a$ (point A), $\frac{3a}{5}$, $-\frac{a}{5}$ (où le mobile s'arrête).

Épreuve pratique. — 1° *Construire la courbe* Γ.

$$y = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

2° *Développer en série de puissances de x, l'aire* ABCD = S, *limitée par la courbe* Γ, *l'axe des* x, *et les parallèles* AB *et* CD *à* Oy *d'abscisses* x *et* $-x$.

3° *L'aire* ABCD, *en tournant autour de* Ox, *engendre un volume* V *que l'on développera de même en série.*

4° *Le volume précédent étant rempli d'une matière de densité* UN, *calculer au moyen d'une série, son moment d'inertie* M, *par rapport à* Ox.

5° *Dans le cas où* $x = 1$, *calculer* S, V, M, *à* 10^{-3} *près.*

On donne

$$\pi = 3,141592653,$$

à 10^{-9} *près par défaut.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. LOUVET. — On trouve :

$$S = 2\left[\frac{x}{1.1!} + \frac{x^3}{3.3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots\right];$$

$$V = 2\pi\int_0^x y^2\,dx;$$

$$y^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4x^2} = 2\left[\frac{1}{2!} + \frac{2^2x^2}{4!} + \ldots\right];$$

$$V = 4\pi\left[\frac{x}{1.2!} + \frac{2^2x^3}{3.4!} + \ldots + \frac{2^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)!} + \ldots\right];$$

$$M = 2\pi\left[\frac{2^2(2^2-1)}{1.4!}x + \frac{2^4(2^4-1)}{3.6!}x^3 + \ldots + \frac{2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)}{(2n+1)(2n+4)!}x^{2n+1} + \ldots\right].$$

Pour $x = 1$, on a :

a. En prenant quatre termes de la série,

$$S = 2,114,$$

à un demi-millième près par excès ;

b. En prenant cinq termes de la série,

$$V = 7,040,$$

à un demi-millième près par défaut ;

c. En prenant cinq termes de la série,

$$M = 3,891,$$

à un demi-millième près par défaut.

(Clermont, juin 1922.)