

J. SER

## Formules relatives à la fonction $\Gamma$

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1925), p. 385-386

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1925\\_6\\_1\\_\\_385\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__385_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**FORMULES RELATIVES A LA FONCTION  $\Gamma$ ;**

PAR J. SER.

Étant donnée une fonction supposée développable en série de la forme

$$f(x) = f_0 - x f_1 - \frac{x(1-x)}{2!} f_2 - \frac{x(1-x)(2-x)}{3!} f_3 - \dots,$$

la fonction  $V(x)$  s'annulant avec  $x$  et satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad V(x+1) - V(x) = f(x)$$

a pour expression

$$V(x) = x f_0 + \frac{x(1-x)}{2!} f_1 + \frac{x(1-x)(2-x)}{3!} f_2 + \dots$$

Considérons maintenant le développement valable pour  $x+a > 0$ ,

$$(2) \quad \frac{a}{x+a} = 1 - \frac{x}{1+a} - \frac{x(1-x)}{(1+a)(2+a)} - \frac{x(1-x)(2-x)}{(1+a)(2+a)(3+a)} - \dots$$

que l'on peut déduire entre autres de l'égalité

$$F(1, -x, 1+a, 1) = \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(a+x)}{\Gamma(a)\Gamma(a+x+1)},$$

$F$  désignant le symbole de la série hypergéométrique.

La fonction

$$a \left[ \frac{\Gamma'(x+a)}{\Gamma(x+a)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} \right]$$

s'annule avec  $x$  et satisfait aussi à la condition (1).

On en déduit la relation

$$(3) \quad \frac{\Gamma'(x+a)}{\Gamma(x+a)} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{x}{a} + \frac{x(1-x)}{2a(1+a)} + \frac{x(1-x)(2-x)}{3a(1+a)(2+a)} + \dots$$

En intégrant de zéro à  $x$ , on introduit les polynômes (1),

$$(4) \quad P_{n+1} = \int_0^x \frac{x(1-x)\dots(n-1-x)}{n!} dx$$

(1) *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1925, p. 126; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1926, p. 818.

qui sont positifs pour  $0 < x < 1$  et forment une suite convergente dont la somme est  $x$ .

La formule ainsi obtenue,

$$(5) \quad \log \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} = x \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{P_2}{a} + \frac{1! P_3}{a(1+a)} + \dots,$$

est très avantageuse pour le calcul de  $\log \Gamma(x)$ , si l'on prend pour  $a$  un entier suffisamment grand.

Lorsque  $\frac{1}{2} < x < 1$ , on peut employer de préférence la formule

$$(6) \quad \log \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(x+a)} = (1-x) \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{p_2 - P_2}{a} + \frac{1!(p_3 - P_3)}{a(1+a)} + \dots,$$

les nombres  $p_h$  désignant les valeurs de  $P_h$  pour  $x = 1$ .

Le développement obtenu en faisant  $x = 1$  dans la formule (5) donne une expression de  $\log a$  pour toutes les valeurs positives de  $a$ ,

$$(7) \quad \log a = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{p_2}{a} + \frac{1! p_3}{a(1+a)} + \frac{2! p_4}{a(1+a)(2+a)} + \dots$$

M. Appell a établi cette formule dans le cas général (*Acta mathematica*, 1926) en partant d'une formule de Joseph Bertrand.