

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 311-318

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__311_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Déterminer les courbes $y = f(x)$ telles que le segment TN intercepté sur Ox entre T pied de la tangente sur Ox, N pied de la normale sur Ox, soit constant, égal à $2a$, où a est une longueur donnée;

2° Construire la courbe C d'équation

$$x = t + L(1-t), \quad y = \sqrt{1-t^2}.$$

Calculer le segment TN. La courbe rencontre l'axe Ox en A, l'axe Oy en B. Donner sans calcul la valeur numérique du rayon de courbure en A. Calculer avec les tables de logarithmes le segment OA;

3° Calculer l'intégrale $\int y dx$, où y et x sont les fonctions du numéro précédent. Calculer l'aire limitée par OA, l'arc AB et BO. Calculer l'aire comprise entre Ox, Oy et l'arc infini issu de B (valeurs numériques à calculer avec les tables).

4° Calculer le volume engendré en tournant autour de Ox par un arc de la courbe C; valeur numérique correspondant à l'arc AB où à l'arc infini issu de B.

5° Calculer, en fonction de t , l'arc s de la courbe C compté à partir de B pour origine. Valeur numérique de l'arc AB.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° La famille de courbes de l'énoncé est définie par l'équation différentielle

$$y = \frac{2ay'}{1+y'^2}.$$

Posant $y' = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$, on l'intègre sous la forme

$$y = a \sin \varphi, \quad x = a[\cos \varphi + L(1 - \cos \varphi)] + K.$$

2° La courbe C est une courbe de cette famille, pour $a = 1$, $K = 0$. Elle présente sur Oy un point de rebroussement B d'où partent, à 45° sur les axes, une branche infinie asymptote à Ox et un arc AB rencontrant normalement Ox en A. Le segment TN vaut $2a = 2$; le rayon de courbure en A est 2;

$$\overline{OA} = L2 - 1 = -0,30685 \dots$$

$$3^\circ \quad \int y \, dx = \int \cos \varphi (1 + \cos \varphi) \, d\varphi = \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}.$$

L'aire limitée par OA, l'arc AB, BO a pour valeur

$$\left[\sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

L'aire comprise entre Ox , Oy et l'arc infini issu de B a pour valeur

$$\left[\sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

4° Le volume engendré par cette aire dans sa rotation autour de Ox a pour valeur

$$\int \pi y^2 \, dx = -\pi \left[\frac{\cos^2 \varphi}{2} + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{6}.$$

5° La différentielle de l'arc est définie par

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2} = \frac{dx}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

L'arc s compté à partir de B a pour valeur

$$s = \left[4 \cos \frac{\varphi}{2} + 2L \operatorname{tang} \frac{\varphi}{4} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}.$$

L'arc AB s'obtient en faisant $\varphi = \pi$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Les séries*

$$C(x) \equiv 1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2!} + \dots + \frac{\cos nx}{n!} + \dots,$$

$$S(x) \equiv \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2!} + \dots + \frac{\sin nx}{n!} + \dots$$

sont-elles convergentes? Trouver leur somme pour $x = \frac{\pi}{2}$. Calculer

$$\text{arc cos} \left[C \left(\frac{\pi}{2} \right) \right], \quad \text{arc sin} \left[S \left(\frac{\pi}{2} \right) \right].$$

2° La série

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{2} + \dots + \frac{\sin \left(\frac{x}{n} \right)}{n} + \dots$$

est-elle convergente?

3° La série

$$\sin^2 x + 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) + \dots + n \sin^2 \left(\frac{x}{n} \right) + \dots$$

est-elle convergente?

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Les séries $\frac{\cos nx}{n!}$ et $\frac{\sin nx}{n!}$ sont convergentes, car le terme général de chacune d'elles est inférieur en valeur absolue au terme général de la série e .

On a

$$C \left(\frac{\pi}{2} \right) = \cos 1; \quad S \left(\frac{\pi}{2} \right) = \sin 1.$$

2° La série $\frac{\sin \left(\frac{x}{n} \right)}{n}$ est convergente, son terme général étant équivalent à $\frac{x}{n^2}$, terme général d'une série convergente.

3° La série $n \sin^2 \left(\frac{x}{n} \right)$ est divergente, son terme général étant équivalent à $\frac{x^2}{n}$, terme général d'une série divergente.

(Lille, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Construire la courbe C définie par les équations

$$\begin{cases} x = 4 \cos u - \cos 4u, \\ y = 4 \sin u - \sin 4u. \end{cases}$$

On prend sur C , pour origine des arcs, le point A fourni par $u = 0$, pour sens positif, celui des u croissants. Soit MT la demi-tangente positive en un point M de C . Calculer en fonction de u : l'abscisse curviligne $\widehat{AM} = s$, l'angle $\widehat{(Ox, MT)} = \alpha$, le rayon de courbure.

Construire la développée de C .

II. On pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Déterminer deux fonctions $f(r)$

et $\varphi(\theta)$ de manière que les expressions

$$f(r) dx - \varphi(\theta) dy \quad \text{et} \quad \varphi(\theta) dx + f(r) dy$$

soient simultanément des différentielles totales.

C. 68. — III. Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy , une courbe C sur laquelle on a fixé un sens positif des arcs, MT la demi-tangente dans ce sens, Ou l'une des demi-droites qu'on peut distinguer sur le rayon vecteur du point M (indéfiniment prolongé), r la valeur algébrique (rapportée à Ou) de \overline{OM} . On pose

$$\left(\widehat{Ox, MT}\right) = \alpha, \quad \left(\widehat{Ou, MT}\right) = V, \quad \left(\widehat{Ox, Ou}\right) = \theta.$$

A l'aide des formules qui permettent d'exprimer les coordonnées cartésiennes de M en fonction de r et de θ et à l'aide des expressions classiques de $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, R (rayon de courbure affecté d'un signe), calculer $\cos V$, $\sin V$ et R en coordonnées polaires. Calculer la distance OK du point O au centre de courbure K , relatif au point M . Déterminer la courbe C de manière que la longueur OK et la longueur MK soient toujours égales.

C. 69. — ÉPREUVE PRATIQUE. — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires, M un point de coordonnées (x, y, z) , V le volume intérieur à la sphère de centre O et de rayon un. On pose $x + y + z = u\sqrt{3}$. Transformer l'intégrale triple

$$I = \iiint_V f(x + y + z) dx dy dz$$

en une intégrale simple $\int_{+2}^{+1} \varphi(u) du$.

Calculer complètement I , lorsqu'on fait successivement

$$f = L \left(1 + \frac{x + y + z}{\sqrt{3}} \right),$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{3} - (x + y + z)^2}.$$

(Poitiers, juin 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — On a une surface fermée S limitant un volume V . Établir la formule qui remplace l'intégrale triple

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz$$

appliquée à ce volume par une intégrale de surface appliquée à S.
Interprétation vectorielle.

Deuxième question. — Axes rectangulaires. Déterminer les courbes telles que le milieu de la normale en M, MN limitée à l'axe des x soit sur la parabole

$$y^2 = 2px.$$

Position de ces courbes par rapport à la parabole. Peut-on donner n'importe quelle valeur à la constante entrant dans l'équation de la famille de courbes trouvée.

C. 70. — MÉCANIQUE. — Une plaque ayant la forme d'un triangle rectangle isocèle OAB tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour du côté de l'angle droit OA placé suivant la verticale ascendante.

Une masse pesante de valeur m glisse sur le côté hypoténuse AB, elle ne peut quitter son support et elle est reliée au point A par un fil inextensible de masse négligeable.

La longueur naturelle du fil sans tension est l ; si l'on exerce une tension T, le fil s'allonge de x et la tension est proportionnelle à l'allongement : $T = kx$, k constante donnée.

A l'instant initial la longueur du fil est l et la vitesse relative de la masse m sur AB est nulle.

1° Former en projetant sur AB l'équation définissant le mouvement relatif de la masse pesante m sur le support mobile AB.

Étudier et caractériser ce mouvement suivant la grandeur de la rotation d'entraînement ω .

2° La plaque tournant à la vitesse de 300 tours à la minute, on constate que la masse m a un mouvement relatif d'oscillation de 150 tours à la minute.

Le poids de la masse m étant de 5^{kg} , on demande de calculer la constante k et l'amplitude de l'oscillation en supposant l'allongement x exprimé en mètres, la tension T en kilogrammes et en prenant

$$g = 10 \text{ m\grave{e}t.}/\text{sec.}^2, \quad l = 5 \text{ m.}$$

On définira la position de la masse m en prenant comme origine la position initiale m_0 et un axe m_0x descendant.

(Nancy, octobre 1923.)

C. 71 ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Déterminer r de façon que la dérivée de $e^{rx} \cos x$ soit $ae^{rx} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, a étant une constante. Quelle est, pour cette valeur de r , la dérivée d'ordre m de $e^{rx} \cos x$? Trouver le

développement en série entière de cette fonction et montrer que, pour x négatif, en négligeant les termes nuls, on a une série alternée.

II. Pour tout point M d'une ellipse donnée de foyers A et B , on pose

$$\left(\widehat{AB, AM}\right) = \alpha, \quad \left(\widehat{BA, BM}\right) = \beta.$$

Trouver la relation qui existe entre α et β . Calculer $\frac{d\beta}{d\alpha}$ en fonction de α . Trouver les points pour lesquels l'angle géométrique AMB est maximum.

III. On considère la courbe définie, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, par l'équation

$$x(x^2 - 3y^2) = ay^2.$$

où a est une constante. Construire cette courbe. Trouver le lieu des points M tels que les tangentes menées de M à la courbe aient leurs points de contact en ligne droite. En appelant Δ la droite des points de contact, trouver l'enveloppe des droites Δ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un pendule est constitué par une sphère, de 12^{cm} de diamètre, fixée à l'extrémité d'une tige cylindrique, de 0^m,90 de long et de 4^{mm} de diamètre. Cette tige est elle-même fixée à un couteau prismatique, de 6^{cm} de long et dont la section droite est un triangle isocèle, ayant 15^{mm} de base et 20^{mm} de hauteur. Ces trois pièces sont construites avec le même métal.

1° Calculer, à $\frac{1}{10}$ de seconde près, la durée de 1000 oscillations du pendule.

2° Calculer approximativement l'erreur que l'on commettrait en négligeant la masse du couteau et celle de la tige.

On donne $g = 9^m,81$.

(Clermont-Ferrand, novembre 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Les axes étant rectangulaires et θ étant un paramètre arbitraire, on donne la surface Σ définie par

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 \theta + z \sin \theta, \\ y &= \sin^3 \theta + z \cos \theta. \end{aligned}$$

1° Montrer que Σ est une surface développable et trouver son arête de rebroussement Γ . Quelle est la projection Γ' de Γ sur xOy et la relation de cette courbe Γ' avec la trace de Σ sur ce plan ;

2° Quelle est la pente du plan tangent à Σ par rapport au plan xOy . Montrer que la courbe Γ est une hélice (au sens général de ce mot); peut-on déduire ce résultat sans nouveau calcul de ce qui précède, ou, inversement, peut-on déduire certains des résultats précédents de cette dernière propriété établie directement;

3° On limite Σ à Γ et au plan xOy et l'on ne considère que la portion pour laquelle x, y, z sont positifs. Calculer la longueur de l'arc correspondant de Γ et l'aire de Σ .

C. 72. — II. Soit le trièdre de référence trirectangle $Oxyz$. Un point matériel M , de masse m , est soumis à une force constante F parallèle à Ox et à une force F' obtenue de la manière suivante. Par M , on mène le vecteur vitesse \vec{MV} et, par V , un vecteur \vec{VH} parallèle à Oz et de mesure algébrique constante h . La force F' est le moment de \vec{VH} par rapport au point M .

Cela posé, on lance M , au temps zéro, à partir de l'origine et avec le vecteur vitesse \vec{V}_0 , de composantes a, b, c .

1° Calculer les coordonnées de M au temps t . Calculer également sa vitesse en fonction de son abscisse x . Chercher l'hodographe. Dire dans quels cas la trajectoire Γ de M est une hélice ou bien une cycloïde.

2° On suppose V_0 dans le plan xOy . Calculer le rayon de courbure R de la trajectoire Γ en O . Montrer que si \vec{V}_0 tourne autour de O , en gardant une grandeur constante v_0 , le centre de courbure de Γ en O décrit une conique de foyer O . Vérifier que le produit du paramètre de cette conique par son excentricité est indépendant de v_0 .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Construire la courbe.

$$y = e^{-x} \sin x$$

dans l'intervalle $0 < x < \pi$.

On déterminera, en particulier, le point le plus haut, le point d'inflexion, les tangentes en ces points et les tangentes aux deux extrémités de la courbe. On prendra pour échelles :

Pour $x = 1$, $u = 20^{\text{mm}}$; pour $y = 1$, $u = 20^{\text{cm}}$.

Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x , en supposant cette aire homogène. Marquer ce point sur le graphique.

(Clermont, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 4. Calculer l'intégrale $\iint \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$

étendue à l'aire de l'ellipse

$$(E) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

- 1° En rassemblant les éléments situés sur chaque parallèle à Oy ;
- 2° En rassemblant les éléments situés sur chaque ellipse E_λ , homothétique et concentrique à E , dans le rapport λ ;
- 3° En ramenant l'intégrale double proposée à une intégrale curviligne, prise le long de E , et calculant cette dernière à l'aide d'une représentation paramétrique.

C. 73. — II. Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy . Sur chaque axe $u'Ou$ mené par O , tel que $\widehat{Ox, Ou} = \omega$, on prend un point M tel que $\overline{OM} = \rho$. Soit $v'Ov$ l'axe mené par O , tel que $\widehat{Ou, Ov} = +\frac{\pi}{2}$. Le point M décrivant une courbe $\rho = f(\omega)$, on appelle K le centre de courbure en M , MT la demi-tangente dans le sens des arcs croissants, V l'angle $\widehat{Ou, MT}$.

- 1° Rappeler les expressions de $\cos V, \sin V, dV$, en précisant les conventions de signe. En déduire les composantes de \overrightarrow{MK} suivant Ou et Ov .
- 2° En appelant H la projection orthogonale de O sur la normale en M , évaluer les composantes de MH suivant Ou et Ov .
- 3° Déterminer la courbe $\rho = f(\omega)$ de manière qu'on ait $\overrightarrow{MK} = \frac{8}{9} \overrightarrow{MH}$.
- 4° Pour quelle valeur de m l'enveloppe de la droite

$$x \cos \theta + y \sin \theta = a \cos m \theta$$

répond-elle à la question ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Faire le changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y}$ dans l'équation différentielle

$$2 \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 - z \frac{d^2 z}{dx^2} + 3z \frac{dz}{dx} + 2z^2 = e^x z^3.$$

En déduire l'intégrale générale de cette équation.

(Poitiers, juin 1926.)