Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 378-381

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__378_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.77. — *On considère la fonction*

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(tx)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

1° *Montrer que* $J(x)$ *est holomorphe pour toute valeur réelle ou imaginaire de* x.

2° *Montrer que* $J(x)$ *satisfait à l'équation différentielle*

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{1}$$

3° *Trouver le développement de* $J(x)$ *suivant les puissances croissantes de* x.

4° *Montrer que*

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\cos(u^2 - x)\,du}{\sqrt{1-\frac{u^2}{2x}}};$$

prouver que, si x *est réel et positif,*

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\cos u^2\,du}{\sqrt{1-\frac{u^2}{2x}}} = \int_0^{\infty}\cos u^2\,du,$$

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin u^2\,du}{\sqrt{1-\frac{u^2}{2x}}} = \int_0^{\infty}\sin u^2\,du;$$

en conclure la valeur de

$$\lim_{k \succ \infty} \sqrt{x + 2k\pi}\,\mathrm{J}(x + 2k\pi),$$

k étant un entier positif.

5° *Trouver la solution générale de l'équation*

$$xy'' + \gamma y' + xy = 0,$$

où γ *est une constante non entière, et en déduire l'intégrale générale de l'équation* (1) *par un passage à la limite.*

Épreuve pratique. — C.78. — *Calculer*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}},$$

a étant une constante réelle (méthode des résidus).

(Clermont, juin 1926.)

Épreuve théorique. — 1° *Les surfaces* S *d'équation*

$$y(z + b) = x(x + a),$$

où a et b sont des constantes, vérifient, quelles que soient a et b, une équation E *aux dérivées partielles du premier ordre que l'on formera.*

2° *Trouver la surface* Σ *intégrale générale de cette équation* E. *Montrer que* Σ *est réglée; que sont les génératrices de* Σ *vis-à-vis de* E?

3° *Le long de chaque caractéristique de* E, x, y, z, p, q *satisfont à un systeme différentiel* D *que l'on intégrera complètement en exprimant* y, z, p, q, *au moyen de* x *et de trois constantes arbitraires.*

4° *On considère la surface réglée définie paramétriquement par les équations*

$$x = tz + \varphi(t), \qquad y = t^2 z + t\varphi(t).$$

Former l'équation des asymptotiques, déterminer φ *de sorte que* $z = 0$ *donne une asymptotique particulière et intégrer l'équation correspondante.*

Indications sur la solution. — 1° L'équation E est *linéaire:*

$$pxy + qy^2 = x^2.$$

2° La surface Σ a pour équation

$$x = \frac{y}{x}\left[z - f\left(\frac{y}{x}\right)\right].$$

En posant $y = tx$, on a des équations de la forme

$$\begin{cases} x = t\,z + \varphi(t), \\ y = t^2 z + t\varphi(t). \end{cases}$$

Les courbes $t =$ const. sont les caractéristiques, ce sont des droites.

3° Les équations demandées sont

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{x^2} = \frac{-dp}{-2z + py} = \frac{-dq}{2qy + px}.$$

On a deux intégrales premières

$$\frac{y}{x} = C, \qquad z - \frac{x}{C} = C_1;$$

puis

$$\frac{dp}{-2 + pC} + \frac{dx}{Cx} = 0,$$

d'où

$$p = \frac{C_2}{x} + \frac{2}{C},$$

q est tiré de l'équation même

$$q = -\frac{1}{C^2} - \frac{C_2}{Cx}.$$

4° L'équation des asymptotiques s'écrit

$$2(t\varphi' - \varphi)\frac{dz}{dt} + 2(z - \varphi')^2 - \varphi''(tz + \varphi) = 0.$$

La courbe $z = 0$ est asymptotique, si l'on a

$$2\varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi = \frac{A}{t + B}.$$

Dans ce cas particulier, l'équation devient linéaire en $u = \frac{1}{z}$ et s'intègre sans difficulté.

Épreuve pratique. — I. *Quelle est la section de la surface*

$$a^2y^2 = (a^2 - x^2)(a^2 - z^2)$$

par un plan horizontal? Calculer l'aire $S(z_1)$ *de cette section par le plan* $z = z_1$, *puis le volume limité par la surface et les deux plans* $z = -a$ *et* $z = +a$. *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^a S(z)z^2\,dz.$$

II. *Calculer par la méthode des résidus l'intégrale*

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$$

prise dans le sens positif le long d'un cercle C *de rayon* 1 *ayant pour centre l'origine*, a *et* b *étant des constantes telles que*

$$|a| < 1, \qquad |b| < 1$$

et n *un entier positif.*

Indications sur la solution. — I. L'aire S est celle d'une ellipse

$$S = \pi a \sqrt{a^2 - z_1^2}.$$

Le volume demandé a pour valeur $\pi^2 a^3$, l'intégrale $\frac{\pi^2 a^5}{8}$.

II. La somme des résidus est évidemment nulle, donc l'intégrale est nulle.

(Lille, juin 1926.)