

## Bibliographie

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 1 (1925), p. 371-374

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1925\\_6\\_1\\_\\_371\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__371_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## BIBLIOGRAPHIE.

---

Il a déjà paru, depuis 1924, six fascicules du grand *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* (1), que publie M. Émile Borel. L'Ouvrage complet comportera 17 fascicules, mais on peut, dès maintenant, en apprécier toute l'importance.

La nouvelle œuvre de M. Borel nous paraît, à quelques égards, devoir être mise en parallèle avec sa *Collection de Monographies*, dont nul n'ignore l'influence décisive sur le développement actuel de la *Théorie des fonctions*. Nous n'oublions point, en faisant ici ce rapprochement, que lorsque parut, en 1898, le premier volume de la collection de Monographies, la Théorie des fonctions était bien loin d'être constituée, tandis que, depuis plus d'un siècle, Laplace dans sa *Théorie analytique des probabilités* « a fourni un modèle à tous ceux qui ont abordé le sujet ». Mais il faut ajouter que le Calcul des probabilités prend de nos jours, par

---

(1) Gauthier-Villars, éditeur.

ses applications, une extension que ses fondateurs ne pouvaient prévoir. Il intéresse, et très profondément, les branches les plus diverses de la Science, de sorte qu'une synthèse générale répond aux besoins de l'heure présente et ne peut manquer de donner une vigoureuse impulsion à tout un ensemble de recherches.

Cet exposé d'ensemble, qui doit mettre en évidence, sous la diversité des applications, l'unité du Calcul des probabilités et qui seul peut assurer l'heureuse réaction des nécessités pratiques sur le développement des recherches théoriques, nous le trouvons dans le *Traité* de M. Borel. Pour sa publication, l'auteur a obtenu le concours de spécialistes distingués : c'est ainsi par exemple (et cela caractérise bien l'ample synthèse que doit réaliser le *Traité*) qu'un éminent naturaliste comme Blaringhem a été appelé à collaborer aux fascicules (à paraître) concernant les applications à la Biologie.

Les 17 fascicules que comprendra le *Traité* complet se groupent en quatre tomes : I. Principes de la théorie; II. Applications mathématiques et physiques; III. Applications aux Sciences économiques et biologiques; IV. Applications diverses (tir, jeux) et conclusion philosophique. Le seul fascicule paru du tome premier : *Principes et formules classiques* (1), rédigé par R. Lagrange d'après le Cours de M. Borel, donne l'exposé le plus sûr et le plus limpide des bases mathématiques du calcul des probabilités. Les principes fondamentaux (des probabilités totales et de la probabilité composée) sont d'abord posés comme axiomes caractéristiques de la notion de probabilité, axiomes dont la valeur pratique se précise immédiatement par d'intéressants exemples. L'auteur étudie, ensuite les méthodes permettant de traiter les problèmes du premier et du second ordre, tant pour les probabilités rationnelles que pour les probabilités dénombrables ou continues; enfin, dans un dernier Chapitre, la considération des fonctions de la statistique l'amène à un suggestif exposé de la résolution du *problème des moments* de Stieltjes.

Le tome second du *Traité* débute par un volume d'*applications à l'Arithmétique et à la Théorie des fonctions* (2) (rédigé par P. Dubreil d'après des leçons de l'auteur). Les recherches qu'y développe l'auteur sont des plus attrayantes et il semble que le champ qu'il ouvre ainsi à l'activité des chercheurs doive être des plus féconds. Pour donner au lecteur le désir de connaître ce petit Livre, il suffira de citer ici l'un des premiers résultats : soit  $f_n$  la fréquence d'un chiffre donné dans les  $n$  premiers chiffres du développement décimal d'un nombre; si l'ensemble E des  $f_n$  admet deux points limites  $f$  et  $f'$ , il admet aussi pour point limite tout point du segment  $ff'$ ; de plus, l'ensemble des nombres pour chacun desquels E admet un point limite autre que  $\frac{1}{10}$  a une mesure nulle.

L'étude des probabilités géométriques qu'expose M. R. Deltheil dans le

---

(1) 1 volume de 160 pages; prix 18<sup>fr.</sup>

(2) 1 volume de 100 pages; prix 17<sup>fr.</sup>

second fascicule du même tome (1), n'est pas moins attrayante. Si les premiers résultats sur ce sujet (solution de Buffon pour le problème de l'aiguille) sont déjà très anciens, la théorie générale en est par contre récente et l'on doit rapporter ses progrès aux travaux de Poincaré introduisant dans la définition de la probabilité élémentaire une fonction arbitraire et à la thèse de M. Deltheil, qui détermine cette fonction par l'invariance de la probabilité pour certains groupes de transformations. Il faut signaler, dans l'excellent Ouvrage de M. Deltheil, l'intéressante étude du problème de Sylvester (probabilité pour que quatre points pris dans un domaine forment un quadrilatère convexe) et l'élégant exposé des résultats de Barbier et Crofton.

Le dernier Chapitre : Problèmes sur la sphère de l'espace à  $m$  dimensions, nous amène tout naturellement au fascicule suivant du Traité : *Mécanique statistique classique*, fascicule qui est dû à M. Borel (leçons rédigées par F. Perrin) (2). Les positions et vitesses d'un système mécanique étant définies par des variables canoniques, le point de départ de la Mécanique statistique est la notion d'*extension en phase*

$$\int \dots, \int dp_1 dp_2 \dots dp_n dq_1 dq_2 \dots dq_n$$

intégrale invariante pour les changements de coordonnées et indépendante du temps quand on suit le mouvement du système. On verra d'abord dans le livre de M. Borel comment l'extension en phase (multipliée par une fonction de l'énergie, en général seule intégrale première uniforme des équations) intervient dans la définition de la probabilité élémentaire; cela résulte des propriétés précédentes et de l'*étalement* de l'extension en phase qui fait que, pour de petites variations des données initiales, les trajectoires correspondantes recouvrent entièrement une hypersurface d'énergie constante. Cette importante notion se trouve remarquablement mise en lumière par des exemples concernant le cas où se produisent des réflexions. Le problème général de la théorie cinétique des gaz équivaut, comme le montre alors l'auteur, au mouvement, à vitesse constante, d'un point P dans un hyperespace limité par certaines surfaces, le point se réfléchissant sur les surfaces limites : l'étalement des trajectoires entraîne que toutes directions sont également probables pour la vitesse de P, et M. Borel en déduit, de façon particulièrement satisfaisante, la loi fondamentale de répartition des vitesses d'une masse gazeuse (loi de Maxwell). Il développe ensuite la théorie cinétique et le fascicule s'achève sur une substantielle étude de la notion d'entropie.

Pour terminer cette revue rapide, il nous reste à signaler ici le volume de M. H. Galbrun (t. III, fasc 1) (3) consacré aux assurances sur la vie

(1) 1 volume de 123 pages; prix 22<sup>fr.</sup>

(2) 1 volume de 148 pages; prix 18<sup>fr.</sup>

(3) 1 volume de 310 pages; prix 35<sup>fr.</sup>

(calcul des primes) et le volume de M. J. Haag : *Applications au tir* (t. IV, fasc. 4) (1). M. Galbrun dégage idées et méthodes générales dans des questions qui sont parmi les plus importantes applications pratiques du calcul des probabilités. M. Haag s'est occupé des problèmes de probabilité de tir, d'abord à la Commission de Gâvre, puis au Centre d'études d'artillerie; il donne de ce vaste sujet un exposé parfaitement documenté et très accessible, exposé très original et où l'on trouvera en particulier les travaux personnels de l'auteur sur le calcul de la portée moyenne et de l'écart probable, sur le réglage et le rendement, sur la probabilité d'efficacité et le tir sur zone.

J. P.