Concours normal d'agrégation de 1920

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 45-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__45_1>

CONCOURS NORMAL D'AGRÉGATION DE 1920.

Composition de calcul différentiel et intégral (Deuxième partie).

SOLUTION PAR M. C.-E. TRAYNARD.

Soient $f(x, y)$ une fonction développable en série de Taylor, au point (x_0, y_0), Δf l'accroissement qu'elle prend quand x, y augmentent respectivement de Δx, Δy à partir des valeurs x_0, y_0 et df sa différentielle

$$f'_{x_0} \Delta x + f'_{y_0} \Delta y$$

au point x_0, y_0.

1° *En supposant que f'_{x_0} et f'_{y_0} ne sont pas nuls, le rapport $\dfrac{\Delta f}{df}$ est en général déterminé. Montrer que sous des conditions très générales il tend vers l'unité quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro.*

(1) Les notations abrégées pour les quotients sont dues à Glaisher.

2° *Peut-il arriver cependant que $\frac{\Delta f}{df}$ ait une limite finie différente de l'unité quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro d'une façon spéciale?*

3° *Cette circonstance n'a-t-elle lieu que pour des fonctions $f(x, y)$ très particulières?*

(*On suppose, bien entendu, dans* 1°, 2°, 3°, *que* Δx, Δy *convergent vers zéro de sorte que le dénominateur du rapport* $\frac{\Delta f}{df}$ *tende vers zéro par valeurs non nulles.*)

Pour simplifier les écritures, j'emploierai les notations de Monge pour les dérivées. La fonction $f(x, y)$ étant développable en série de Taylor, j'ai

$$\Delta f = p\,\Delta x + q\,\Delta y + \frac{r\,\Delta x^2 + 2s\,\Delta x\,\Delta y + t\,\Delta y^2}{2} + \ldots,$$

$$\frac{\Delta f}{df} = 1 + \frac{r\,\Delta x^2 + 2s\,\Delta x\,\Delta y + t\,\Delta y^2}{2(p\,\Delta x + q\,\Delta y)} + \ldots.$$

Il apparaît à première vue que le rapport

$$v = \frac{r\,\Delta x^2 + 2s\,\Delta x\,\Delta y + t\,\Delta y^2}{2(p\,\Delta x + q\,\Delta y)}$$

tend vers zéro dans les conditions de l'énoncé; les coefficients du numérateur en effet sont finis, ceux du dénominateur ne sont pas nuls, soit A un nombre positif supérieur aux premiers, a une borne inférieure, supposée non nulle, de $\frac{2\,|p\,\Delta x + q\,\Delta y|}{|\Delta x| + |\Delta y|}$, la valeur absolue de v est inférieure à $\frac{A}{a}(|\Delta x| + |\Delta y|)$ quantité qui tend vers zéro en même temps que Δx et Δy.

A fortiori, l'ensemble des termes suivant v tend vers zéro et le rapport $\frac{\Delta f}{df}$ tend vers 1, sous la seule condition très générale d'existence de la borne inférieure non nulle a.

Pour aller plus loin, on peut faire le raisonnement suivant.

Je transforme l'expression de v en mettant Δx en facteur

$$v = \Delta x\,\frac{r + 2s\,\frac{\Delta y}{\Delta x} + t\,\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}{2\left(p + q\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$$

et je pose $\frac{\Delta y}{\Delta x} = u$; d'où

$$\Delta x = \frac{2v(p+qu)}{r+2su+tu^2}, \qquad \Delta y = \frac{2uv(p+qu)}{r+2su+tu^2}.$$

On voit sur ces expressions que Δx et Δy peuvent tendre vers zéro de deux façons : quand v tend vers zéro et quand $p+qu$ tend vers zéro.

Le cas de v tendant vers zéro est celui qui a été étudié plus haut; on voit qu'il n'exige aucune condition sur la façon dont Δx et Δy tendent vers zéro. Le cas de $p+qu$ tendant vers zéro a échappé à la précédente analyse; aucune condition n'est imposée à v qui peut tendre vers une limite arbitraire, ce qui s'explique aisément en remarquant que

$$p\,\Delta x + q\,\Delta y = \frac{2v(p+qu)^2}{r+2su+tu^2},$$

c'est-à-dire, si je puis m'exprimer ainsi, que $p\,\Delta x + q\,\Delta y$ est plus nul lorsque $p+qu$ tend vers zéro que lorsque v tend vers zéro [1].

Géométriquement, le cas de v tendant vers zéro est celui du point $x_0+\Delta x$, $y_0+\Delta y$ tendant vers le point x_0, y_0 sur un chemin quelconque; le cas de $p+qu$ tendant vers zéro correspond à un chemin tangent à la droite

$$Z = f(x_0 y_0), \qquad p(X-x_0)+q(Y-y_0)=0.$$

En résumé et pour répondre aux questions posées par l'énoncé :

1° En général et sous les seules conditions de l'énoncé, le rapport $\frac{\Delta f}{df}$ tend vers 1 quand Δx et Δy tendent vers zéro.

2° Ce rapport tend vers toute limite $1+k$ donnée à l'avance lorsque Δx et Δy tendent vers zéro, le point $x_0+\Delta x$, $y_0+\Delta y$ suivant un certain chemin tangent à la droite

$$Z = f(x_0 y_0), \qquad p(X-x_0)+q(Y-y_0)=0$$

et qui dépend de la quantité k.

3° Ces circonstances se présentent pour toutes les fonctions $f(x, y)$.

---

[1] Il est facile de voir que les quantités qui suivent la fraction v ont toujours pour limite zéro.