NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. THÉBAULT

# Sur un théorème de Steiner

*Nouvelles annales de mathématiques 6e série*, tome 1 (1925), p. 386-390
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__386_1>

# SUR UN THÉORÈME DE STEINER;

PAR V. THÉBAULT,
Inspecteur d'assurances, au Mans.

Dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1922, p. 128-134, nous avons donné des développements assez curieux relativement à des groupes de cercles et de sphères. Ces recherches nous avaient été suggérées par des configurations envisagées par Steiner.

La lecture d'années déjà anciennes des *Nouvelles Annales* nous y a fait rencontrer un cas particulier, signalé dans notre Mémoire de 1922, question 2103, 1908, p. 479.

Qu'il nous soit permis de reprendre ici, en les complétant parfois, certains passages qui généralisent une question proposée aux lecteurs des *Nouvelles Annales*.

1. Steiner a énoncé le théorème suivant (*Journal de Crelle*, t. II, p. 92) :

*Sur les perpendiculaires abaissées d'un point sur les faces d'un tétraèdre* ABCD, *on marque un quadruple de points* A′, B′, C′, D′, *puis un second quadruple* A″, B″, C″, D″. *Si* O *est le point de concours des perpendiculaires abaissées de* A, B, C, D *sur les plans des faces* B′C′D′, C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′, *et* O′ *celui d'intersection des perpendiculaires abaissées de* A, B, C, D *sur* B″C″D″, C″D″A″, D″A″B″, A″B″C″, *la droite* OO′ *est normale au plan d'homologie des tétraèdres* A′B′C′D′ *et* A″B″C″D″ (¹).

Voici la démonstration simple de M. Neuberg.

Des sommets du tétraèdre ABCD, comme centres, décrivons quatre sphères quelconques, et de leur centre radical S abaissons les perpendiculaires $p_a$, $p_b$, $p_c$, $p_d$ sur les faces BCD, CDA, DAB, ABC. Ces droites sont les axes radicaux des triples de sphères (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C).

Soient A′, B′, C′, D′ quatre points quelconques de ces axes. A′, B′, C′, D′ sont les centres de quatre sphères respectivement orthogonales aux sphères (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C). La sphère A coupant orthogonalement les sphères (B′, C′, D′), son centre est situé sur l'axe radical de ces dernières sphères ; de même B, C, D appartiennent respectivement aux axes radicaux des groupes de sphères (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C).

On en conclut que les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, D respectivement sur les plans des faces du tétraèdre A′B′C′D′, concourent en un point S′, centre radical des sphères

(¹) En réalité, Steiner a énoncé trois théorèmes analogues : l'un relatif au triangle plan, l'autre au tétraèdre et le troisième au triangle sphérique. Le premier a été démontré pour la première fois par Félix Eberty (*Journal de Crelle*, t. V, p. 107), le second par M. J. Neuberg (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1921, p. 228). Le troisième, à notre connaissance du moins, reste à démontrer. (V. T.)

$A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Les points S, $S'$ sont par suite les *centres d'orthologie* des tétraèdres ($A'B'C'D'$, ABCD) et (ABCD, $A'B'C'D'$).

Prenons sur les droites $p_a$, $p_b$, $p_c$, $p_d$ un second quadruple de points $A''$, $B''$, $C''$, $D''$, desquels, comme centres, nous décrivons des sphères coupant orthogonalement les triples de sphères (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C). Soit $S''$ le centre d'orthologie des tétraèdres ABCD et $A''B''C''D''$. Les points $S'$, $S''$ sont les centres de deux sphères coupant orthogonalement, l'une les sphères $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, l'autre les sphères $A''$, $B''$, $C''$, $D''$. Les sphères $B'$, $C'$, $D'$ sont orthogonales aux sphères A et $S'$; donc le plan $B'C'D'$ est le plan radical des sphères A et $S'$. De même le plan $B''C''D''$ est le plan radical des sphères A et $S''$. Par suite, l'intersection des plans $B'C'D'$, $B''C''D''$ appartient au plan radical des sphères $S'$, $S''$. En continuant ainsi, on constate que ce dernier plan contient toutes les intersections de deux faces homologues des tétraèdres $A'B'C'D'$ et $A''B''C''D''$. Autrement dit, *le plan d'homologie de ces tétraèdres est normal à la droite qui joint les centres d'orthologie des tétraèdres* (ABCD, $A'B'C'D'$) *et* (ABCD, $A''B''C''D''$).

2. Soient $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ et $\alpha'_1$, $\alpha'_2$, $\alpha'_3$, $\alpha'_4$ les projections orthogonales de $S'$, $S''$ sur les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre. La droite $S'A$, par exemple, est perpendiculaire au plan $B'C'D'$. Mais $S'A$ est un diamètre de la sphère $S'\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, et, comme les trièdres ($S'$, $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$) et (S, $B'C'D'$) ont leurs arêtes parallèles respectivement, le plan $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ est antiparallèle à $B'C'D'$ par rapport au trièdre (S, $B'C'D'$). De même les plans $\alpha_3\alpha_4\alpha_1$, ..., $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ sont antiparallèles aux plans $C'D'A'$, ..., $A'B'C'$ par rapport aux trièdres de sommet S qui leur correspondent.

Le tétraèdre $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ est donc homothétique à un tétraèdre $a'b'c'd'$, dont les sommets, situés sur $SA'$, $SB'$, $SC'$, $SD'$, sont les inverses de $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ dans une inversion de centre S et de module quelconque $k^2$. Pareillement, le tétraèdre $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4$ est homothétique à un tétraèdre $a''b''c''d''$ obtenu par inversion des points $A''$, $B''$, $C''$, $D''$, le centre étant S et le module $k'^2$.

Remarquons aussi que les points $S'$ et S, $S''$ et S sont des couples de points homologues dans les homothéties

$$(a'b'c'd', \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) \quad \text{et} \quad (a''b''c''d'', \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4),$$

car ces points sont les concours de parallèles issues de points homologues. Par suite,

$$\frac{\overline{S'\alpha_1}}{\overline{S a'}} = \frac{\overline{\alpha_1 \alpha_2}}{\overline{a'b'}} = m, \qquad \frac{\overline{S''\alpha'_1}}{\overline{S \alpha''}} = \frac{\overline{\alpha'_1 \alpha'_2}}{\overline{a''b''}} = m',$$

$$\overline{S'\alpha_1}.\overline{S''\alpha'_1} = mm'.\overline{S a'}.\overline{S a''} = \frac{mm' k^2 k'_2}{\overline{SA'}.\overline{SA''}};$$

si bien que

$$\begin{aligned}(\overline{SA'}.\overline{SA''}).(\overline{S'\alpha_1}.\overline{S''\alpha'_1}) &= (\overline{SB'}.\overline{SB''}).(\overline{S'\alpha_2}.\overline{S''\alpha'_2}) \\ &= (\overline{SC'}.\overline{SC''}).(\overline{S'\alpha_3}.\overline{S''\alpha'_3}) \\ &= (\overline{SD'}.\overline{SD''}).(\overline{S'\alpha_4}.\overline{S''\alpha'_4}),\end{aligned}$$

relation remarquable entre les produits des distances des points S′ et S″ aux plans des faces du tétraèdre ABCD et du point S aux sommets des tétraèdres A′B′C′D′ et A″B″C″D″.

3. Cette égalité est particulièrement curieuse lorsque

$$\overline{SA'}.\overline{SA''} = \overline{SB'}.\overline{SB''} = \overline{SC'}.\overline{SC''} = \overline{SD'}.\overline{SD''},$$

c'est-à-dire quand les points A′ et A″, B′ et B″, C′ et C″, D′ et D″ se correspondent dans une inversion de centre S. Alors

$$\overline{S'\alpha_1}.\overline{S''\alpha'_1} = \overline{S'\alpha_2}.\overline{S''\alpha'_2} = \overline{S'\alpha_3}.\overline{S''\alpha'_3} = \overline{S'\alpha_4}.\overline{S''\alpha'_4}.$$

S′ *et* S″ *sont alors conjugués isogonaux par rapport au tétraèdre* ABCD, *c'est-à-dire les foyers d'une quadrique de révolution inscrite à ce tétraèdre. Cette quadrique est un paraboloïde lorsque* S′, *par exemple, appartient à la surface du troisième ordre lieu des points dont les projections orthogonales sur les faces du tétraèdre* ABCD *sont situées dans un même plan.*

4. Si les quatre sphères de centres A, B, C, D se coupent trois à trois en des points A′, B′, C′, D′ et A″, B″, C″, D″, nous retrouvons ce théorème que nous avons donné en 1921 (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, p. 239) :

*Quatre sphères décrites des points* A, B, C, D *non situés dans un même plan, comme centres, se coupent trois à trois* *aux points* ($A'$, $A''$), ($B'$, $B''$), ($C'$, $C''$), ($D'$, $D''$). *Ces points peuvent être répartis en les huit groupes de quatre points :*

| | | |
|---|---|---|
| $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ | et | $A''$, $B''$, $C''$, $D''$, |
| $A''$, $B'$, $C'$, $D'$ | et | $A'$, $B''$, $C''$, $D''$, |
| $B''$, $C'$, $D'$, $A'$ | et | $B'$, $C''$, $D''$, $A''$, |
| $C''$, $D'$, $A'$, $B'$ | et | $C'$, $D''$, $A''$, $B''$, |
| $D''$, $A'$, $B'$, $C'$ | et | $D'$, $A''$, $B''$, $C''$, |
| $A'$, $B'$, $C''$, $D''$ | et | $A''$, $B''$, $C'$, $D'$, |
| $B'$, $C'$, $D''$, $A''$ | et | $B''$, $C''$, $D'$, $A'$, |
| $C'$, $D''$, $A'$, $B''$ | et | $C''$, $D''$, $A'$, $B'$. |

*Les centres* $\omega$, $\omega'$ *des deux sphères passant par des quadruples d'un même groupe sont conjugués isogonaux par rapport au tétraèdre* ABCD *et sont collinéaires avec le centre radical* S *des sphères* A, B, C, D. *Les quadruples de points considérés déterminent quatre groupes de deux tétraèdres homologiques.* S *est un centre de similitude des sphères* $\omega$, $\omega'$ *et la droite* $S\omega\omega'$ *est normale au plan d'homologie des tétraèdres correspondants. Les points* $\omega$, $\omega'$ *sont les foyers d'une quadrique de révolution inscrite au tétraèdre* ABCD *dont la sphère principale a pour diamètre la somme ou la différence des rayons des sphères* $\omega$, $\omega'$. *Si les points* $A''$, $B''$, $C''$, $D''$, *par exemple, sont coplanaires, le centre* $\omega$ *de la sphère* $A'B'C'D'$ *est situé sur la surface du troisième ordre précitée* (1).

Enfin, si les points ($A'$, $B'$, $C'$, $D'$), ($A''$, $B''$, $C''$, $D''$) appartiennent à une même sphère $\Sigma$, on obtient la question 2103 de R. Gilbert, qui a été résolue autrement par M. R. Bouvaist (*Nouvelles Annales*, 1912, p. 142).

(1) Nous avons donné d'autres développements aux propriétés contenues dans ce Mémoire (MATHESIS, *Contributions à la géométrie du tétraèdre*, 1922, p. 436, et *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, sous le même titre, 1922, p. 104). (V. T.)