NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificat de mécanique appliquée

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 414-416

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__414_0>

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Deux poutres rectilignes de section rectangulaire constante, de longueur* λ *et hauteur* $2h$ *sont liées par une articulation cylindrique horizontale* A. *La première poutre* OA *est encastrée horizontalement dans un mur en* O; *la pièce* AC *repose sur un appui fixe* B, *au niveau de l'encastrement* O, *et à une distance* l *de celui-ci.*

Dans ces conditions, on suspend à l'extrémité libre C *une charge de poids* P.

1° *Étant données les dimensions* $OA = a$, $AB = b$, $BC = c \, (a + b = l)$, *déterminer les réactions de l'appui, de l'encastrement et de l'articulation. Construire les diagrammes de l'effort tranchant et de l'effort fléchissant.*

2° *Supposant* h *assez petit pour qu'on puisse négliger l'effort tranchant, évaluer le déplacement de l'articulation et de la charge* P, *ainsi que les inclinaisons des deux poutres à l'articulation.*

3° *Les distances de l'appui et de la charge* P *à l'encastrement sont fixées, mais on peut choisir la position de l'articulation entre* O *et* B. *Où doit-on la placer pour rendre minimum le déplacement du poids* P?

Même question pour que l'inclinaison de la poutre en B *soit minimum.*

Étudier les différentes formes qu'affecte l'ouverture des deux poutres à l'articulation lorsqu'on fait varier la situation de cette articulation.

4° *Lorsqu'on ne peut plus négliger l'effort tranchant, quel terme complémentaire faut-il introduire dans l'expression du déplacement du poids* P?

N. B. — *On néglige le poids propre des poutres et les frottements à l'appui* B *et à l'articulation* A.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Les réactions en A et B sont évidentes : $P\frac{c}{b}$ et $P\left(1 + \frac{c}{b}\right)$. La réaction d'encastrement est $P\frac{c}{b}$, le couple d'encastrement $P\frac{ac}{b}$. Les diagrammes en résultent.

2° Le théorème de Castigliano donne pour les déplacements de A et de C les valeurs

$$\Delta z_A = P \frac{a^3 c}{3 EI b}; \qquad \Delta z_C = -\frac{P}{3 EI} \frac{c^2}{b^2}(b^2 c + a^3 + b^3).$$

Les inclinaisons de OA et de AB en A sont respectivement

$$\alpha_1 = P \frac{a^2 c}{2 EI b}; \qquad \alpha_2 = \frac{Pc}{6 EI b^2}(b^3 + 2a^3).$$

3° L'inclinaison β en B est minimum pour $b = 2a$, en même temps que le déplacement de C. Dans ce cas, la poutre ne présente pas de point anguleux en A.

4° La prise en considération de l'effort tranchant introduit dans Δz_C le terme complémentaire

$$-\frac{3 Pc}{5 \lambda \mu h}\left(\lambda + \frac{lc}{b^2}\right).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère deux tiges cylindriques égales* AB, AC, *liées par un axe horizontal* A *perpendiculaire à leur plan* BAC, *et reposant par leurs extrémités* B *et* C *sur un plan horizontal poli. L'articulation* A *est sans frottement, et l'ouverture* $\widehat{CAB}$ *est égale à* 60°.

En outre, une tige horizontate DE *lie les milieux* D *et* E *des deux branches* AB, AC.

On néglige le poids du système, mais on suspend, au sommet A, *une charge de poids* P.

1° *Vérifier que, pour les données numériques ci-dessous, les limites d'élasticité ne sont pas dépassées;*

2° *Calculer, avec les mêmes données, le fléchissement du sommet* A *et l'écartement des pieds du système.*

Données numériques :

Longueur AB = AC = 2^{m}.

Rayon de la section circulaire de AB *et* AC = 2^{cm}, *de* ED = 2^{mm}.

Poids P : 150^{kg}.

Coefficient d'élasticité longitudinale E *de la matière de tout le système :* 20000 kg/mm².

Résistance maximum R_0 *de cette matière :* 14 kg/mm².

N. B. — *On négligera le rapport des aires de la section de* ED *et de celle des branches* AB, AC.

Indications sur la solution. — 1° La tension de CD est

$$P \tang \alpha \qquad (2\alpha = \widehat{BAC} = 60^\circ).$$

La section de CD (rayon r) est suffisante si

$$P \tang \alpha < \pi r^2 R_0.$$

Le moment fléchissant maximum le long de AB est

$$\frac{1}{2} P l \sin \alpha \qquad (AB = 2l);$$

l'effort tranchant et la compression de AB sont négligeables pour l'établissement de la condition d'équarrissage qui est

$$\frac{1}{2} P l \sin \alpha < R_0 \frac{\pi \rho^3}{4} \qquad (\rho = \text{rayon de la section}).$$

2° Le déplacement horizontal de D est

$$\Delta x_D = \frac{P \tang \alpha}{E \pi r^2} l \sin \alpha.$$

La rotation $\Delta\alpha$ de la tige AB en A en résulte par les formules de déformation des pièces prismatiques

$$\Delta x_D = -\Delta\alpha\, l \cos\alpha + \frac{P \sin\alpha \cos\alpha\, l^3}{12 EI}.$$

De même

$$\Delta z_A = 2 l \Delta\alpha \sin\alpha - \frac{P l^3 \sin^2\alpha}{2 EI} = -2^{mm},5.$$

Enfin, en écrivant que les déplacements relatifs de la barre AB lui sont normaux, on a

$$\Delta x_B = -\Delta z_A \cot\alpha = 4^{mm},3.$$

(Lille, juin 1926.)