ET. DELASSUS

Sur le contact à rugosité parfaite

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 358-365
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__358_1>

SUR LE CONTACT A RUGOSITÉ PARFAITE;

PAR ET. DELASSUS.

I.

1. On a l'habitude, dans beaucoup de questions, de dire que l'on suppose les corps parfaitement rugueux ou que l'on suppose le coefficient de frottement infini de façon à empêcher tout glissement et à assurer ainsi le roulement. C'est une conséquence immédiate de la loi de frottement

$$|F| = f|N|$$

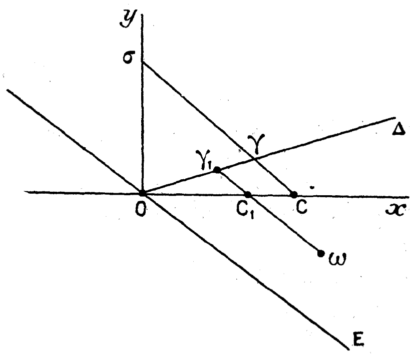
puisque la force de frottement devient alors infinie. Comme en bien d'autres questions de mécanique, on est là en présence d'une chose évidente..., mais fausse.

2. Pour s'en convaincre, reprenons la discussion géométrique du contact plan avec coefficient de frottement très grand (¹).

Nous avons une *droite d'échappement* E (²) et un seul côté Δ de l'angle de frottement au-dessus de E. Ce côté est d'ailleurs très voisin de Ox.

Si les conditions initiales donnent $V_0 < 0$ et un point σ sur Oy, on a un mouvement M_g de réaction $O\gamma$ donnée par la construction connue.

Si l'on a $V_0 = 0$, il faut supposer le point ω, extrémité de la



réaction du roulement forcé situé dans l'angle ΔOE, et il donne un mouvement M_g de réaction $O\gamma_1$.

Dans les deux cas, on voit que le mouvement M_g obtenu donnera une réaction tangentielle finie et une *réaction normale très petite*.

Il est facile de passer à la limite pour f infini, car la droite E, ainsi que les points σ et ω, sont absolument indépendants de f. Δ viendra se confondre avec Ox, et γ, γ_1 viendront en C, C_1, de sorte que l'on aura *un mouvement limite caractérisé par une réaction tangentielle finie et une réaction normale nulle.*

L'idée, signalée au début, que la croissance indéfinie de f avait pour effet de faire croître indéfiniment F était donc fausse puisque

---

(¹) *Voir* DELASSUS, *Considérations sur le frottement de glissement* (*N. A.*, 1920).

(²) C'est la droite D de l'article cité, mais à laquelle nous donnons un nom pour rappeler sa propriété de limite de la région d'échappement.

l'effet véritable est de faire tendre N vers zéro, ce qui permet à F de rester fini.

3. L'étude précédente nous conduit donc à dire que, aussi bien dans l'espace que dans le plan, quand le coefficient de frottement est infini, les mouvements de glissements sont caractérisés par une réaction normale nulle et une force de frottement finie satisfaisant à la condition d'être opposée à la vitesse de glissement. Toutes les constructions données pour f quelconque s'appliquent avec leurs conséquences à ces mouvements.

Le cas du mouvement plan vient d'être étudié et ne donne lieu à aucune simplification ; il n'en est pas de même dans le cas de l'espace.

Si l'on a $V_0 = 0$, il existe, pour l'extrémité ω de la réaction du roulement forcé, trois régions :

R_ρ, côté négatif du plan E d'échappement, c'est la région d'échappement ;

R_r, région de roulement, portion de l'espace intérieur au cône positif de frottement et du côté positif de E ;

R_g, région de glissement extérieure au cône de frottement et du côté positif de E.

J'ai montré (¹) que, ω étant dans R_g, la réaction $O\gamma$ du mouvement M_g était déterminée par une équation du quatrième degré et que, dans certains cas, il était absolument impossible de caractériser la racine qui donnait le véritable mouvement M_g.

Dans le cas actuel ($f = \infty$), rien de tout cela ne se produit. On pourrait le voir comme conséquence limite des calculs de l'article que nous venons de citer, mais il est aisé de le voir directement. Soit

$$\varphi(x, y, z) = 1$$

la quadrique qui se retrouve dans toutes ces questions et qui est celle employée par M. Pérès dans ses articles sur le choc avec frottement (²).

(¹) DELASSUS, *Sur les lois du frottement de glissement* (*Bulletin de la Société mathématique de France*. 1923).

(²) PÉRÈS, *N. A.*, 1923 et 1924.

Si nous désignons par x, y, o la réaction $O\gamma$ de M_g et par x_1, y_1, z_1 la réaction $O\omega$ de M_r, on établit aisément les deux conditions

$$\frac{x}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x-x_1, y-y_1, -z_1)} = \frac{y}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x-x_1, y-y_1, -z_1)} < 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x-x_1, y-y_1, -z_1) = 0.$$

Pour la commodité de l'interprétation, nous remplacerons dans la première z_1 par sa valeur tirée de la seconde et l'on verra que le système pourra s'écrire

$$\frac{x}{\dfrac{\partial U}{\partial x}(x-x_1, y-y_1)} = \frac{y}{\dfrac{\partial U}{\partial y}(x-x_1, y-y_1)} < 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x-x_1, y-y_1, -z_1) = 0,$$

U étant une nouvelle forme quadratique à deux variables définie positive. On est ramené à l'intersection d'une droite Ω, intersection de xOy avec E' menée par ω parallèlement à E, et de l'hyperbole d'Apollonius relative au point O et à l'ellipse

$$U(x-x_1, y-y_1) = 1.$$

Cette hyperbole passe par O et par $\omega'(x_1, y_1)$, projection horizontale de ω. Ces deux points sont sur une même branche et l'inégalité exprime que le point γ doit être sur l'arc $O\omega'$.

La région R_g se réduit ici au dièdre défini par le côté négatif de xOy et le côté positif de E; par hypothèse, ω y est situé, et, sans perdre notre temps à le démontrer, on voit immédiatement que ω' et O sont alors forcément de part et d'autre de E', donc de part et d'autre de son intersection Ω avec xOy. L'arc $O\omega'$ d'hyperbole traverse Ω en un point et un seul, de sorte que l'on a en définitive à résoudre une équation du second degré dont une racine ne convient pas et dont l'autre donne la solution cherchée.

Si $V_0 \neq 0$, les conditions initiales étant supposées donner un point σ sur l'axe Oz lui-même, il n'y correspondra un mouvement M_g que si V_0 est dans le demi-plan xOy opposé à la face xOy de R_g. Dans le cas contraire, il y a choc (¹).

(¹) DELASSUS et PÉRÈS, *N. A.*, 1924.

II.

4. Le choc avec coefficients de frottement infini s'étudie sans aucune difficulté, comme cas limite, en appliquant la discussion de M. Pérès.

Mais il y a des simplifications.

Le point le plus haut de l'ellipse φ (cas du plan) ou de l'ellipsoïde φ (cas de l'espace) se trouve toujours à l'intérieur du cône de frottement qui est ici le dessus de xOy de sorte que, si le choc débute par roulement, il se fera entièrement par roulement.

Dans le cas de l'espace ([1]) le cercle C de M. Pérès a un rayon infini, les points limites sont à l'infini, aucun d'eux n'est sur l'arc Bh de l'hyperbole d'Apollonius, de sorte que, quelle que soit la vitesse de glissement du débnt du choc, on a une courbe (M) allant rencontrer Oz, donc choc à une seule période ou choc à deux périodes, la seconde étant de roulement.

Il est à remarquer que, dans ce cas, on peut effectuer explicitement les quadratures qui donnent la courbe (M). Supposons que l'on ait choisi pour Ox et Oy les axes de la section horizontale de la quadrique φ; on a alors

$$\varphi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx,$$

et en vertu de

$$\frac{X}{U} = \frac{Y}{V} < 0, \qquad Z = 0,$$

les équations différentielles de (M) deviennent

$$\frac{dU}{AU} = \frac{dV}{BV} = \frac{dW}{-EU - DV} < 0$$

et donnent les équations finies de la courbe (M) qui permettent de déterminer M_1 dans le cas du choc simple à glissement. Dans tous les autres cas M_1 sera sur Oz et sera déterminé sans passer par ces formules.

Il est à remarquer que le système précédent, intégré, donnerait simplement, pour ce cas particulier, les résultats de M. Pérès sans les déduire du cas général.

([1]) *Cf.* Pérès, *N. A.*, mars 1924, § 6-8.

III.

5. La notion analytique de roulement unilatéral signifie que le roulement est forcé par l'existence même du contact. Quand le contact cesse, il y a échappement sans discontinuité sur les q', c'est-à-dire sans choc, et nous admettrons comme fait expérimental celui que nous admettons dans toutes ces questions de contact, que le mouvement libre se produit dès qu'il est possible.

Nous admettrons aussi, comme nous l'avons fait pour le contact à frottement, le principe de la réaction normale positive.

Ceci posé, plaçons-nous dans le cas de l'espace, donnons-nous des conditions initiales de roulement fournissant une réaction $O\omega$ pour le mouvement à contact et roulement forcés. Il ne peut se produire que deux mouvements effectifs : soit le mouvement libre M_ρ, soit le mouvement de roulement M_r. La région R_ρ sera toujours le dessous du plan d'échappement

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

et le reste de l'espace, c'est-à-dire le côté positif du plan E, semble devoir constituer la région R_r. Mais ce côté positif de E se compose de deux dièdres : l'un au-dessus de xOy, qui est la vraie région R_r et l'autre R' au-dessous de xOy.

Dans cette région R' le mouvement M_ρ est impossible et il en est de même de M_r qui aurait une réaction normale négative; c'est une *région d'impossibilité*. Que se passe-t-il quand ω y est situé, ce qui peut effectivement arriver comme on peut le vérifier sur des exemples simples? Aucun *mouvement* n'étant possible, il n'y a plus que l'hypothèse d'un choc ramenant brusquement à des conditions initiales de possibilité pour M_r ou pour M_ρ et, sur ce choc, nous ne savons absolument rien ni théoriquement, ni expérimentalement.

6. On est débarrassé de toutes ces difficultés si l'on admet que le contact est à frottement de coefficient infini. Nous remarquons en effet que le diagramme R_ρ, R_r, R' que nous venons de former pour le contact à roulement est identique au diagramme R_ρ, R_r, R_g

que nous avons formé pour le contact à rugosité parfaite, de sorte que, si nous *réalisons* le roulement par cette rugosité parfaite, nous aurons tout naturellement la signification de la région R', ce sera la région R_g de production de ces mouvements de glissement étudiés dans la première section; mais alors, il faudra abandonner la définition du contact à roulement, ne plus admettre que le contact entraîne forcément le roulement et aussi, conformément à ce qui a été dit au début, perdre la notion fausse de rugosité parfaite assurant le roulement.

Quand ω se trouvera dans R' il n'y aura donc pas de choc mais simplement mouvement M_g à réaction normale nulle, à réaction tangentielle finie et de durée finie, de sorte que ce mouvement lui-même ne pourra pas être assimilé à un choc. Ce sera une première période du mouvement total.

Avec la première conception du roulement, si l'on partait du contact avec une vitesse de glissement V_0 non nulle, il y avait forcément choc sur la liaison de roulement. Avec la réalisation considérée, il ne se produit plus de choc; il y a production sans choc d'un mouvement M_g, pourvu toutefois que les conditions initiales de glissement ne soient pas dans le cas d'impossibilité. Si V_0 se trouve dans la face xOy de R', il y aura le choc déjà indiqué (fin du paragraphe 3).

Des résultats analogues sont obtenus plus simplement dans le cas du mouvement plan.

De là résulte que la conception abstraite de la liaison unilatérale de roulement conduit à des conséquences inacceptables et qu'il semble que l'on ne puisse avoir une conception véritablement mécanique d'une telle liaison qu'en la considérant comme réalisée par un certain procédé, ce qui change ses propriétés mais supprime les lacunes.

Il y a une infinité de façons de réaliser le roulement. Celle qui a été étudiée ici a l'avantage de ne faire intervenir aucun contact supplémentaire et d'être la limite d'un cas pratiquement réalisable.

IV.

7. Tout ce qui vient d'être dit dans les trois sections précédentes repose sur un fait unique : c'est que, dans le cas du plan,

la droite d'échappement ne coïncide pas avec Ox ; dans le cas de l'espace, le plan d'échappement ne coïncide pas avec xOy.

Si nous reprenons le raisonnement du paragraphe 2, en supposant la droite E confondue avec Ox, l'angle xOE, qui est la région R_g, n'existera plus; des conditions initiales de roulement donneront toujours M_r ou M_ρ. Des conditions initiales de glissement donneront M_ρ si σ est au-dessous de O, et, si σ est au-dessus de O, un point C à l'infini sur Ox, c'est-à-dire un mouvement M_g à réaction normale nulle ou indéterminée et à réaction tangentielle infinie; ce mouvement sous l'action de forces infiniment grandes sera en réalité un choc qui ramènera aux conditions de roulement, donc au roulement, d'après l'observation précédente, de sorte que :

La rugosité parfaite donne la réalisation rigoureuse de la liaison unilatérale de roulement lorsque le solide en mouvement est tel que la droite ou le plan d'échappement coïncide toujours avec la tangente ou le plan tangent de contact.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la tangente de contact soit axe de symétrie de la conique φ

$$K^2(X^2+Y^2)+(bX-aY)^2=1;$$

donc

$$a=0,$$

ce qui signifie que la plaque est un disque circulaire ayant son centre de gravité au centre et, dans le cas de l'espace, que le plan des xy soit plan de symétrie pour la quadrique φ

$$\frac{X^2+Y^2+Z^2}{M}+f(cY-bZ,\ aZ-cX,\ bX-aY)=1,$$

ce qui exige

$$a=b=0,$$

c'est-à-dire que le solide soit une sphère ayant son centre comme centre de gravité.