NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. SUDRIA

Sur un théorème de calcul vectoriel et ses applications

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 298-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__298_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR UN THÉORÈME DE CALCUL VECTORIEL ET SES APPLICATIONS ;

PAR J. SUDRIA.

1. Soient une grandeur scalaire u, fonction d'un point P, et d'autre part une surface S ayant deux côtés et limitée par un contour C orienté; considérons le côté de cette surface tel que les sens de la demi-normale et du contour forment une association sinistrogire; $\mathbf{n}$ désignant un vecteur unité dirigé suivant cette demi-normale, on a

$$(\alpha) \qquad \int_S \operatorname{grad} u \wedge \mathbf{n}\, dS = \int_C u\, dP.$$

Nous avons donné une démonstration directe de ce théorème [1] sans faire intervenir les axes de coordonnées; signalons, pour éviter des redites, une autre démonstration qui consiste à *projeter* l'égalité vectorielle sur les trois axes; on trouve ainsi trois égalités qui résultent simplement du théorème de Stokes.

La formule de Stokes et la formule que nous donnons plus haut ont donc la même origine, mais leurs formes différentes peuvent les rendre diversement propices à certaines applications.

2. Considérons deux surfaces S_1 et S_2 : la première, lieu d'un point P_1; la deuxième, d'un point P_2. Ces surfaces étant limitées par des contours C_1 et C_2, on établit le sens de parcours d'après les conventions précédentes.

Dans ce qui suit, l'opération grad ou rot sera affectée des indices 1 ou 2, suivant que cette opération sera faite par rapport à un point P_1 ou un point P_2; r est la distance de ces deux points.

Posons

$$v = \operatorname{grad}_1 \frac{1}{r} \times \mathbf{n}_1$$

et

$$\mathbf{q} = \mathbf{n}_1 \wedge \operatorname{grad}_1 \frac{1}{r},$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 15 février 1926.

nous allons démontrer que

$$(\beta) \qquad \mathrm{grad}_2 v = \mathrm{rot}_2 \mathbf{q}.$$

Mais on vérifie aisément, puisque $\mathbf{n}_1$ ne dépend pas des points P_2, que

$$v = - \quad \mathrm{grad}_2 \frac{1}{r} \times \mathbf{n}_1 = - \mathrm{div}_2 \left(\frac{\mathbf{n}_1}{r}\right),$$

$$\mathbf{q} = - \mathbf{n}_1 \times \mathrm{grad}_2 \frac{1}{r} \quad = - \mathrm{rot}_2 \left(\frac{\mathbf{n}_1}{r}\right);$$

il s'agit de montrer que

$$\mathrm{grad}_2 \, \mathrm{div}_2 \left(\frac{\mathbf{n}_1}{r}\right) = \mathrm{rot}_2 \, \mathrm{rot}_2 \left(\frac{\mathbf{n}_1}{r}\right).$$

Or, la différence des deux membres est

$$\Delta'_2 \left(\frac{\mathbf{n}_1}{r}\right),$$

lequel se réduit, puisque $\mathbf{n}_1$ ne dépend pas de P_2, à

$$\mathbf{n}_1 \Delta_2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0,$$

....

Application des théorèmes précédents. — Supposons que les surfaces S_1 et S_2 soient celles de deux feuillets de puissances Π_1 et Π_2; la face choisie sur chacune d'elles étant celle chargée de magnétisme positif; le potentiel créé par un élément de S_1 en P_2 est, d'après un résultat dont l'interprétation, sinon la forme, est classique :

$$\Pi_1 \mathbf{n}_1 \times \mathrm{grad}_1 \left(\frac{1}{r}\right) dS_1,$$

et, pour tout le feuillet,

$$V = \Pi_1 \int_{S_1} \mathbf{n}_1 \times \mathrm{grad}_1 \left(\frac{1}{r}\right) dS_1.$$

Le vecteur induction en P_2, provenant du feuillet S_1, est

$$\mathbf{B} = - \mathrm{grad}_2 V.$$

Le flux de $\mathbf{B}$ sortant par la face positive de S_2 peut se remplacer par une circulation

$$\Phi_1 = - \Pi_1 \int_{C_2} \mathbf{Q} \times dP_2,$$

Q étant, d'après (β),

$$\int_{S_1} \mathbf{n}_1 \wedge \operatorname{grad}_1 \left(\frac{1}{r}\right) dS_1,$$

c'est-à-dire, d'après (α),

$$-\int_{C_1} \frac{dP_1}{r},$$

ou enfin

$$\Phi_1 = \Pi_1 \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{dP_1 \times dP_2}{r}.$$

L'énergie potentielle des deux feuillets en présence est

$$-\Pi_2 \Phi_1 = -\Pi_1 \Pi_2 M$$

avec

$$M = \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{dP_1 \times dP_2}{r}.$$

C'est la formule de Neumann démontrée sans l'intervention des coordonnées.