Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 278-280
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__278_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2459.

(1922-1923, p. 403.)

On donne dans un plan une courbe C *et un point* O. *Une courbe* G *de grandeur invariable tourne autour du point* O *et rencontre* C *en un point variable* M. *Trouver le point caractéristique de la tangente à* G *en* M. R. B.

SOLUTION.

Par l'AUTEUR.

Soient MT, MN la tangente et la normale à G en M. Désignons par P_0 le plan fixe, par P_1 le plan mobile lié à G, par P_2 le plan mobile lié à l'angle TMN. Les centres instantanés des rotations mutuelles de ces trois plans, I_{01}, I_{02}, I_{12} sont en ligne droite.

Or I_{01} est en O, I_{12} est en γ, centre de courbure de G en M. Donc I_{02} est sur $O\gamma$. D'autre part il est aussi sur la normale à C en M. Ce point I_{02} est donc déterminé : en le projetant sur la tangente, on aura le point caractéristique cherché.

2469.

(1923-1924, p. 315.)

Q *étant une quadrique donnée, soit* $AB_1CA_1BC_1$ *un hexagone formé avec six génératrices de* Q, *appartenant alternativement à l'un et à l'autre système. Soient* α *le point de rencontre de* BC_1 *et de* B_1C, α' *le conjugué harmonique de* α *par rapport au segment* BC_1. *Soient* β, β', γ, γ' *les points analogues* (β' *est sur* CA_1, γ' *sur* AB_1).

Démontrer qu'il existe une cubique gauche, tracée sur Q *et passant par* α, β, γ, α', β', γ'. R. B.

SOLUTION.

Par M. ÉMILE BALLY.

Les deux systèmes de génératrices d'une quadrique qui contient une cubique donnée étant distinguées en génératrices-*cordes* et en génératrices-*transversales*, les paires de génératrices transversales attachées aux paires de points d'incidence sur la cubique des diverses génératrices-cordes forment une involution. Réciproquement, la condition nécessaire et suffisante pour que la quadrique définie par les trois droites de support de trois paires de points contienne la cubique qui passe en ces points est que les trois paires de génératrices *de l'autre système* de la quadrique unies à ces points forment une involution [1].

Or, les six points (α, α'), (β, β'), (γ, γ') de l'énoncé forment en définitive la figure suivante :

Si l'on considère la quadrique Q qui porte les trois droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, les deux couples de génératrices *de l'autre système* qui passent respectivement aux deux couples (α, α') et (β, γ) sont conjugués harmoniques, et il en est de même des couples relatifs à (β, β') et (α, γ) ainsi que des couples (γ, γ') et (α, β).

Les trois couples de génératrices qui passent en (α, α'), (β, β'), (γ, γ') se correspondent donc dans l'involution *attachée à l'homographie cyclique de troisième ordre définie par le triplet de génératrices relatives à* α, β, γ.

2484.

(1925-1926, p. 23.)

Si l est la longueur d'une lemniscate, I *le moment d'inertie de la courbe (supposée homogène et de densité linéaire égale à l'unité) par rapport à son point double,* S *l'aire limitée par la courbe, on a la relation*

$$l\mathrm{I} = 4\pi \mathrm{S}^2.$$

A. Labrousse.

Solution

Par A. Cabantous.

La lemniscate d'équation

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$$

a pour élément d'arc

$$ds = \frac{a\,d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

de sorte que

$$\mathrm{I} = 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\omega}\, d\omega = 4a^3 \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

$$l = 4a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} = 4a \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

[1] Si (M, M'), (N, N'), (P, P') sont les trois paires de points, les quatre plans MNP, MN'P', M'NP', M'N'P sont concourants, ainsi que les quatre plans M'N'P', M'NP, MN'P, MNP', et les deux points de concours, conjugués par rapport à la cubique qui porte les six points, sont unis à la corde qui joint les points de contact des deux génératrices-cordes, tangentes à la cubique, de la quadrique qui contient les trois droites MM', NN', PP' et la cubique. (Voir *Géométrie synthétique des unicursales de troisième classe,* par E. Bally, Paris, Gauthier-Villars, Note finale, p. 97.)

en prenant t égal à $\sqrt{\cos 2\omega}$. Il en résulte enfin

$$l\mathrm{I} = 16a^4 \mathrm{I}_0 \mathrm{I}_2 \qquad \left(\text{en posant } \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n\,dt}{\sqrt{1-t^4}}\right).$$

Or on sait (Question **2483**, *N. A.*, décembre 1925, p. 91) que

$$\mathrm{I}_0 \mathrm{I}_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Il vient donc bien

$$l\mathrm{I} = 4\pi a^4;$$

c'est bien la formule demandée, l'aire de la lemniscate étant, comme il est élémentaire, égale à a^2.

Autre solution par H. MENNESSIER.