Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1926

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 393-406
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__393_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1926.

NOTA. — *a représentera dans tout l'énoncé la mesure d'une longueur donnée.*

1° Ox, Oy *désignant deux axes rectangulaires, la droite représentée par l'équation*

$$(t^2+1)(tx-y)+at(t-h)=0,$$

où l'on considère h comme une constante donnée, et t comme un paramètre variable, enveloppe une courbe que l'on désigne par Γ_h.

Quel est le lieu des points d'où l'on peut mener à Γ_h *deux tangentes rectangulaires?*

Indiquer une construction géométrique de la troisième tangente à Γ_h *issue d'un point du lieu. De cette construction, conclure que* Γ_h *peut être considérée comme l'enveloppe d'une droite* D *définie de la manière suivante : un point* M *décrit un cercle donné de centre* ω, *la droite* D *passe constamment par* M, *et pivote autour de* M, *sa vitesse de rotation étant dans un rapport constant avec celle du rayon* ωM. *Il résulte de cette définition que les courbes* Γ_h *correspondant aux diverses valeurs de h sont semblables. Quelle est la valeur du rapport de similitude de la courbe* Γ_h *et de la courbe* Γ_0 *(correspondant à la valeur zéro du nombre h)?*

Construire Γ_0.

2° Oz *désignant un axe perpendiculaire à* Ox, Oy, *on désigne par* Γ'_h *la courbe du plan* $z=ah$ *qui a pour projection orthogonale sur le plan* xOy *la courbe* Γ_h, *et par* S *la surface engendrée par* Γ'_h *quand h varie.*

Montrer que S *peut aussi être regardée comme engendrée par une droite* G.

Montrer que sur chaque génératrice rectiligne G *de* S *il existe un point* R *et un seul qui est point de rebroussement pour la courbe* Γ'_h *qui y passe.*

Le lieu (A) *de* R *lorsque* G *varie peut être représenté par les expressions*

$$x = \frac{a}{t(t^2-3)}, \qquad y = \frac{at^2}{t^2-3}, \qquad z = \frac{a(1-3t^2)}{t(t^2-3)}.$$

3° *Calculer l'aire intérieure à* Γ_0 *et le volume limité par la surface* S *et les deux plans* $z = 0$, $z = a$.

4° *Étant donnés trois nombres* t_1, t_2, t_3, *former l'équation du plan qui contient les points de* (A) *correspondant aux valeurs* t_1, t_2, t_3 *du paramètre* t. *Quelle est l'équation du plan osculateur à* (A) *au point correspondant à la valeur* t_0 *du paramètre* t?

Par un point quelconque donné P (*coordonnées* ξ, η, ζ), *on peut mener trois plans osculateurs à* (A). *Former l'équation du plan* π *contenant les trois points de contact, et montrer que ce plan passe par* P.

Où doit être situé P *pour que le plan* π *soit parallèle au plan* xOy? *Montrer que dans ce cas les points de contact sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre* P. *Quelle est dans ce cas la nature de la surface engendrée par le cercle circonscrit à ce triangle?*

5° h *désignant de nouveau une constante donnée, on considère dans le plan* xOy *les coniques*

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\lambda^2} + \frac{y^2}{\beta^2+\lambda^2} = 1,$$

où α^2, β^2 *sont des constantes différentes données, et* λ^2 *un paramètre. A une droite* d *du plan correspond en général une droite* d' *et une seule qui soit conjuguée de* d *par rapport à toutes ces coniques. Quelle est l'enveloppe de* d' *lorsque* d *enveloppe* Γ_h?

6° h *désignant encore une constante donnée, soient* M_1, M_2, M_3 *les points où une tangente mobile à* Γ_h *rencontre* Ox, Oy *et une tangente* T *à* Γ_h (*distincte de* Ox, Oy, *fixe, arbitrairement choisie, sur laquelle on choisit un sens positif*);

soient A_1, A_2, A_3 *trois points fixes arbitrairement choisis sur* Ox, Oy, T.

Montrer qu'il y a entre les valeurs algébriques des segments A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 *une relation de la forme*

$$k_1.\overline{A_1M_1}+k_2.\overline{A_2M_2}+k_3.\overline{A_3M_3}+k=0,$$

où k_1, k_2, k_3, k *sont des constantes.*

Solution par M. J. Lemaire.

I. La droite (D) représentée par l'équation

$$(1)\qquad (t^2+1)(tx-y)+at(t-h)=0$$

ayant pour coefficient angulaire t, il existe une telle droite, et une seule, ayant une direction donnée ; comme cette équation est du troisième degré en t, l'enveloppe Γ_h de la droite est une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini. En identifiant l'équation (1) avec l'équation

$$ux+vy+w=0$$

et éliminant t, nous obtenons

$$w(u^2+v^2)+auv(u+hv)=0,$$

équation tangentielle d'une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques : Γ_h est donc une *hypocycloïde à trois rebroussements.*

Tirant x et y du système

$$\begin{cases} t(t^2+1)x-(t^2+1)y=-at(t-h), \\ (3t^2+1)x-\qquad 2ty=-2at+ah, \end{cases}$$

formé par l'équation (1) et l'équation dérivée par rapport à t, nous obtenons

$$(2)\qquad \begin{cases} x=a\dfrac{(1-t^2)h-2t}{(t^2+1)^2}, \\ y=a\dfrac{-2t^3h+t^2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}; \end{cases}$$

ce sont les équations paramétriques de Γ_h, courbe unicursale du quatrième ordre.

Par un point (x, y) passent trois droites (D) dont les coefficients angulaires sont les racines en t de l'équation (1), laquelle peut s'écrire

$$xt^3 - (y - a)t^2 + (x - ah)t - y = 0;$$

le produit des racines étant $\frac{y}{x}$, pour que deux des droites soient rectangulaires, il faut et il suffit que $\left(-\frac{y}{x}\right)$ soit racine; en écrivant cette condition, nous obtenons

$$(C_h) \qquad 2(x^2 + y^2) - a(y + hx) = 0.$$

On voit que le lieu des points d'où l'on peut mener à Γ_h deux tangentes rectangulaires est un cercle passant par l'origine O, par le point A $\left(\frac{ah}{2}, 0\right)$ variable avec h, et par le point fixe B $\left(0, \frac{a}{2}\right)$; son centre est le point ω $\left(\frac{ah}{4}, \frac{a}{4}\right)$, et son rayon a pour expression

$$\rho = \frac{a}{4}\sqrt{h^2 + 1}.$$

$M(x, y)$ étant un point quelconque du cercle, la tangente D à Γ_h, autre que les tangentes rectangulaires issues de ce point, a pour coefficient angulaire $\left(-\frac{y}{x}\right)$, c'est-à-dire le coefficient angulaire de OM changé de signe; par suite OM et D tournent respectivement autour de O et M avec des vitesses opposées; autrement dit, si M′ est le second point commun à D et au cercle, les arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{OM'}$, comptés en sens contraires, sont dans le rapport $\frac{1}{2}$; on reconnaît la génération tangentielle d'une hypocycloïde à trois rebroussements tritangente au cercle (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 49). La vitesse angulaire de ωM, qui tourne autour de ω, est double de celle de OM, dans le rapport (-2) avec celle de D.

Toutes les H_3 (cette notation désignant une hypocycloïde à trois rebroussements quelconque) sont semblables, puisqu'une telle courbe ne dépend en grandeur que du rayon du cercle qui lui est tritangent; en particulier, Γ_h et Γ_0 sont semblables; les rayons ρ et ρ_0 de leurs cercles tritangents étant $\frac{a}{4}\sqrt{h^2 + 1}$ et $\frac{a}{4}$, le rapport de similitude de Γ_h à Γ_0 est $\sqrt{h^2 + 1}$.

Le cercle C_0 de l'hypocycloïde Γ_0 a OB pour diamètre; Γ_0 est tangente à ce cercle en O et en deux autres points formant avec O un triangle équilatéral; le point symétrique de O par rapport à B est un point de rebroussement.

Γ_h est aussi facile à construire, l'un des points où elle touche le cercle C_h est au tiers de l'arc OA à partir de A; en donnant à t les valeurs zéro et ∞, on voit, à l'aide de l'équation (1) et des formules (2), que Ox et Oy sont tangentes à Γ_h aux points A′ et B′ symétriques de O par rapport à A et B; on s'assurerait aisément que la courbe est tangente aussi à A′B′ et à la perpendiculaire menée de O à AB, et l'on trouverait les points de contact. Tout cela résulte d'ailleurs immédiatement des propriétés élémentaires de l'hypocycloïde à trois rebroussements; rappelons simplement que la droite D touche son enveloppe au point symétrique de M′ par rapport à M.

II. La surface S engendrée par Γ_h quand h varie a pour équations paramétriques

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{aligned} x &= a\,\frac{(1-t^2)h-2t}{(t^2+1)^2},\\ y &= at^2\,\frac{-2th+t^2-1}{(t^2+1)^2},\\ z &= ah; \end{aligned}\right.$$

c'est une surface unicursale du quatrième ordre, et comme ces équations, pour une valeur déterminée de t, représentent une droite G, la surface est réglée; les lignes coordonnées sont ces génératrices, et les H_3 correspondant aux diverses valeurs de h, et situées dans les plans parallèles au plan xOy.

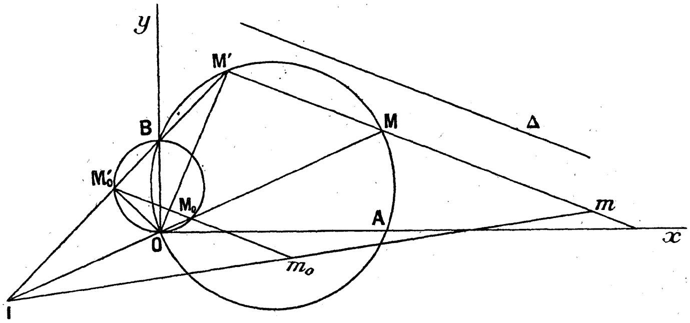
Nous allons montrer que S est *développable* et trouver son arête de rebroussement; les notations étant les mêmes que plus haut, considérons dans le plan xOy la courbe Γ_h et les cercles C_h et C_0, ainsi que la tangente D à Γ_h qui est parallèle à une direction fixe donnée Δ; le point de contact de D est le point m symétrique de M′ par rapport à M; appelant α l'angle $(\widehat{OM, Ox})$, nous avons

$$\widehat{y\mathrm{BM}'} = \widehat{\mathrm{OMM}'} = 2\alpha;$$

si donc h varie, et par suite aussi Γ_h, la droite BM′ reste fixe;

comme il en est de même de OM, *le lieu de m est une droite* qu'on détermine aisément à l'aide du cercle C_0; I étant le point commun aux droites OM_0M et BM'_0M', et m_0 le point symétrique de M'_0 par rapport à M_0; cette droite est Im_0.

Fig. 1.



Si nous observons que, quand h varie, l'hypocycloïde Γ_h reste tangente a Ox en un point variable A', et à Oy au point fixe B', nous voyons que le résultat ci-dessus est un cas particulier de ce théorème : *le lieu géométrique du point de contact d'une* H_3 *inscrite à un triangle avec une tangente de direction fixe est une droite* (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 115).

Appelons Γ'_h la courbe H_3 du plan $z = ah$, qui se projette suivant Γ_h sur le plan xOy, m_1 le point de Γ'_h qui se projette en m, et montrons que $\frac{m_1 m}{m_0 m}$ reste constant quand h varie; les triangles OBM' et OBM'_0 donnent

$$\frac{OM'}{OM'_0} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

et par suite,

$$\overline{M'M_0}^2 = \overline{OM'}^2 - \overline{OM'_0}^2 = \overline{OM'_0}^2\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2} - 1\right) = \overline{OM'_0}^2 . h^2,$$

d'où, en supposant $h > 0$ par exemple,

$$M'M_0 = OM'_0 . h,$$

et

$$\frac{m_1 m}{m_0 m} = \frac{ah}{M'_0 M'}\,\frac{M'_0 M'}{m_0 m} = \frac{a}{OM'_0}\,\text{const} = \text{const};$$

il résulte de là que le lieu de m_1 est une droite perçant le plan xOy

en m_0 sur Γ_0 : si t désigne le coefficient angulaire invariable de Δ, la droite précédente n'est autre que la génératrice G obtenue plus haut.

Les tangentes aux hypocycloïdes Γ'_h aux points m_1 de G étant parallèles, en ces divers points la surface S a le même plan tangent, c'est donc une *surface développable.*

Montrons que sur la génératrice G il existe un point R, et un seul, qui est un rebroussement pour l'hypocycloïde horizontale qui y passe ; pour que m_1 soit un point de rebroussement de Γ'_h, et par suite m un point de rebroussement de Γ_h, il faut et il suffit que MM' soit un diamètre pour le cercle C_h, d'où la construction suivante de R : menons en O la perpendiculaire à IOM_0 qui coupe IM'_0B en Q', et traçons le cercle OQ'B, et le diamètre Q'Q de ce cercle, lequel a la direction Δ ; l'hypocycloïde Γ_h relative à ce cercle a un rebroussement au point q symétrique de Q' par rapport à Q, l'hypocycloïde Γ'_h correspondante a un rebroussement R au point qui se projette en q sur le plan xOy ; ce point R appartient à la génératrice G, sur laquelle n'existe évidemment aucun autre point analogue.

C'est le point où G touche l'*arête de rebroussement de* S, qui n'est autre que le lieu des points de rebroussement des hypocycloïdes Γ'_h.

Cherchons les équations de cette courbe (A) : en désignant par ω l'angle $(\widehat{OQ, Ox})$, on trouve aisément que les coordonnées des points Q et Q' sont

$$(Q)\left\{\begin{array}{l}2\rho\cos\omega\cos2\omega,\\ 2\rho\sin\omega\cos2\omega,\end{array}\right.$$

$$(Q')\left\{\begin{array}{l}-2\rho\sin\omega\sin2\omega,\\ 2\rho\cos\omega\sin2\omega,\end{array}\right.$$

ρ étant le rayon du cercle OQQ'; un calcul simple permet d'en déduire celles de q,

$$(q)\qquad 4\rho\cos^3\omega,\quad -4\rho\sin^3\omega;$$

comme, d'autre part,

$$2\rho = \frac{OB}{\sin3\omega} = \frac{a}{2\sin3\omega},$$

on a finalement, pour les coordonnées de R,

$$(\mathrm{R})\qquad \frac{a\cos^3\omega}{\sin 3\omega},\quad -\frac{a\sin^3\omega}{\sin 3\omega},\quad ah;$$

t et ω ayant toujours la même signification, de sorte que

$$t = -\operatorname{tang}\omega,$$

les deux premières de ces coordonnées s'écrivent

$$x = \frac{a\cos^3\omega}{3\sin\omega\cos^2\omega - \sin^3\omega} = \frac{a}{3\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}^3\omega} = \frac{a}{t(t^2-3)},$$

$$y = -\frac{a\sin^3\omega}{3\sin\omega\cos^2\omega - \sin^3\omega} = -\frac{a\operatorname{tang}^3\omega}{3\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}^3\omega} = \frac{at^2}{t^2-3};$$

pour avoir la troisième, remarquons que

$$\rho \quad \text{ou} \quad \frac{a}{4\sin 3\omega} = \frac{a}{4}\sqrt{h^2+1},$$

d'où

$$h = \frac{1}{\operatorname{tang}3\omega} = \frac{1-3\operatorname{tang}^2\omega}{3\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}^3\omega} = \frac{1-3t^2}{t^3-3t};$$

on a donc enfin les expressions suivantes pour les coordonnées de R :

$$(\mathrm{R})\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a}{t(t^2-3)},\\ y &= \frac{at^2}{t^2-3},\\ z &= \frac{a(1-3t^2)}{t(t^2-3)}.\end{aligned}\right.$$

Ces équations représentent l'arête de rebroussement (A) de la surface S; les génératrices G de la surface sont les tangentes à cette courbe, qui est une cubique gauche admettant pour axe de symétrie la droite OB qu'elle coupe à angle droit au point B$'(0, a, 0)$. Un calcul fort simple permet de s'assurer que les traces des tangentes à (A) sur le plan $z = ah$ forment une courbe dont les équations sont

$$\mathrm{X} = \frac{a}{(t^2+1)^2}[(1-t^2)h - 2t],$$

$$\mathrm{Y} = \frac{at^2}{(t^2+1)^2}[-2ht + (t^2-1)],$$

qui ne diffèrent pas de (2); cette courbe est donc Γ'_h. Les traces de la cubique (A) sur tout plan parallèle au plan xOy sont les sommets d'un triangle équilatéral.

III. Nous reportant à la génération de l'hypocycloïde Γ_0, considérons sur le cercle C_0 deux points infiniment voisins M et N, et les points M' et N' tels que les arcs AM et AM', AN et AN' soient de sens contraires et dans le rapport $\frac{1}{2}$; μ désignant le point commun aux droites MM' et NN', m sa position limite quand N vient coïncider avec M, le lieu de m est la courbe Γ_0. Il suffit d'observer que le rapport $\frac{\text{aire } \mu MN}{\text{aire } \mu M'N'}$ est égal à $\frac{1}{4}$, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, pour obtenir l'expression $2\pi r^2$ pour l'aire de Γ_0, r désignant le rayon du cercle.

L'aire intérieure à Γ'_h est, par suite, $2\pi\rho^2$ ou $\frac{\pi a^2}{8}(h^2+1)$, d'où il résulte que le volume limité par la surface S et les plans $z=0$ et $z=a$ est donné par

$$V = \int_0^1 \frac{\pi a^2}{8}(h^2+1)\, a\, dh = \frac{\pi a^3}{6}.$$

IV. Il est aisé d'écrire l'équation du plan qui contient les points de (A) correspondant aux valeurs t_1, t_2, t_3 du paramètre t, et d'en déduire l'équation du plan osculateur à (A) au point correspondant à la valeur t_0 du paramètre; mais nous éviterons ce calcul un peu long en observant que si R est le point de (A) correspondant au paramètre t_0, et G la génératrice de S tangente en ce point à la courbe, le plan osculateur en R est déterminé par G et par la tangente T_0 à Γ_0 au point m_0 trace de G sur le plan xOy. Reprenant les notations employées plus haut, désignons par ω l'angle $\widehat{M_0Ox}$, les coordonnées de M_0 sont

$$\frac{a}{2}\sin\omega\cos\omega, \qquad \frac{a}{2}\sin^2\omega,$$

le coefficient angulaire de T_0 est $(-\operatorname{tang}\omega)$, et l'équation de cette droite

$$y - \frac{a}{2}\sin^2\omega = -\operatorname{tang}\omega\left(x - \frac{a}{2}\sin\omega\cos\omega\right)$$

ou

$$y = -x\operatorname{tang}\omega + a\sin^2\omega;$$

l'équation du plan osculateur en R à la courbe (A) est de la forme

$$x \operatorname{tang}\omega + y - a \sin^2\omega + kz = 0,$$

et si l'on écrit que le point R $\left(\dfrac{a\cos^3\omega}{\sin 3\omega}, -\dfrac{a\sin^3\omega}{\sin 3\omega}, \dfrac{a\cos 3\omega}{\sin 3\omega}\right)$ appartient à ce plan, la condition obtenue conduit à cette valeur de k,

$$k = -\sin\omega\cos\omega.$$

L'équation du plan osculateur prend ainsi la forme

$$x \operatorname{tang}\omega + y - z\sin\omega\cos\omega - a\sin^2\omega = 0\,;$$

comme $\operatorname{tang}\omega = -t_0$, cette équation devient finalement

$$t_0(t_0^2+1)x - (t_0^2+1)y - t_0 z + a t_0^2 = 0.$$

Cette équation du plan osculateur pouvait être écrite immédiatement en remplaçant dans l'équation (1) ah par z, puisque le plan représenté par la nouvelle équation ainsi obtenue

$$(t^2+1)(tx-y) - tz + at^2 = 0$$

est coupé par les plans parallèles au plan xOy suivant des tangentes aux H_3 correspondantes, parallèles entre elles, et dont les points de contact sont précisément les points de la génératrice G de (S) qui correspond à la valeur t du paramètre.

Les paramètres des points de (A) pour lesquels les plans osculateurs passent par un point donné $P(\xi, \eta, \zeta)$ sont les valeurs de t déterminées par

$$t(t^2+1)\xi - (t^2+1)\eta - t\zeta + at^2 = 0$$

ou

$$\xi t^3 - (\eta - a)t^2 + (\xi - \zeta)t - \eta = 0\,;$$

donc par P passent trois plans osculateurs à la courbe (A).

Si un plan a pour équation

$$Ax + By + Cz + 1 = 0,$$

l'équation aux t des points de (A) qui appartiennent à ce plan est

$$\frac{Aa}{t(t^2-3)} + \frac{Bat^2}{t^2-3} + \frac{Ca(1-3t^2)}{t(t^2-3)} + 1 = 0$$

ou

$$(Ba+1)t^3 - 3Cat^2 - 3t + (A+C)a = 0\,;$$

identifions cette équation et l'équation en t ci-dessus, nous avons

$$\frac{Ba+1}{\xi} = \frac{3Ca}{\eta - a} = \frac{3}{\zeta - \xi} = \frac{-(A+C)a}{\eta},$$

relations qui donnent

$$A = \frac{a - 4\eta}{a(\zeta - \xi)}, \qquad B = \frac{4\xi - \zeta}{a(\zeta - \xi)}, \qquad C = \frac{\eta - a}{a(\zeta - \xi)};$$

par suite, le plan des trois points pour lesquels le plan osculateur à (A) passe en P a pour équation

$$(\pi) \qquad (a - 4\eta)x + (4\xi - \zeta)y + (\eta - a)z + (\zeta - \xi)a = 0,$$

on vérifie qu'il contient le point P ; c'est d'ailleurs une propriété bien connue des cubiques gauches.

Pour que le plan (π) soit parallèle au plan xOy, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} a - 4\eta = 0, \\ 4\xi - \zeta = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que le point P appartienne à la droite

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{4}, \\ z = 4x, \end{cases}$$

lieu du centre du cercle C'_h quand h varie, en désignant par C'_h le cercle, projeté suivant C_h, qui est tritangent à l'hypocycloïde Γ'_h. Les points pour lesquels les plans osculateurs passent en P sont, dans le cas actuel, les points de rebroussement de l'hypocycloïde Γ'_h située dans le plan $z = \zeta$; les traces sur ce plan des plans osculateurs sont les tangentes de rebroussement de Γ'_h, lesquelles concourent au centre de C'_h.

Quand h varie, ce cercle se déplace et se déforme en s'appuyant sur Oz, sur la parallèle à Oz menée par B, et sur la droite $y = 0$, $z = 2x$; son plan restant d'ailleurs parallèle au plan xOy, il engendre un hyperboloïde à une nappe dont on aurait sans peine l'équation, et qui a des génératrices perpendiculaires aux plans de ses sections circulaires. Les points de rebroussement de Γ'_h, qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, appartiennent à un cercle dont le rayon est le triple du rayon de C'_h ; le lieu de ce nouveau cercle dérive, par une homographie immédiate, de l'hyperboloïde précédent; nous ne nous arrêterons pas à établir son équation.

V. Supposons, pour fixer les idées, $\alpha > \beta$, et soit $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, l'équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\lambda^2} + \frac{y^2}{\beta^2+\lambda^2} = 1,$$

où α et β sont des constantes données, et λ un paramètre, représente une famille de coniques ayant pour foyers les points F et F′ de Ox qui ont $\pm\gamma$ pour abscisses; à une droite (d) du plan correspond une droite (d'), et une seule, conjuguée de (d) par rapport à toutes ces coniques; cette droite (d') est perpendiculaire à (d) et coupe Ox en un point D′ conjugué harmonique, par rapport à F et F′, du point D où (d) coupe le même axe; la question est la suivante : (d) enveloppe Γ_h, trouver l'enveloppe de (d').

L'équation de (d) étant

$$(t^2+1)(tx-y) + at(t-h) = 0,$$

on a

$$\overline{OD} = -\frac{a(t-h)}{t^2+1},$$

$$\overline{OD'} = -\frac{\gamma^2(t^2+1)}{a(t-h)},$$

d'où, pour (d'), l'équation suivante

$$y = -\frac{1}{t}\left(x + \frac{\gamma^2(t^2+1)}{a(t-h)}\right),$$

qu'on peut écrire

$$(ay+\gamma^2)t^2 + a(x-hy)t + (\gamma^2 - ahx) = 0;$$

l'enveloppe de cette droite, représentée par

$$a^2(x-hy)^2 - 4(ay+\gamma^2)(\gamma^2-ahx) = 0$$

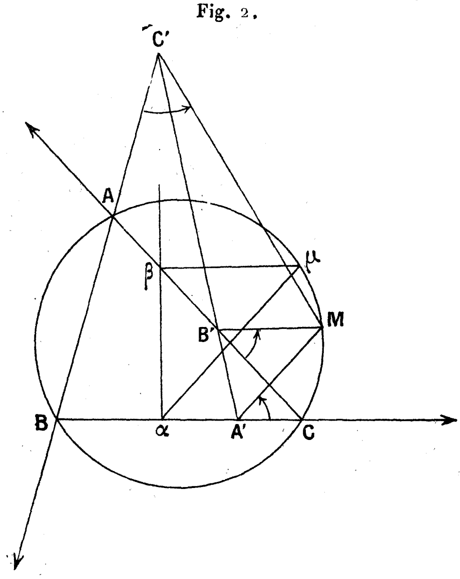
ou

$$a^2(x+hy)^2 - 4\gamma^2[a(y-hx)+\gamma^2] = 0,$$

est une parabole qui a pour axe la parallèle menée par l'origine au diamètre AB déterminé sur le cercle C_h par les axes de coordonnées. Des considérations géométriques simples permettraient d'établir ces résultats et de construire quelques tangentes de cette parabole, par exemple celles qui sont perpendiculaires aux tangentes de rebroussement de Γ_h, ou aux axes de coordonnées.

VI. Considérons un triangle ABC formé par trois tangentes à l'hypocycloïde Γ_k coupées en A', B' C' par une quatrième tangente; ces quatre tangentes fixes déterminent l'hypocycloïde (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 70) : les cercles AB'C', BC'A', CA'B' ont un point commun M qui appartient aussi au cercle ABC; les côtés BC, CA, AB doivent tourner d'un même angle, dans le même sens, autour de A', B', C' pour venir coïncider avec A'M, B'M, C'M; et si, d'un point quelconque μ du cercle ABC, on mène aux droites MA', MB', MC' des parallèles qui rencontrent en α, β, γ

Fig. 2.



les côtés correspondants, ces derniers points sont sur une droite dont l'enveloppe, quand μ varie, est l'hypocycloïde.

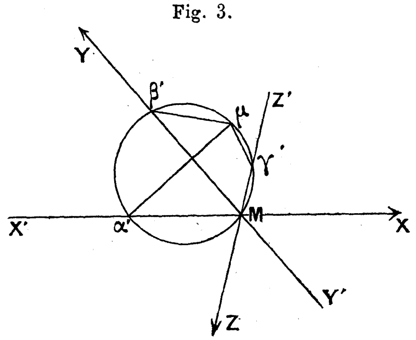
Ceci posé, a, b, c désignant les longueurs des côtés du triangle ABC, et ces côtés $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ étant supposés orientés, nous allons démontrer que

$$a.\overline{A'\alpha} + b.\overline{B'\beta} + c.\overline{C'\gamma} = 0,$$

lorsque, les quatre premières tangentes restant fixes, la cinquième $\alpha\beta\gamma$ varie.

Menons par M les droites dirigées $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$ parallèles aux côtés BC, CA, AB du triangle ABC et de mêmes sens positifs qu'eux,

Fig. 3.



et soient α', β', γ' les points où ces axes sont rencontrés par $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ respectivement, de sorte que $\overline{M\alpha'}$, $\overline{M\beta'}$, $\overline{M\gamma'}$ sont égaux à $\overline{A'\alpha}$, $\overline{B'\beta}$, $\overline{C'\gamma}$; l'angle $\widehat{MX, \alpha'\mu}$ et les deux angles analogues étant égaux, les points M, μ, α', β', γ' sont sur un cercle, et la figure donne, en appliquant le théorème de Ptolémée au quadrilatère $M\alpha'\beta'\gamma'$,

$$M\alpha'.\beta'\gamma' + M\gamma'.\alpha'\beta' = M\beta'.\gamma'\alpha',$$

ou, en introduisant les valeurs algébriques des segments portés par les axes issus de M,

$$\overline{M\alpha'}.\beta'\gamma' + \overline{M\beta'}.\gamma'\alpha' + \overline{M\gamma'}.\alpha'\beta' = 0,$$

ou encore, en appelant ρ le rayon du cercle $\alpha'\beta'\gamma'$,

$$\overline{M\alpha'}.2\rho\sin A + \overline{M\beta'}.2\rho\sin B + \overline{M\gamma'}.2\rho\sin C = 0,$$

d'où

$$\overline{A'\alpha}.\sin A + \overline{B'\beta}.\sin B + \overline{C'\gamma}.\sin C = 0,$$

et finalement

$$a.\overline{A'\alpha} + b.\overline{B'\beta} + c.\overline{C'\gamma} = 0;$$

cette égalité généralise, en la précisant, la relation demandée.