Solution de question de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 247-248

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__247_0>

SOLUTION DE QUESTION DE LICENCE.

Question C.26.

[*Calcul différentiel et intégral; épreuve pratique; énoncé publié en décembre* 1925, *p.* 94.]

SOLUTION
par M. L. MENESSIER.

On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z^2+z+1)},$$

et l'on demande de calculer la valeur de l'intégrale $\int f(z)\,dz$ le long des cercles C de centre O ne passant par aucun point singulier.

La fonction $f(z)$ admet le pôle *double* $z=2$ et les deux pôles *simples*

$$z = \alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z = \beta = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Considérons un cercle C_0 de rayon très grand; si ce dernier augmente indéfiniment, $|zf(z)|$ tend vers zéro et $\int_{C_0} f(z)\,dz$ tend aussi vers zéro. Donc le *résidu* R_∞ *au point à l'infini, de* $f(z)$, *est nul.*

Sur un cercle C_1 de rayon > 2, nous avons

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 2i\pi(R_2 + R_\alpha + R_\beta),$$

R_p étant le résidu de $f(z)$ au point $z=p$.

Comme $R_\infty = 0$, on a aussi

$$R_2 + R_\alpha + R_\beta = 0$$

et

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 0.$$

Soit un cercle C_2 de rayon compris entre 1 et 2,

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = 2i\pi(R_\alpha + R_\beta) = -2i\pi R_2,$$

et comme

$$R_2 = \lim_{z \to 2} \left[\frac{d}{dz} (z-2)^2 f(z) \right] = \lim_{z \to 2} \left[\frac{-(2z+1)}{(z^2+z+1)^2} \right] = -\frac{5}{49},$$

il vient

$$\int_{C_2} f(z)\, dz = \frac{10}{49} i\pi.$$

Enfin pour un cercle C_3 de rayon inférieur à 1,

$$\int_{C_3} f(z)\, dz = 0.$$

Autre solution par A. MONJALLON.