Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 374-378

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__374_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.59.

[*Mathématiques générales; épreuve théorique; énoncé publié en avril* 1926, *p.* 224.]

SOLUTION

Par M. R. WEINZAEPFEL.

On demandait d'abord d'évaluer, en exprimant r et θ en fonction d'un paramètre, l'intégrale

$$\theta = \int_a^r \sqrt{\frac{4a^2 - r^2}{r^2 - a^2}}\,\frac{dr}{2r}. \tag{1}$$

En posant

$$u = \sqrt{\frac{4a^2 - r^2}{r^2 - a^2}},$$

on trouve, après des calculs faciles,

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,\text{arc tang}\,u - \text{arc tang}\,\frac{u}{2} \tag{2}$$

et

$$r = a\sqrt{\frac{4 + u^2}{1 + u^2}} \tag{3}$$

Les formules (2) et (3) définissent r et θ en fonctions du paramètre u et, par suite, θ en fonction de r.

On envisageait ensuite, sur le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, deux points M et M'

(1) 1 volume de 183 pages; prix 25fr.

ayant des vitesses angulaires respectives $+3$ et -1 et partant simultanément du point $x=a$, $y=0$ et l'on demandait l'enveloppe de la droite MM' On trouve pour équation de cette droite

$$x\cos t+y\sin t-a\cos 2t=0,$$

et l'enveloppe est définie par le système

$$\begin{aligned} x &= a\cos t(1+2\sin^2 t),\\ y &= -a\sin t(1+2\cos^2 t). \end{aligned}$$

La construction de cette courbe est immédiate; c'est, comme il est connu, une astroïde ou hypocycloïde à quatre rebroussements ayant ses rebroussements sur les bissectrices des axes. Pour le voir géométriquement soient A et B les points où MM' rencontre respectivement les bissectrices $y=x$ et $y=-x$. L'angle M'OA vaut $t+\frac{\pi}{4}\cdot$ Il en est de même de l'angle M'AO parce que, si l'on abaisse de O la perpendiculaire OH sur MM', on a

$$\widehat{x\mathrm{OH}}=t,$$

donc

$$\widehat{\mathrm{M'AO}}=\frac{\pi}{2}-\widehat{\mathrm{HOA}}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{\pi}{4}+t.$$

Le triangle M'OA est donc isoscèle et l'on a

$$\mathrm{M'A}=\mathrm{M'O}=a;$$

de même on a

$$\mathrm{M'B}=\mathrm{M'O}=a;$$

d'où

$$\mathrm{AB}=2a.$$

L'enveloppe en question est donc celle d'un segment de droite de longueur $2a$ dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires; c'est un astroïde que l'on placera sans peine sur la figure.

Enfin si r et θ sont les coordonnées polaires d'un point de l'enveloppe, on a

$$\operatorname{tang}\theta=-\frac{\sin t}{\cos t}\,\frac{1+2\cos^2 t}{1+2\sin^2 t},\qquad r^2=a^2(1+3\sin^2 2t),$$

d'où par différentiation

$$d\theta=\frac{3(\sin^2 2t-1)}{1+3\sin^2 2t}\,dt=\frac{r^2-4a^2}{r^2}\,dt$$

et

$$dt=\frac{r\,dr}{2\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{4a^2-r^2}},$$

d'où, entre r et θ, la relation précédente (1) qu'indiquait l'énoncé.

Autres solutions par MM. J. Devisme et Paris.

Question C.71.

[*Mathématiques générales; épreuve théorique; énoncé publié en juillet* 1926, *p.* 315.]

SOLUTION

Par M[lle] Odette DEVISME.

Il s'agit de déterminer les constantes r et a pour que l'on ait la relation

$$(e^{rx}\cos x)' = ae^{rx}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

ou, en effectuant et divisant par e^{rx},

$$r\cos x - \sin x = a\,\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x),$$

d'où l'on tire

$$a = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad r = 1.$$

Dans ces conditions, la dérivée $m^{\text{ième}}$ de l'expression

$$f(x) = e^{rx}\cos x$$

sera égale à

$$a^m e^{rx}\cos\left(x+m\,\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^m e^x \cos\left(x+m\,\frac{\pi}{4}\right)$$

et l'application de la formule de Mac Laurin conduit au développement de $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{ax}{1}\cos\frac{\pi}{4} + \ldots + \frac{a^m x^m}{m!}\cos m\,\frac{\pi}{4} + \ldots \\ &= 1 + \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \ldots \end{aligned}$$

ou enfin, en groupant les termes qui correspondent à $8k \leqq m < 8k+8$,

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{k}\, 2^{4k}x^{8k}\Bigg[&\frac{1}{(8k)!} + \frac{x}{(8k+1)!} - \frac{2x^3}{(8k+3)!} \\ &- \frac{4x^4}{(8k+4)!} - \frac{4x^5}{(8k+5)!} + \frac{8x^7}{(8k+7)!}\Bigg]. \end{aligned}$$

Cette dernière expression montre bien que, pour x négatif, le développement de $f(x)$ (où l'on néglige les termes nuls) est une série alternée.

Question C.49.

[*Physique Mathématique; épreuve pratique; énoncé publié en février* 1926, *p.* 153].

SOLUTION.

par un ANONYME.

On considère dans un plan vertical un point pesant attiré par un point O du plan (origine des coordonnées, axe Oy vertical) avec une force égale à $\frac{k}{r^2}$ ($OM = r$, $k > 0$). On demande d'étudier son mouvement en utilisant les paramètres

$$2\lambda = r + y,$$
$$2\mu = r - y.$$

Les courbes $\lambda = \text{const.}$ et $\mu = \text{const.}$ forment évidemment un faisceau de paraboles homofocales; la force vive sera

$$2T = \left(\frac{\lambda'^2}{\lambda} + \frac{\mu'^2}{\mu}\right)(\lambda + \mu)$$

et la fonction des forces

$$U = \frac{k - g(\lambda^2 - \mu^2)}{\lambda + \mu}.$$

Le calcul classique conduit à l'équation de Jacobi suivante :

$$\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\left[\lambda\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial W}{\partial\mu}\right)^2\right] - \frac{k}{\lambda+\mu} + g(\lambda - \mu) = h,$$

qui permet (après multiplication par $\lambda + \mu$) de séparer les variables et donne

$$W = \int\sqrt{\frac{L(\lambda)}{\lambda}}\,d\lambda + \int\sqrt{\frac{M(\mu)}{\mu}}\,d\mu,$$

en posant

$$L(\lambda) = -2g\lambda^2 + 2h\lambda + k + \alpha,$$
$$M(\mu) = +2g\mu^2 + 2h\mu + k - \alpha,$$

d'où les équations du mouvement sous la forme

$$\int\sqrt{\frac{\lambda}{L(\lambda)}}\,d\lambda + \int\sqrt{\frac{\mu}{M(\mu)}}\,d\mu = t + \beta_1,$$
$$\int\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda L(\lambda)}} + \int\frac{d\mu}{\sqrt{\mu M(\mu)}} = \beta_2.$$

Application. — Avec les conditions initiales données on a :

1°
$$L(\lambda) = -2g(\lambda - b)^2,$$
$$M(\mu) = +2g(\mu - b)^2 + 2k,$$

λ reste égal à b pendant tout le mouvement et μ varie dans le même sens. La trajectoire est la parabole $\lambda = b$, tournant sa concavité vers le bas. Le mouvement est stable parce que des données initiales voisines donneront, pour $\lambda L(\lambda)$, un polynome ayant deux racines très voisines de b et positif entre ces racines.

2°
$$L(\lambda) = -2g(\lambda + b)^2 + 2k,$$
$$M(\mu) = +2g(\mu + b)^2,$$

μ reste égal $-b$ pendant tout le mouvement et λ oscille entre o et $b + \sqrt{\frac{k}{g}}$, la trajectoire est un arc de la parabole $\mu = -b$ (tournant sa concavité vers le haut) décrit d'un mouvement oscillatoire. Le mouvement est stable, pour la même raison que plus haut.

Autres solutions par MM. J. Devisme, A. Monjallon.