Concours d'agrégation en 1926 (sujets de composition)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 305-311
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__305_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1926 (SUJETS DE COMPOSITION).

[*Nous avons un peu retardé la date de parution de ce numéro des* Nouvelles Annales *pour pouvoir y publier les sujets qui suivent; nous en publierons les solutions dès les premiers numéros de la prochaine année scolaire.* — L. R.]

Mathématiques élémentaires.

I. Nous conviendrons d'appeler cycle d'ordre n l'ensemble des nombres obtenus en permutant circulairement, de toutes les façons possibles, les chiffres d'un nombre N.

On caractérise un cycle par la donnée de son ordre et celle du plus petit de ses nombres. Par exemple le cycle d'ordre 3 du nombre 58 est formé des nombres 058, 580, 805.

1° Montrer qu'un diviseur commun à $10^n - 1$ et à l'un des nombres d'un cycle d'ordre n divise les autres nombres du cycle. Énoncer une réciproque de cette proposition.

2° Déterminer tous les cycles d'ordre 3 dont les nombres sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.

3° On considère les cycles d'ordre 6 dont les nombres sont, à l'ordre près, six termes consécutifs d'une progression arithmétique.

Établir que les six chiffres composant ces nombres sont distincts, que la raison R de la progression est un diviseur de $10^6 - 1$, et que le plus petit des nombres du cycle est un multiple du quotient de R par 9.

On recherchera enfin les limites entre lesquelles R doit être compris, et l'on en déduira la détermination des cycles considérés.

II. On donne, dans un plan, trois points O, A, ω. Après une rotation d'angle α et de centre ω, les points O et A prennent respectivement les positions O_α et A_α.

La droite AA_α coupe la circonférence de centre O_α et qui passe en A_α aux points A_α et M_α.

1° Étudier comment varie, avec α, le vecteur $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$.

2° Déterminer l'amplitude et le centre de la rotation qui permet, en général, de faire coïncider les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$. Lieu du centre de cette rotation quand α varie.

3° Montrer que la perpendiculaire menée de O_α à AA_α passe par un point fixe I. Lieu de ce point I quand, O et A restant fixes, ω décrit une circonférence donnée, passant par A, ou une circonférence donnée dont le centre est le milieu de AO.

4° Les points O et A étant donnés, ainsi qu'une droite D, construire les points ω et I sachant qu'ils sont sur la droite D. Discuter.

Mathématiques spéciales.

Un point M a pour coordonnées, par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy d'un plan $x = a\,\dfrac{t^3 - 3t}{t - \alpha}$ $y = a\,\dfrac{3t^2 - 1}{t - \alpha}$; ($a$ est une constante positive donnée).

Quand α est fixe et que t varie, le point M décrit une courbe C_α.

Quand α varie à son tour, les courbes C_α constituent une famille.

1° Construire le lieu du point double et le lieu du point d'inflexion réel de C_α.

2° Soient respectivement Δ_α, Δ'_α, Δ''_α, la tangente d'inflexion réelle, la droite qui joint les points d'inflexion, et l'asymptote de C_α. Construire les enveloppes de ces trois droites.

Il y a trois courbes C_α dont les asymptotes ont la même direction. Étudier la configuration des droites Δ'_α qui leur correspondent.

3° Pour quelles valeurs de α la courbe C_α possède-t-elle une boucle fermée? α étant choisi convenablement, exprimer par deux intégrales définies l'aire de cette boucle et la longueur de l'arc qui la limite.

4° Par un point N de Δ_α, on peut mener à une courbe C_α deux tangentes dont les points de contact A et B sont distincts du point d'inflexion considéré. La courbe C_α restant fixe, montrer que lorsque N varie sur Δ_α, la droite AB enveloppe une conique Γ_α.

On demande de trouver, quand α varie, le lieu des foyers des coniques Γ_α, de discuter leur genre, de trouver leur enveloppe.

Chaque conique Γ_α coupe son enveloppe en deux points. On demande l'enveloppe de la droite qui joint ces deux points.

5° Par un point M de C_α, on peut mener à cette courbe deux tangentes T, T' autres que la tangente en M. Soit γ_M la conique de foyer O, tangente aux trois droites Δ_α, T, T'. Trouver l'enveloppe de γ_M quand M se déplace sur C_α.

Calcul différentiel et intégral.

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x'' + x\,A(t) = 0, \tag{1}$$

où $A(t)$ désigne une fonction analytique de la variable indépendante t, réelle et régulière pour toutes les valeurs réelles et finies de t.

1° Démontrer que toute solution de cette équation peut se mettre sous la forme

$$x = \rho\cos\varphi,$$

ρ satisfaisant à l'équation différentielle

$$(2) \qquad \rho'' - \frac{c^2}{\rho^3} + \rho A(t) = 0,$$

où c désigne une constante à laquelle on peut donner une valeur arbitraire, autre que zéro (1 par exemple), tandis que φ a pour valeur

$$\int \frac{c\,dt}{\rho^2}.$$

Réciproquement, si ρ est une intégrale quelconque de (2) et φ une fonction primitive de $\frac{c}{\rho^2}$, l'intégrale générale de (1) est de la forme

$$C\rho\cos(\varphi + h),$$

C et h étant des constantes d'intégration. Toute solution $\rho(t)$ de l'équation (2) est régulière et de signe constant quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2° Il résulte de ce qui précède que l'équation (2) s'intègre au moyen d'une quadrature dès qu'on en connaît une solution particulière. Sous quelle forme les constantes d'intégration ρ_0 et ρ'_0 figurent-elles dans l'expression de l'intégrale générale? Interpréter le résultat en considérant les trajectoires du point analytique

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

et le lien qui existe entre les trajectoires correspondant aux diverses solutions de l'équation (2). Examiner le cas où A est une constante positive.

3° On suppose, dans cette troisième partie du problème, que $A(t)$ reste compris entre deux constantes positives M et m. Démontrer que les intégrales réelles de $x(t)$ de l'équation (1) sont *oscillantes*, les zéros et les points stationnaires se succédant alternativement à des intervalles moindres que $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$ et plus grands que $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$. Établir, dans les mêmes conditions, quelques propriétés des intégrales réelles $\rho(t)$ de l'équation (2). Montrer notamment que, si ρ_1 et ρ_2 sont deux valeurs stationnaires consécutives, on a

$$\frac{c}{\sqrt{M}} < \rho_1\rho_2 < \frac{c}{\sqrt{m}}$$

et que, dans le cas où les amplitudes d'oscillation $\rho_2 - \rho_1$ deviennent infiniment grandes, les intervalles $|t_2 - t_1|$ correspondants ne deviennent pas infiniment grands ni infiniment petits.

4° Examiner ensuite le cas où $A(t)$ est fonction périodique, de période égale à π. Montrer que, parmi les intégrales de (1), il en existe alors en général deux, linéairement distinctes, qui sont multipliées par les facteurs λ et $\frac{1}{\lambda}$ quand on change t en $t + \pi$, λ étant racine de l'équation du second degré à coefficients réels

$$\lambda^2 - k\lambda + 1 = 0.$$

Quelles sont les propriétés des intégrales réelles de (1) et (2) qui correspondent aux diverses hypothèses

$$k > 2 \quad \text{ou} \quad k < -2 \quad \text{ou} \quad k^2 < 4 \quad \text{ou} \quad k = \pm 2?$$

Montrer que la condition $k^2 < 4$ est suffisante, et la condition $k^2 \leqq 4$ nécessaire, pour que (2) admette une solution périodique. [On dit alors que les solutions de (1) sont stables.]

5° Démontrer que $A(t)$ étant toujours supposée périodique, le nombre N des zéros d'une intégrale réelle de (1), contenus dans l'intervalle (0, T) est donné par la formule

$$N = \alpha T + r,$$

α étant fixe et r restant borné.

6° On pose en particulier

$$A = q^2 + q_1 \cos 2t,$$

q et q_1 étant des constantes réelles, qui vérifient l'inégalité $|q_1| < q^2$. Démontrer que si l'intervalle $(q^2 - q_1, q^2 + q_1)$ ne renferme le carré d'aucun nombre entier, l'équation (1) n'admet que des solutions stables.

Mécanique rationnelle.

Étude de certains mouvements d'une toupie. — *La toupie est constituée par un disque circulaire plan homogène, de rayon 2a et de masse m, d'épaisseur négligeable, fixé à une aiguille perpendiculaire, de masse et d'épaisseur négligeables,* *de longueur a en dessous du disque jusqu'à la pointe et 2a au-dessus. L'action de la pesanteur est supposée assimilable à celle d'un champ uniforme, vertical, d'intensité g par unité de masse; on ne tiendra pas compte de la résistance de l'air.*

Les candidats pourront traiter les diverses parties dans l'ordre qui leur conviendra.

I. *La toupie étant animée d'un mouvement de rotation de* grande *vitesse angulaire autour de son axe repose par sa pointe sur un plan horizontal. On supposera que le frottement maintient cette pointe immobile et que la résistance du plan peut se traduire par une réaction unique appliquée à la pointe.*

a. Étudier et décrire succinctement le mouvement de la toupie dans le cas où, à certains instants de ce mouvement, l'aiguille a une vitesse nulle, la vitesse angulaire de la toupie étant alors ω. *En se limitant à une période de temps qui sépare deux repos successifs de l'aiguille, étudier le mouvement d'une façon plus précise en développant les éléments qui le déterminent suivant les puissances de* $\lambda = \frac{g}{a\omega^2}$ *supposé petit et en se bornant aux termes du premier degré en* λ.

b. Étudier et décrire succinctement le mouvement dans le cas où, à un certain instant de ce mouvement, l'aiguille passe par la verticale avec une vitesse angulaire ε. *En supposant* ε *petit, donner des valeurs approchées de la variation du temps et de la précession entre deux passages successifs par la verticale. Que devient le mouvement si l'on fait abstraction de l'action de la pesanteur?*

c. Déterminer les conditions d'un mouvement où l'aiguille garde une inclinaison constante sur la verticale; chercher le système des forces d'inertie et la réaction du plan horizontal. Ce mouvement étant réalisé, on suppose qu'on applique au centre de gravité de la toupie une force horizontale perpendiculaire à l'axe, d'intensité f; comment tendent à varier les vitesses? Quel serait de même l'effet d'une percussion qui aurait même point d'application, même direction et pour intensité P?

II. *La pointe de la toupie est engagée dans une rainure* *circulaire horizontale, de rayon* ρa, *qui permet tout déplacement angulaire de l'aiguille et tout déplacement de la pointe dans la rainure; la résistance de cette rainure peut ainsi se traduire par une réaction normale, appliquée à la pointe. Chercher des équations différentielles définissant le mouvement, en prenant pour variables l'abscisse angulaire de la pointe dans la rainure et les angles d'Euler qui définissent la position de la toupie. Chercher s'il existe un mouvement tel que l'aiguille ou son prolongement rencontre l'axe de la rainure en un point fixe.*