NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEMAIRE

# Sur l'égalité et la similitude des figures dans l'espace

*Nouvelles annales de mathématiques 6e série*, tome 1 (1925), p. 321-341

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__321_0>

# SUR L'ÉGALITÉ ET LA SIMILITUDE DES FIGURES DANS L'ESPACE;

PAR J. LEMAIRE.

Dans tout ce qui va suivre, nous appellerons *éléments homologues* de deux figures, égales ou semblables, les éléments, points, plans, droites, lignes, qui se correspondent dans les deux figures; deux tels éléments seront désignés par une même lettre, accentuée dans l'une des figures; deux éléments homologues qui coïncident sont dits *doubles*.

## I. — Figures directement égales.

(F) et (F') étant deux figures directement égales, c'est-à-dire superposables, on sait que si elles ont deux points homologues confondus, elles ont une droite de tels points, et peuvent être superposées par une rotation de l'une d'elles autour de cette droite.

Rappelons aussi que, dans le cas général, (F) peut être amenée à coïncider avec (F') par un *déplacement hélicoïdal* autour d'un axe X, et cela d'une seule manière, la translation et la rotation qui constituent ce déplacement pouvant être permutées.

Si A, B, C, ... et A', B', C', ... sont des points homologues des deux figures, les vecteurs (AA'), (BB'), (CC'), ... ont pour projections sur X des vecteurs équipollents. De plus, si d'un point O quelconque comme origine, on mène les vecteurs $(Oa)$, $(Ob)$, $(Oc)$ équipollents aux trois vecteurs (AA'), (BB'), (CC') la perpendiculaire menée de O sur le plan $abc$ donne la direction de l'axe X, et la distance de O à ce plan donne la grandeur de la translation.

Observons encore que les dièdres tels que $\widehat{\text{MXM}'}$ sont tous égaux et de même sens, et que les vecteurs $(Om)$, $(On)$, ... équipollents à (MM'), (NN'), ... ont leurs extrémités, $m$, $n$, ... dans le plan $abc$.

*Éléments doubles.* — L'égalité de deux figures de l'espace étant un cas particulier de l'homographie, la transformation qui permet de passer de (F) à (F′) possède quatre points doubles, dont aucun n'est situé, d'après ce qui précède, à distance finie.

L'axe X glissant sur lui-même, les points homologues des deux figures qui appartiennent à cet axe forment deux divisions égales dont les points doubles sont confondus à l'infini sur l'axe; les deux autres points doubles appartiennent à la droite de l'infini des plans perpendiculaires à X, qui est évidemment une droite double de la transformation; et comme les angles homologues situés dans deux tels plans sont égaux et de même sens, ces points doubles sont les points cycliques communs à ces plans.

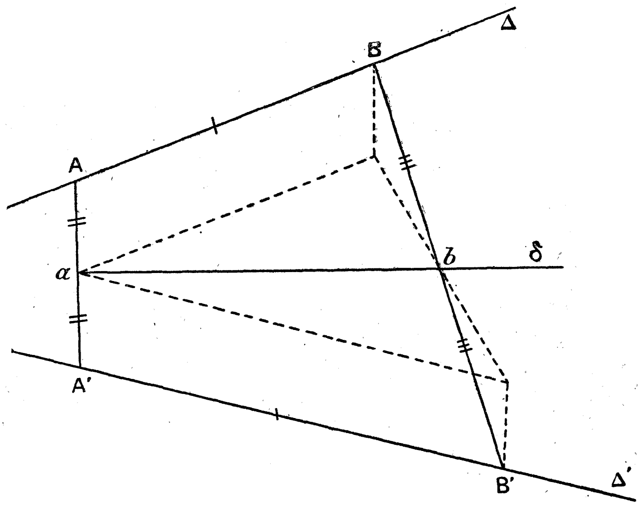
Les plans doubles de la transformation sont les plans cycliques passant par X et le plan de l'infini compté deux fois.

*Groupe de points homologues.* — A un groupe de points homologues M, M′, correspond un point, milieu de MM′, que nous appellerons le *point médian* du groupe. Inversement, à un point arbitraire $m$ correspond un système de points homologues dont $m$ est le point médian : nous verrons en effet plus loin que deux figures *inversement égales*, c'est-à-dire dont l'une est superposable à la symétrique de l'autre par rapport à un point ou à un plan quelconque de l'espace, possèdent un point double à distance finie et un seul. Ceci admis, si nous considérons la figure $(F_1)$ symétrique de (F) par rapport à $m$, les figures $(F_1)$ et (F′) sont inversement égales et ont un point double $M_1M'$ et un seul; donc il existe bien, dans (F) et (F′), un système de points homologues M, M′ et un seul, admettant $m$ pour point médian.

*Groupe de droites homologues.* — Si A, B, C, ... et A′, B′, C′, ... sont des points homologues de deux droites homologues $\Delta$ et $\Delta'$, les droites AA′, BB′, CC′, ... sont des génératrices d'un même système d'un paraboloïde, dont $\Delta$ et $\Delta'$ sont génératrices de l'autre système; les milieux $a$, $b$, $c$, ... des segments AA′, BB′, CC′, ... se trouvent sur une génératrice du même système que $\Delta$ et $\Delta'$, de sorte que *les milieux des segments* AA′, BB′, ... *joignant les points homologues de deux droites homologues* $\Delta$ *et* $\Delta'$ *appartiennent à une droite* $\delta$, nous l'appellerons la *droite médiane* de $\Delta$ et $\Delta'$.

Il est aisé de voir que $\delta$ est également inclinée sur $\Delta$ et $\Delta'$, ces trois droites étant d'ailleurs parallèles à un même plan (*fig.* 1). Les segments homologues tels que AB et A′B′ ont sur $\delta$ des projec-

Fig. 1.



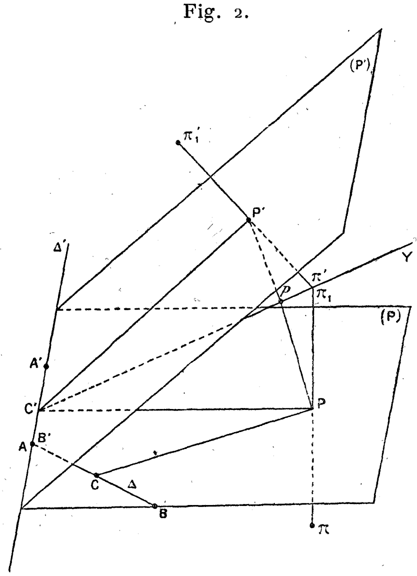

tions orthogonales équivalentes; il en est donc de même des segments AA′, BB′, .... En particulier, *si* AA′ *est perpendiculaire à* $\delta$, *il en est de même pour* BB′, CC′, .... Ce qui précède s'applique aussi au cas où $\Delta$ et $\Delta'$ se coupent.

Inversement, montrons qu'*à une droite quelconque* $\delta$ *de l'espace correspondent deux droites homologues* $\Delta$, $\Delta'$ *pour lesquelles* $\delta$ *est la droite médiane :* $a$ et $b$ étant en effet deux points arbitraires de $\delta$, $a$ est le point médian de deux points homologues A et A′, $b$ le point médian de deux points homologues B et B′; les droites AB et A′B′ sont deux droites homologues, et les seules, pour lesquelles $\delta$ est la droite portant les milieux des segments AA′, BB′, ....

*Groupe de plans homologues.* — Considérant enfin deux plans homologues (P) et (P′), on verra facilement, en s'appuyant sur ce qui précède, que les segments MM′ joignant les points homologues de ces plans ont leurs milieux sur un même plan ($p$), que nous appellerons *plan médian* de (P) et (P′); inversement à un plan $(p)$ donné arbitrairement, correspond un groupe, et un seul, de deux plans homologues pour lesquels $(p)$ est le plan médian.

Précisons les positions relatives des trois plans : (P) et (P′) étant deux plans homologues, considérons leur intersection $\Delta'$ comme une droite de (F′), son homologue $\Delta$ est dans (P) ; A, point commun à $\Delta$ et $\Delta'$, considéré comme appartenant à $\Delta$, a pour homologue un point A′ de $\Delta'$ ; de même ce point, considéré comme appartenant à $\Delta'$ et appelé B′, a pour homologue un point B de $\Delta$ ; les segments AB et A′B′ sont homologues et par suite égaux, et leurs milieux C et C′ sont homologues ; la droite CC′ n'est autre chose que la droite médiane $\delta$ de $\Delta$ et $\Delta'$, elle est dans le plan médian $(p)$ de (P) et (P′) (*fig.* 2).

Fig. 2.




Soient P le point de (P) qui se projette en C et C′ sur $\Delta$ et $\Delta'$, P′ son homologue dans (P′) ; les triangles PAB et P′A′B′ sont homologues et isoscèles, leurs hauteurs PC et P′C′ sont égales ; par conséquent $PC' = P'C'$ et ces droites sont toutes deux perpendiculaires à $\Delta'$. Si la bissectrice C′Y de $\widehat{PC'P'}$ coupe PP′ en $p$, ce point $p$ appartient au plan médian $(p)$ de (P) et (P′). Observons que $C'Y$ est la droite médiane de $AP$ et $A'P'$ et qu'elle est perpendiculaire aux droites joignant les points homologues de ces deux droites.

Le plan $(p)$ est déterminé par le point $p$ et la droite $\delta$ ; il coupe de même $(P')$ suivant la droite $\delta_1$ médiane de $\Delta_1$ et $\Delta'_1$, en appelant $\Delta_1$ la droite commune aux plans $(P)$ et $(P')$ considérée comme faisant partie de $(F)$.

Les plans $(P)$ et $(P')$ étant symétriques par rapport à la droite $C'Y$ de $(p)$, *ce plan médian des deux premiers est également incliné sur chacun d'eux;* $\delta$ et $\delta_1$ sont aussi symétriques par rapport à $C'Y$.

*Remarque.* — $A$ et $A'$ étant deux points homologues quelconques, et $\delta$ une perpendiculaire à $AA'$ en son milieu, $\delta$ est la droite médiane de deux droites homologues $\Delta$ et $\Delta'$ symétriques par rapport à $\delta$ ; une symétrie par rapport à $\delta$ permettra de passer de $(F)$ à $(F_1)$ ; les figures égales $(F_1)$ et $(F')$ ayant une droite de points doubles $\Delta'$, une rotation autour de cette droite amènera $(F_1)$ en $(F')$ : ainsi l'on peut passer de $(F)$ à $(F')$, d'une infinité de manières, par un *renversement*, ou symétrie par rapport à une droite, suivi d'une rotation autour d'une autre droite.

Montrons que *le déplacement hélicoïdal permettant de passer de* $(F)$ à $(F')$ *peut être remplacé, d'une infinité de manières, par deux renversements* (*voir* Cinématique Kœnigs, note de Darboux) : $\delta$ étant une droite coupant à angle droit, en un point arbitraire $a$, l'axe $X$ du déplacement hélicoïdal, $a$ est le point médian de deux points homologues $A$ et $A'$ de l'axe, $\delta$ est par suite la droite médiane de deux droites homologues $\Delta$ et $\Delta'$ aussi perpendiculaires à l'axe : car si $B$ et $B'$ sont deux autres points homologues de ces droites, le milieu $b$ de $BB'$ est sur $\delta$, a pour projection $a$ sur $X$, et comme la projection de $BB'$ est égale à $AA'$, les points $B$ et $B'$ se projettent en $A$ et $A'$, $\Delta$ et $\Delta'$ sont bien perpendiculaires à l'axe. Ceci posé, un renversement autour de $\delta$ amène $(F)$ en $(F_1)$, et $\Delta$ sur $\Delta'$, points homologues confondus; une seconde rotation, autour de $\Delta'$, amènera $(F_1)$ en $(F')$ ; le renversement ayant ramené l'axe $X$ sur lui-même, en changeant son sens, la seconde rotation doit remettre finalement cet axe sur sa position primitive à un glissement près, et cela exige que cette rotation soit aussi un renversement, ce qui démontre la propriété énoncée.

Revenons aux plans homologues (P) et (P′) considérés plus haut : une rotation convenable autour de leur droite commune peut amener (P) en coïncidence avec (P′), le point P en P′; (F) entraînée dans le mouvement vient en ($F_1$); la figure ($f$), intersection de (F) et de (P), égale à la figure homologue ($f'$), intersection de (F′) et de (P′), vient occuper une position ($f_1$) dans (P′), et il est clair que la rotation peut être choisie telle que ($f_1$) et ($f'$) soient directement égales.

Ces figures ayant un point double en P′, une rotation convenable autour de la perpendiculaire en ce point à (P′) pourra amener ($f_1$) en coïncidence avec ($f'$), et par suite ($F_1$) en coïncidence avec (F′). On voit ainsi qu'*on peut, d'une infinité de manières, amener* (F) *en* (F′), *à l'aide de deux rotations autour de deux droites rectangulaires.*

### COMPLEXES ATTACHÉS AUX DEUX FIGURES.

Nous allons étudier brièvement deux complexes attachés aux deux figures : le complexe des axes des segments MM′, et le complexe des droites qui portent ces segments.

*Complexe* ($C_1$) *des axes des segments* MM′. — Pour chaque groupe de points homologues M, M′, il existe un nombre infini d'axes, c'est-à-dire de perpendiculaires au segment MM′ en son milieu; comme ces points sont eux-mêmes en nombre triplement infini, on serait tenté de penser que les axes des segments tels que MM′ sont en nombre quadruplement infini, et par conséquent ne forment pas un complexe; mais il n'en est rien, puisque nous avons vu plus haut que tout axe d'un segment MM′ est aussi axe d'une infinité de segments pareils, et se trouve par suite compté un nombre $\infty^1$ de fois, de sorte que ces axes sont en nombre $\infty^3$, et constituent bien un complexe.

Tous les axes passant par un point $a$ sont des axes pour le segment AA′ dont $a$ est le point médian, sont par suite perpendiculaires à AA′, et appartiennent tous au plan axial du segment. Par conséquent, *les axes des segments* MM′ *forment un complexe linéaire;* nous l'appellerons ($C_1$).

*Plan polaire d'un point. Pôle d'un plan.* — Le plan polaire d'un point est aussi le plan axial du segment de droite dont les extrémités ont ce point pour point médian.

Inversement étant donné un plan (P), considérons la figure ($F_1$) symétrique de (F) par rapport à ce plan; les figures inversement égales (F′) et ($F_1$) admettent un point double $\pi'$, $\pi_1$ et un seul à distance finie, par suite il existe dans (F) et (F′) un groupe de deux points homologues $\pi$, $\pi'$ et un seul, qui sont symétriques par rapport à (P). Le point médian P de ces deux points est le pôle du plan (P). Si nous nous reportons à la figure 2, nous voyons que les points P, P′ de cette figure sont les projections sur les deux plans d'un même point $\pi'$ de Y, lequel est équidistant des plans; considéré comme appartenant à la figure (F′), ce point $\pi'$ a dans (F) un homologue $\pi$ qui est précisément son symétrique par rapport au plan (P), de sorte que le plan (P) a pour pôle le point P de cette figure 2. Ce point $\pi'$ considéré comme appartenant à (F), et désigné, à ce titre, par $\pi_1$, a pour homologue son symétrique $\pi'_1$ par rapport à (P′), et P′ est le pôle du plan (P′) : ainsi *deux plans homologues ont pour pôles deux points homologues;* corrélativement, *deux points homologues ont pour plans polaires deux plans homologues.*

Il serait aisé d'adapter au complexe ($C_1$) toutes les propriétés des complexes linéaires et d'en déduire de nombreuses propriétés de deux figures égales. Bornons-nous à montrer que *l'axe de* ($C_1$) *est l'axe* X *du déplacement hélicoïdal* permettant de passer de (F) à (F′) : en effet tout point *a* de X est le point médian de deux points A, A′ de l'axe, est par suite le pôle du plan perpendiculaire à X et passant par *a*, de sorte que X, étant le diamètre conjugué, par rapport à ($C_1$) des plans qui lui sont perpendiculaires, est bien l'axe du complexe.

On obtiendrait cet axe sur la figure 2 en observant qu'il coupe à angle droit la perpendiculaire commune Y aux deux droites conjuguées rectangulaires $\Delta'$ et PP′, et cherchant directement une telle droite qui puisse servir d'axe à un déplacement hélicoïdal permettant d'amener P en P′, en même temps que (P) sur (P′).

*Complexe* ($C_2$) *des droites* MM′. — Pour qu'une droite porte deux points homologues des deux figures (F) et (F′), il faut et il suffit que cette droite, considérée comme appartenant à l'une des figures, rencontre son homologue; les droites MM′ forment donc un complexe. Ce complexe est identique au complexe des droites d'intersection de deux plans homologues : soit en effet $\Delta'$ une droite portant deux points homologues M et M′; considérons-la comme faisant partie de la figure (F′), elle a une homologue $\Delta$ passant en M et déterminant avec $\Delta'$ un plan (P); ce plan passant par $\Delta$, son plan homologue (P′) passe par $\Delta'$ : cette droite MM′ est donc aussi l'intersection de deux plans homologues. La proposition corrélative se démontre aussi aisément.

Faisons voir que ce complexe coïncide avec le *complexe des droites perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport au complexe* ($C_1$). Soient en effet MM′ une droite du complexe ($C_2$), $m$ le milieu de MM′; le plan polaire de $m$ par rapport à ($C_1$) étant perpendiculaire à MM′ et contenant la droite conjuguée de MM′, cette droite MM′ et sa conjuguée sont bien orthogonales.

Inversement, D et $\Delta$ étant deux droites conjuguées supposées rectangulaires, menons par $\Delta$ le plan (P) perpendiculaire à D, il a pour pôle le point $m$ où D le coupe; ce point est par suite le point médian de deux points homologues M et M′, symétriques par rapport à (P), donc appartenant à D, qui est bien ainsi une droite de ($C_2$); il en est de même de $\Delta$.

*Courbe du complexe.* — Cherchons l'enveloppe des droites du complexe ($C_2$) contenues dans un plan (P); la droite $\Delta'$ commune à ce plan et à son homologue (P′), considérée comme appartenant à (F′), a son homologue $\Delta$ située dans (P); la courbe du complexe n'est autre que l'enveloppe des droites qui joignent les points homologues de $\Delta$ et $\Delta'$; comme ces points forment sur ces droites des divisions égales, la courbe est une parabole $\Pi$, et ($C_2$) est un complexe du second ordre. Si nous nous reportons à la figure 2, nous voyons que $\Pi$ touche $\Delta$ en B, $\Delta'$ en A′, a pour tangente au sommet la droite médiane CC′ de $\Delta$ et $\Delta'$, et pour foyer le pôle P du plan (P) par rapport au complexe ($C_1$).

*Cône du complexe.* — Ce cône est donc du second degré; déterminons-le d'une manière précise pour un point donné P : une première génératrice est la perpendiculaire en ce point à son plan polaire (P). Les droites du complexe situées dans ce plan et passant par P sont les tangentes menées de ce point à la courbe du complexe, c'est-à-dire les droites isotropes du point, de sorte que (P) donne une direction de sections circulaires du cône.

Les points doubles de la transformation de (F) en (F′) étant le point à l'infini, compté deux fois, sur l'axe X du déplacement hélicoïdal, et les points cycliques I, J des plans perpendiculaires à cet axe, le cône du complexe passe par la parallèle PY à X, et par les droites isotropes PI, PJ des plans perpendiculaires à l'axe, qui donnent ainsi les autres sections circulaires du cône.

Finalement, le cône du complexe n'est autre que le *lieu de l'arête d'un dièdre droit dont les faces contiennent respectivement la perpendiculaire au plan* (P) *menée par* P, *et le diamètre du complexe* ($C_1$) *qui passe par ce point.*

*Remarque.* — Revenons à la courbe Π du complexe ($C_2$) située dans un plan (P), parabole ayant pour foyer le pôle P du plan et tangente aux droites Δ et Δ′, symétriques par rapport à son axe; ces deux droites homologues font un même angle avec tout plan (R) perpendiculaire à l'axe X, et les points homologues M, M′ de ces droites déterminent sur elles des divisions égales; $\delta$ et $\delta'$, $m$ et $m'$ étant les projections sur (R) de Δ et Δ′, M et M′, les points $m$ et $m'$ déterminent sur $\delta$ et $\delta'$ des divisions égales, et comme le dièdre $\widehat{MXM'}$ est de sens et de grandeur invariables, il en est de même de son angle plan $\widehat{mxm'}$, d'où il résulte que $mm'$ enveloppe une parabole, projection de Π, tangente à $\delta$ et $\delta'$, ayant pour foyer la trace $x$ de l'axe X sur (R) : ainsi *toute parabole* Π *du complexe* ($C_2$) *se projette sur tout plan perpendiculaire à* X *suivant une parabole dont le foyer est la trace de l'axe sur ce plan.*

Cela résultait d'ailleurs aussi du fait que la conique du complexe est tangente aux plans isotropes passant par l'axe du déplacement, plans doubles de la transformation.

En résumé, tout point P de l'espace est le pôle d'un plan (P) par rapport au complexe ($C_1$) et le foyer d'une parabole Π du complexe ($C_2$), située dans ce plan, et ayant pour tangente au sommet la trace sur (P) du *plan médian* ($p$), des plans homologues (P) et $(P')$. Signalons encore que deux points homologues $P$ et $P'$ sont les foyers de deux paraboles du complexe $(C_2)$, paraboles égales, situées dans les plans homologues $(P)$ et $(P')$, de pôles $P$ et $P'$ par rapport à $(C_1)$, et que ces paraboles touchent la droite commune à leurs plans, respectivement en $A'$ et $A$, points homologues portés par cette droite (*fig.* 2).

*Cubiques attachées au complexe* $(C_2)$. — $S$ et $S'$ étant deux points homologues des figures $(F)$ et $(F')$, $MM'$ une droite de $(C_2)$ passant en $(S)$, cette droite $\Delta$ considérée comme appartenant à $(F)$ a pour homologue $\Delta'$ la droite $S'M'$; les lieux géométriques de $\Delta$ et $\Delta'$ sont les cônes $(S)$ et $(S')$ du complexe, cônes ayant $SS'$ pour génératrice commune, de sorte que le lieu de $M'$ est une cubique gauche passant par $S$ et $S'$; le lieu de $M$ est la cubique homologue, laquelle passe en $S$ et au point $\Sigma$ homologue, dans $(F)$, du point $\Sigma'$ de $(F')$ qui coïncide avec $S$; appelons $(M)$ et $(M')$ ces deux cubiques.

$(M)$ par exemple contient aussi les points doubles de la transformation de $(F)$ en $(F')$; elle a donc pour asymptote l'axe $X$ du déplacement hélicoïdal, et passe aux points cycliques des plans perpendiculaires à cet axe; elle se trouve par suite sur le cylindre de révolution déterminé par l'axe $X$ et par les deux points $S'$ et $S$ ou $\Sigma'$.

L'autre cubique $(M')$ appartient de même au cylindre de révolution déterminé par $X$ et par les deux points $\Sigma'$ ou $S$ et $\Sigma$. Comme $S'\Sigma'$ est la position que vient occuper $S\Sigma$ après le déplacement hélicoïdal qui amène $(F)$ en $(F')$, les deux cylindres sont symétriques par rapport au plan déterminé par l'axe et le point $S\Sigma'$; cela n'a rien d'étonnant puisque ces cylindres projettent, sur un même plan, deux cubiques égales et semblablement placées; d'ailleurs ces cylindres sont amenés à coïncider après le déplacement hélicoïdal, lequel fait coïncider aussi la cubique $(M)$ avec la cubique $(M')$.

On sait que, étant données deux figures homographiques quelconques à trois dimensions, les droites qui portent deux points homologues, les droites communes à deux plans homologues, les droites qui rencontrent leurs homologues forment un même complexe tétraédral qui a pour tétraèdre fondamental le tétraèdre des points doubles de la transformation. Cela est vrai pour deux figures égales, et le complexe ($C_2$) est un complexe tétraédral, auquel on appliquerait sans peine les propriétés des complexes tétraédraux.

DÉPLACEMENT CONTINU D'UNE FIGURE.

Si, dans tout ce qui précède, nous supposons les figures (F) et (F′) infiniment voisines, nous obtenons des propriétés du déplacement continu d'une figure.

C'est ainsi que les complexes ($C_1$) et ($C_2$) deviendront le *complexe des normales* aux trajectoires des points du système mobile pour une position du système, et le *complexe des tangentes aux trajectoires*, qui coïncide avec le *complexe des caractéristiques* des plans du système.

Les propriétés du déplacement sont bien connues (voir *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique*, I, p. 294, par M. d'Ocagne).

Bornons-nous à énoncer le théorème suivant dont la première partie est due à Chasles :

*Le lieu des tangentes aux trajectoires des points d'un système indéformable mobile qui, pour une position du système, passent en un point donné* S, *est un cône du second degré; ce cône contient la parallèle* SY *à l'axe instantané du déplacement et la tangente en* S *à la trajectoire de ce point, et peut être obtenu par l'intersection de deux plans rectangulaires tournant respectivement autour de ces droites. Le lieu des points de contact des tangentes est une cubique gauche tangente en* S *à la trajectoire de ce point, et ayant pour asymptote l'axe instantané; cette cubique se projette sur le plan mené par* S *perpendiculairement à l'axe suivant un cercle coupant l'axe et tangent en* S *à la projection de la tangente à la trajectoire de ce point.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de ce qui a été établi plus haut.

## II. — Figures inversement égales.

Ce sont deux figures dont l'une est superposable à la symétrique de l'autre par rapport à un plan ou à un point quelconque de l'espace.

A et A$'$, B et B$'$, C et C$'$ étant trois couples de points homologues de deux telles figures (F) et (F$'$), les plans axiaux des segments AA$'$, BB$'$, CC$'$ ont un point commun OO$'$, les tétraèdres OABC et O$'$A$'$B$'$C$'$ ayant leurs arètes respectivement égales, sont directement ou inversement égaux; ils ne peuvent l'être directement, car alors (F) et la figure directement égale définie par les points A$'$, B$'$, C$'$ considérés comme homologues de A, B, C auraient un point double, ce qui n'est pas. Les deux tétraèdres étant donc inversement égaux, OO$'$ est un point double de la transformation de (F) en (F$'$), et il est évidemment le seul à distance finie.

Ceci posé, considérons la figure ($F_1$) symétrique de (F) par rapport à ce point OO$'$, les deux figures ($F_1$) et (F$'$) sont directement égales, et ont deux points homologues confondus en O, de sorte que ($F_1$) peut être amenée en coïncidence avec (F$'$) par une rotation autour d'un certain axe OX (*fig.* 3).

La transformation de (F) en (F$'$) est appelée un *retournement*. Nous voyons donc qu'*un retournement équivaut à une symétrie par rapport à un certain point* OO$'$, *suivie d'une rotation autour d'un axe* OX *passant par ce point*.

Il est d'ailleurs manifeste que la symétrie par rapport au point double peut être remplacée par une symétrie par rapport au plan (R) perpendiculaire en O à OX, l'axe de rotation restant le même, mais l'angle de rotation étant augmenté de $\pi$.

On déduit immédiatement de là ce *théorème de Chasles : Tous les segments tels que* MM$'$ *ont leurs milieux m dans le plan* (R). O$m$ est la perpendiculaire commune à MM$'$ et à OX; ainsi *la perpendiculaire commune à* OX *et à toute droite* MM$'$ *est située dans le plan* (R).

Observons encore que *l'angle dièdre* $\widehat{MXM'}$ *est le même*, en grandeur et en sens, *pour tous les groupes de points homologues*, étant l'angle dont il faut faire tourner ($F_1$) pour l'amener en (F$'$).

*Conséquence.* — Considérons deux plans homologues (P) et (P$'$) de deux figures directement égales (F) et (F$'$) : les intersections respectives ($f$) et ($f'$) de ces figures et de ces plans sont des figures égales qui peuvent être regardées comme appartenant à deux figures *inversement* égales à trois dimensions, par exemple (F) et la symétrique ($F'_1$) de ($F'$) par rapport à ($P'$); et alors, en vertu du théorème de Chasles, on peut dire que les milieux des segments MM′ joignant les points respectivement homologues des plans homologues (P) et ($P'$) sont dans un même plan; c'est ce plan que nous avons appelé le *plan médian* des deux plans (P) et ($P'$) dans l'étude des figures directement égales.

*Éléments doubles.* — Revenons à deux figures inversement égales; nous avons deux points doubles sur OX, le point OO′ trouvé plus haut, et le point à l'infini sur cet axe, puisque les points homologues des deux figures qui appartiennent à cette droite forment deux divisions symétriques par rapport à OO′. Les deux autres points doubles de la transformation sont les points cycliques des plans perpendiculaires à OX.

Les plans doubles sont le plan (R) obtenu plus haut, le plan de l'infini, et les plans isotropes passant par OX.

### COMPLEXE ATTACHÉ A DEUX FIGURES INVERSEMENT ÉGALES.

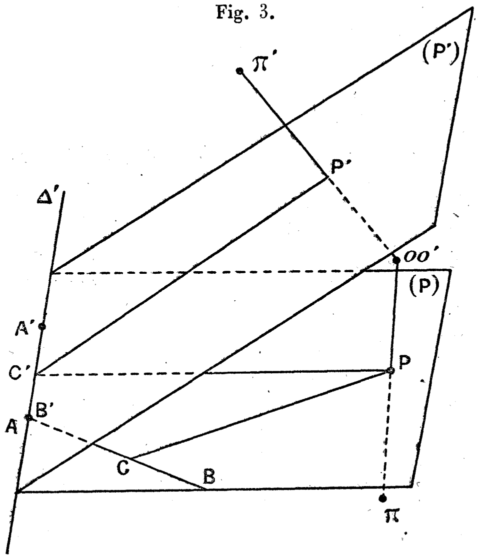
Il n'y a pas lieu de considérer ici les éléments médians relatifs aux éléments homologues des figures, ces éléments médians appartenant au plan double (R) d'après le théorème de Chasles. Il n'existe donc pas, pour deux figures inversement égales, de complexe linéaire analogue au complexe ($C_1$) de deux figures directement égales.

*Complexe des droites* MM′. — Mais les droites qui portent deux points homologues et les droites communes à deux plans homologues forment encore, comme pour deux figures homographiques, un même complexe tétraédral ($C_2$).

*Courbe du complexe.* — La courbe du complexe située dans un plan quelconque (P) est une conique tangente aux traces des plans doubles sur ce plan, donc une parabole $\Pi$ tangente à l'intersection $r$ de (P) et du plan double (R); cette parabole, étant aussi tangente aux plans isotropes passant par l'axe OX, se projette sur le plan (R) suivant une parabole de foyer O et tangente à $r$.

Nous pouvons reprendre en la modifiant légèrement la figure 2 faite plus haut : (P) étant le plan considéré, (P′) son homologue, $\Delta'$ leur droite commune, $\Delta$ son homologue, A le point commun à ces droites, A′ son homologue, B′ le point A considéré comme appartenant à (F′), B son homologue, C et C′ les points homologues milieux de AB et A′B′, la courbe du complexe du plan (P) est la parabole $\Pi$ enveloppe des droites joignant les points homologues de $\Delta$ et $\Delta'$; cette parabole touche $\Delta$ en B et $\Delta'$ en A′, A est

Fig. 3.




sur son axe, son foyer P est commun aux axes de symétrie de AB et A′B′; C et C′ étant les milieux de AA′ et BB′, la droite qui joint ces deux points n'est autre que la trace $r$ de (P) sur (R); cette droite est, comme on voit, la *tangente au sommet* de $\Pi$, et par suite aussi de la projection de cette parabole sur le plan double (R). (P′) étant le plan homologue de (P), la parabole $\Pi'$ de ce plan sera égale à $\Pi$ et placée par rapport à A′B′ comme $\Pi$ par rapport à AB, de sorte que le foyer de $\Pi'$ sera le point P′ homologue du foyer P de $\Pi$; le plan double est le plan ($p$C′C), $p$ milieu de PP′. Si $\pi$ et $\pi'$ sont les symétriques, par rapport à (P) et (P′), du point O projeté en P et P′ sur ces plans, les tétraèdres $\pi$PAB et $\pi'$P′A′B′ sont inversement égaux, $\pi$ et $\pi'$ sont homologues; il s'ensuit que le point O, qui est symétrique de $\pi$ par rapport à P et de $\pi'$ par rapport à P', est à lui-même son homologue, n'est autre que le point double OO' des deux figures. Finalement, nous obtenons pour la courbe du complexe située dans un plan (P) la *parabole qui a pour foyer la projection du point double sur ce plan et pour tangente au sommet la droite commune au plan* (P) *et au plan double* (R).

*Cône du complexe.* — Ce cône est du second degré; si S est son sommet, il est déterminé par SS' et par les droites joignant S aux points doubles de la transformation : droite SO, parallèle SY à l'axe OX, et droites isotropes passant par S dans le plan perpendiculaire à SY. Par suite, les plans perpendiculaires à l'axe donnent des sections circulaires de ce cône. Le plan perpendiculaire en S à SO a pour courbe du complexe une parabole de foyer S, de sorte que les génératrices du cône appartenant à ce plan sont isotropes, et que les plans perpendiculaires à SO donnent la deuxième direction de sections circulaires du cône. Finalement, *le cône du complexe relatif à un point* S *est le lieu de l'arête d'un dièdre droit dont les faces contiennent respectivement* SO *et la parallèle* SY *à l'axe* OX; sa trace sur le plan (R) est le cercle déterminé par le point O, par la trace de SS' et par la projection de S sur ce plan double.

### III. — Figures directement semblables.

On donne ce nom à deux figures dont l'une est égale à une figure directement homothétique de l'autre; de même deux figures sont inversement semblables quand l'une est égale à une figure inversement homothétique de l'autre.

Les positions de deux telles figures dans l'espace sont déterminées dès que l'on connaît trois points A, B, C non en ligne droite de l'une d'elles en même temps que leurs homologues A', B', C' dans l'autre, ce qui exige que les triangles ABC et A'B'C' soient semblables.

La sphère $(a)$ lieu des points dont le rapport des distances à A et A' est égal au rapport de similitude $\frac{AB}{A'B'}$ des deux triangles et les deux sphères analogues ($b$) et ($c$) ont deux points communs ($OO'$) et ($\omega\omega'$); chacun de ces points détermine avec les deux groupes de trois points donnés deux tétraèdres semblables; cette similitude ne peut être de même nature pour les deux points, car deux figures semblables ne peuvent avoir deux points doubles; par conséquent, les tétraèdres $OABC$ et $O'A'B'C'$ par exemple sont directement semblables, $\omega ABC$ et $\omega' A'B'C'$ inversement semblables; $OO'$ est un point double, et le seul, pour les figures directement semblables (F) et (F') définies par les deux groupes de trois points considérés.

On peut montrer comme il suit que les deux points $OO'$ et $\omega\omega'$ sont *réels :* (F) et (F') étant directement semblables, à l'aide d'une homothétie convenable, avec un centre quelconque, on peut déduire de (F) une figure ($F_1$) directement égale à (F'), figure qu'on peut amener en F' par un déplacement hélicoïdal d'axe X; de là résulte que tout plan (P) de (F) perpendiculaire à cet axe a un plan homologue (P') qui lui est parallèle; les cercles de (P) ont pour homologues des cercles de (P'), de sorte que les points cycliques de ces plans sont des points doubles de la transformation; le point à l'infini sur X est un autre point double, qui est réel; par conséquent le quatrième point double doit être réel, et les trois sphères considérées plus haut se coupent bien en des points réels.

Ceci posé, et $OO'$ étant le point double à distance finie de (F) et (F'), $k$ le rapport de similitude de (F') à (F), de sorte que

$$\frac{O'M'}{OM} = k,$$

M et M' désignant deux points homologues, construisons la figure ($F_1$) directement homothétique de (F) par rapport à $OO'$ dans le rapport $k$; les figures ($F_1$) et (F') sont directement égales et ont un point double, et l'on peut passer de la première à la seconde par une rotation autour d'un axe OX passant par ce point.

Ainsi, *on peut passer de* (F) *à* (F') *par une homothétie directe par rapport à un certain point* O, *suivie d'une rotation autour d'un axe contenant ce point;* ces deux transformations partielles sont d'ailleurs permutables.

*Éléments doubles.* — Les points doubles sont le point OO′, le point à l'infini sur l'axe X, et les points cycliques communs aux plans perpendiculaires à X.

Les plans doubles sont le plan (R) perpendiculaire en O à X, le plan de l'infini, et les plans cycliques passant par X. Deux points homologues M et M′ des deux figures étant tous deux du même côté, par rapport au plan double (R), que leur homologue commun $M_1$ dans $(F_1)$, sont eux-mêmes *du même côté de ce plan.*

Si $m$ est la trace de MM′ sur (R), on peut écrire

$$\frac{\overline{mM'}}{\overline{mM}} = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM}} = \frac{OM'}{OM} = k,$$

donc *la trace du plan* OMM′ *sur le plan* (R) *est la bissectrice de l'angle extérieur en* O *du triangle* OMM′, *et* (R) *contient les points tels que m des droites* MM′ *déterminées par* $\frac{\overline{mM'}}{\overline{mM}} = k$; c'est une généralisation du *théorème de Chasles* vu plus haut.

Les dièdres $\widehat{MXM'}$ sont égaux et de même sens, leur valeur commune étant l'angle dont il faut faire tourner $(F_1)$ autour de X pour amener cette figure en coïncidence avec (F′).

Les dièdres formés par deux plans homologues (P) et (P′) avec le plan double (R), étant homologues, sont égaux; autrement dit *deux plans homologues sont également inclinés sur le plan double.* Il en est de même de deux droites homologues.

## COMPLEXE DES DROITES MM′.

Comme pour deux figures homographiques quelconques, les droites qui portent deux points homologues, ou qui appartiennent à deux plans homologues, ou qui coupent leurs droites homologues, forment un complexe tétraédral dont le tétraèdre fondamnetal est le tétraèdre des points doubles.

*Courbe du complexe.* — Elle est de seconde classe, c'est la parabole tangente à l'intersection du plan donné (P) et de son homologue, à la trace de (P) sur le plan double, et aux intersections de ce même plan (P) avec les plans isotropes passant par l'axe X. Cette parabole se projette sur le plan (R) suivant une parabole de foyer O.

*Cône du complexe.* — Le cône de sommet S est du second degré, et déterminé par SS′ et par les droites joignant S aux points doubles de la transformation : droite SO, parallèle SY à l'axe OX, et droites isotropes passant par S dans le plan perpendiculaire à SY. Les plans perpendiculaires à SY donnent donc des sections circulaires du cône, qui se trouve ainsi défini par son sommet et le cercle du plan (R) qui passe par O, par la projection de S sur (R), et par la trace de SS′ sur ce même plan.

### VARIATION CONTINUE DE GRANDEUR D'UNE FIGURE DE FORME INVARIABLE.

On peut concevoir qu'une figure à trois dimensions varie en grandeur d'une façon continue en restant directement semblable à elle-même, ses divers points décrivant des trajectoires ; on a ainsi une sorte de généralisation du déplacement continu d'une figure. En prenant deux positions infiniment voisines de la figure, et appliquant ce qui a été dit plus haut, on est conduit à considérer le complexe des tangentes aux trajectoires pour une position déterminée de la figure, lequel coïncide avec le complexe des caractéristiques des plans de la figure : c'est encore un complexe du second ordre.

Comme pour une figure mobile de grandeur invariable, *le lieu des points dont les tangentes aux trajectoires, pour une position de la figure, passent par un point donné* S, *est une cubique gauche circulaire, et le lieu de ces tangentes est encore un cône orthogonal.*

## IV. — Figures inversement semblables.

Il résulte de ce qui a été dit plus haut que deux telles figures admettent un point double à distance finie et un seul.

En raisonnant comme pour deux figures directement semblables, nous verrions qu'*on peut passer d'une figure* (F) *à une figure* (F′) *qui lui est inversement semblable par une homothétie inverse par rapport à un certain point* O, *suivie d'une rotation autour* *d'un axe* X *contenant ce point;* ces deux transformations partielles sont permutables.

*Éléments doubles.* — Les éléments doubles sont les mêmes que dans le cas de deux figures directement semblables. Mais ici deux points homologues M et M′ sont *de part et d'autre du plan double* (R).

On démontrera aisément les propriétés suivantes : *la trace du plan* OMM′ *sur le plan double* (R) *est la bissectrice de l'angle* $\widehat{\mathrm{MOM}'}$; *le plan double* (R) *contient les points m des droites* MM′ *déterminés par* $\dfrac{\overline{m\mathrm{M}'}}{\overline{m\mathrm{M}}} = -k$, en appelant $k$ le rapport de similitude de (F′) à (F); c'est l'extension aux figures inversement semblables du *théorème de Chasles* obtenu plus haut pour les figures inversement égales.

*Corollaire.* — Considérons deux figures planes semblables $(f)$ et $(f')$ situées dans deux plans (P) et (P′); si nous les regardons comme appartenant à deux figures à trois dimensions (F), (F′) directement semblables, puis comme appartenant à deux figures à trois dimensions inversement semblables, par exemple (F) et la symétrique $(\mathrm{F}'_1)$ de (F′) par rapport au plan (P′) et si nous appliquons le théorème de Chasles généralisé, nous pouvons dire que, *étant données deux figures planes semblables* $(f)$ *et* $(f'')$, *si sur chaque droite* MM′ *joignant deux points homologues, on prend les points m et m′ déterminés par* $\dfrac{\overline{m\mathrm{M}'}}{\overline{m\mathrm{M}}} = k$, et $\dfrac{\overline{m'\mathrm{M}'}}{\overline{m'\mathrm{M}}} = -k$, en désignant par $k$ le rapport de similitude de $(f')$ à $(f)$, *les points m appartiennent à un même plan, ainsi que les points m′.*

On pourrait être tenté de croire que les figures $(m)$ et $(m')$ formées par l'ensemble des points $m$ et l'ensemble des points $m'$ sont semblables aux figures données : cela est vrai pour des figures directement semblables situées dans un même plan, mais non pour des figures inversement semblables d'un même plan, car alors $(m)$ et $(m')$ sont deux droites, quelles que soient les figures primitives.

A plus forte raison, le théorème n'est pas vrai pour deux figures non en même plan; sinon, en amenant à coïncider les deux plans de manière que les figures deviennent inversement semblables, la propriété serait encore vraie à la limite pour deux telles figures, ce qui n'est pas.

*Complexe des droites* MM'. — Les droites qui portent deux points homologues de deux figures inversement semblables et les droites communes à deux plans homologues constituent encore un complexe tétraédral auquel s'applique tout ce qui a été dit dans le cas des figures directement semblables, relativement à la courbe et au cône du complexe.

Signalons cette différence entre deux figures à trois dimensions directement ou inversement semblables : deux telles figures sont déterminées si l'on se donne le plan double, le point double de ce plan, et deux points homologues M et M', *du même côté du plan double ou de part et d'autre*, suivant que la similitude est directe ou inverse.

*Remarque générale.* — Dans les divers modes de transformation étudiés ci-dessus, un plan, les cercles de ce plan et sa droite de l'infini ont pour homologues un plan, les cercles de ce plan et sa droite de l'infini; par conséquent, *le cercle de l'infini se transforme en lui-même.* On démontre que ce sont les seuls modes de transformation qui conservent le cercle de l'infini (*Leçons de Cinématique*, Kœnigs, p. 334).

On a remarqué les propriétés communes aux quatre transformations. Signalons en particulier la suivante : *les droites joignant les points homologues de deux droites homologues sont les génératrices d'une même famille d'un paraboloïde hyperbolique;* dans le cas particulier où ces droites homologues se coupent, les droites MM' joignant deux points homologues enveloppent la parabole du complexe des droites MM' de ce plan.

Dans le cas de deux figures directement égales infiniment voisines, on a ce théorème : *Les tangentes aux trajectoires des points d'une droite* $\Delta$ *de la figure mobile, pour une position de cette figure, la droite n'appartenant pas au complexe des tangentes, sont les génératrices d'un même système d'un paraboloïde.*

Si la droite appartient au complexe des tangentes, les tangentes aux trajectoires de ses points sont dans un même plan, et enveloppent la courbe du complexe située dans ce plan, laquelle est la parabole ayant la droite pour tangente au sommet, et pour foyer le pôle du plan par rapport au complexe des normales, c'est-à-dire le point du plan qui, pour la position considérée de la figure mobile, se déplace normalement au plan.

*N. B.* — On pourra lire une étude élémentaire analogue à la précédente, et relative aux figures planes, dans la *Revue de l'enseignement des sciences* (année 1919, librairie Alcan).