Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 280-284

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__280_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.33.

(*Calcul différentiel et intégral, épreuve pratique; énoncé publié en janvier* 1926, *p.* 118).

SOLUTION

Par JACQUES DEVISME.

1° On demandait d'intégrer le système

$$(S)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{-3x+4y-z}{2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x+z, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3x-12y+9z}{2}, \end{cases}$$

système linéaire à coefficients constants. En cherchant des solutions de forme

$$x = \alpha\, e^{rt}, \qquad y = \beta\, e^{rt}, \qquad z = \gamma\, e^{rt},$$

on trouve facilement

$$r = 0, \qquad \alpha = \beta = \gamma,$$

$$r = 1, \qquad \alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{3},$$

$$r = 2, \qquad \alpha = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{9},$$

d'où la solution générale

$$(1) \qquad \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t}, \\ y = C_1 + 2C_2 e^t + 4C_3 e^{2t}, \\ z = C_1 + 3C_2 e^t + 9C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

En introduisant les valeurs initiales x_0, y_0, z_0 pour $t = 0$, il vient

$$C_1 = 3x_0 - 3y_0 + z_0, \qquad C_2 = \frac{-5x_0 + 8y_0 - 3z_0}{2}, \qquad C_3 = \frac{x_0 - 2y_0 + z_0}{2}.$$

2° L'équation aux dérivées partielles

$$(E) \qquad \frac{-3x + 4y - z}{2} p + (-x + z) q = \frac{3x - 12y + 9z}{2}$$

a pour système linéaire adjoint le système (S). Comme les équations (1) s'écrivent

$$\begin{aligned} C_1 &= 3x - 3y + z, \\ C_2 e^t &= \frac{-5x + 8y - 3z}{2}, \\ C_3 e^{2t} &= \frac{x - 2y + z}{2}, \end{aligned}$$

l'intégrale générale de (E) sera

$$(5x - 8y + 3z)^2 = (x - 2y + z) F(3x - 3y + z).$$

La surface intégrale qui passe par l'axe des x correspond à

$$25x^2 = x F(3x)$$

et a pour équation

$$3(5x - 8y + 3z)^2 = 25(x - 2y + z)(3x - y + z).$$

C'est un cône du second degré.

3° Enfin l'équation

$$\frac{-3x + 4y - z}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + (-x + z) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{3x - 12y + 9z}{2} \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

a pour solution

$$f(x, y, z) = \Phi \left[3x - 3y + z, \frac{x - 2y + z}{(5x - 8y + 3z)^2} \right],$$

où Φ est arbitraire.

Autre solution par A. Monjallon.

Question C.36.

(*Mathématiques générales, épreuve théorique de mécanique; énoncé publié en janvier* 1926, *p.* 121.)

SOLUTION.

Par A. MONJALLON.

1° Le point matériel M, de masse m est mobile dans le plan vertical (Q) [axes xOy, Ox vertical et dirigé vers le bas] et soumis à son poids mg et à une force $mk\overrightarrow{MO}$. La fonction des forces est alors

$$U = m\left[gx - \frac{k}{2}(x^2+y^2)\right],$$

et les lignes de niveau sont des cercles de centre I $\left(x = \frac{g}{k},\ y = 0\right)$: on sait d'ailleurs que les deux forces mg et $mk\overrightarrow{MO}$ se composent en une seule, proportionnelle à la distance et dirigée vers le point I.

2° Le point M étant mobile sur un cercle de rayon a et dont le point le plus haut est O, les positions d'équilibre correspondent aux maximum et minimum de MI, c'est-à-dire aux points O et A (A point le plus bas du cercle). L'équilibre est stable en A ou en O suivant que $g - ak$ est positif ou négatif; équilibre indifférent si $g - ak$ est nul.

3° Le théorème de la force vive permettra d'étudier le mouvement du point sur le cercle. Avec les données initiales de l'énoncé [mobile en A, $v_0 = 2\sqrt{a(g-ak)}$], cette équation donne immédiatement

$$2a\frac{d\theta}{dt} = v_0 \cos\theta \qquad \left(\theta = \widehat{Ox, OM}\right),$$

c'est-à-dire

$$t = \frac{2a}{v_0} \text{L} \tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

4° La réaction du cercle dans le mouvement précédent est

$$R = m[6(g-ak)\cos^2\theta - g];$$

si $5g - 6ak$ est négatif, R est constamment négative, dirigée vers l'extérieur du cercle. Si $5g - 6ak$ est positif, elle s'annule pour une valeur α telle que

$$\cos^2\alpha = \frac{g}{6(g-ak)}.$$

Question C.41.

(*Mathématiques générales, épreuve théorique de mécanique; énoncé publié en janvier* 1926, *p.* 124.)

SOLUTION.

Par A. MONJALLON.

1° Un disque circulaire homogène est mobile autour de son axe (horizontal) et un point P de la circonférence du disque est attiré par un point fixe A, situé au-dessous du centre O et sur la verticale de ce point, la force correspondante étant $k\overrightarrow{PA}$.

Dans ces conditions, θ étant l'angle de OP avec OA, le moment de la force par rapport au point O vaut $-ka\mathrm{R}\sin\theta$ et l'équation différentielle du mouvement est

$$m\frac{\mathrm{R}^2}{2}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -ka\mathrm{R}\sin\theta,$$

le mouvement est donc synchrone de celui d'un pendule simple de longueur

$$\lambda = \frac{m\mathrm{R}g}{2ka}.$$

2° Si, lorsque OP est horizontal, l'attraction subie par P égale le poids du disque, on aura

$$mg = k\sqrt{a^2+\mathrm{R}^2},$$

d'où

$$\lambda = \frac{\mathrm{R}}{2}\sqrt{1+\frac{\mathrm{R}^2}{a^2}},$$

dont les variations avec a sont évidentes.

Question C.55.

(*Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en mars* 1926, *p.* 181.)

SOLUTION.
Par CH. PIEDVACHE.

1° La surface donnée (S)

$$x = v\cos u - a\sin u, \qquad y = v\sin u + a\cos u, \qquad z = au$$

est engendrée par une droite (u = const.) qui reste horizontale, tangente au cylindre $x^2+y^2=a^2$, le point de contact décrivant l'hélice $v=0$.

Les trajectoires orthogonales des courbes u = const. et v = const. ont respectivement pour équations

$$v = au + \mathrm{C}_1$$
$$v = a\sqrt{2}\,\mathrm{tang}(u\sqrt{2}+\mathrm{C}').$$

2° Les asymptotiques sont les génératrices et les courbes

$$2v = au + \mathrm{C},$$

et, comme les équations (S) entraînent

$$x^2+y^2 = a^2+v^2,$$

ces dernières courbes sont bien sections de S par les hyperboloïdes

$$(H) \qquad 4x^2 + 4y^2 = (z - C)^2 + 4a^2.$$

3° Les surfaces (Σ), trajectoires orthogonales des hyperboloïdes H sont engendrées par les courbes qui, dans les plans passant par Oz, coupent à angle droit les méridiennes des (H) : dans le plan $y = 0$ elles sont définies par

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{x^2 - a^2}{4x^2}$$

dont l'intégration est immédiate.

4° L'équation aux rayons de courbure principaux de (S) s'écrit

$$a^2 R^2 - a^2 R \sqrt{a^2 + v^2} - (a^2 + v^2)^2 = 0;$$

elle entraîne, entre ces rayons, la relation indépendante des coordonnées

$$(R_1 + R_2)^4 + a^2 R_1 R_2 = 0.$$

Autre solution par A. MONJALLON.