NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. LABROUSSE

Sur les courbes planes dont les longueurs d'arcs sont invariantes par homographie

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 225-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__225_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[P¹ 1 b]

SUR LES COURBES PLANES DONT LES LONGUEURS D'ARCS SONT INVARIANTES PAR HOMOGRAPHIE ;

Par A. LABROUSSE.

1. Considérons une correspondance homographique (H) entre les points de deux plans π et π' distincts ou superposés.

Nous nous proposons de : *Trouver toutes les courbes* Γ *du plan* π *telles qu'un arc quelconque de* Γ *ait même longueur que l'arc homologue de la courbe* Γ' *du plan* π', *transformée de* Γ *par l'homographie* (H).

2. *Cas particulier.* — Examinons d'abord le cas simple où *les droites à l'infini des deux plans* π *et* π' *se correspondent.*

Prenons pour origines de coordonnées dans π et π' deux points homologues O et O'. Un cercle (C) du plan π, centré en O, a pour homologue dans π' une ellipse (C') du centre O'.

Dans le plan π', prenons pour axes de coordonnées $O'x'$, $O'y'$ les axes de symétrie de l'ellipse (C'). Aux axes $O'x'$, $O'y'$ correspondent dans le plan π Ox et Oy qui sont aussi rectangulaires.

Nous rapportons le plan π à ces axes Ox et Oy.

On voit aisément que l'homographie (H) est alors définie par

$$x' = ax, \qquad y' = by, \tag{1}$$

a et b désignant deux constantes, que l'on peut toujours supposer positives (en changeant, s'il le faut, le sens positif des axes dans le plan π).

Les courbes Γ cherchées vérifient la relation

$$dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2,$$

ou, d'après (1),

$$(a^2 - 1)\,dx^2 + (b^2 - 1)\,dy^2 = 0,$$

on obtient tout de suite en intégrant

$$y = \varepsilon x \sqrt{\frac{1 - a^2}{b^2 - 1}} + C \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

Donc : *Dans le cas particulier considéré, les courbes* Γ *sont des droites* D *parallèles à deux directions fixes.*

Ces droites sont réelles si

$$(a^2-1)(b^2-1) \leqq 0,$$

imaginaires dans le cas contraire.

Remarquons que si $a=b$ l'affinité (1) devient une similitude, et les droites D deviennent les droites isotropes du plan π.

3. *Cas général. Équation différentielle des courbes* Γ. — Indiquons quelle est dans le cas général la forme réduite des formules de correspondance. La droite de l'infini D' du plan π' a pour homologue dans le plan π une droite D à distance finie. De même, Δ, droite de l'infini du plan π, a pour homologue dans π' une droite Δ' à distance finie.

Le point O' de π' à l'infini dans la direction normale à Δ' a pour homologue un point O sur D, et le point ω de π à l'infini dans la direction normale à D a pour homologue dans π' un point ω' sur Δ'. Prenons dans le plan π deux axes rectangulaires Ox, Oy issus de O, Ox étant confondu avec OD.

De même, prenons dans π' deux axes rectangulaires $\omega'x'$, $\omega'y'$ issus de ω', $\omega'x'$ étant confondu avec $\omega'\Delta'$. On voit alors que Oy et $\omega'y'$ sont homologues et que, les coordonnées étant supposées homogènes, les équations

$$x=0, \qquad y=0, \qquad z=0$$

entraînent respectivement

$$x'=0, \qquad z'=0, \qquad y'=0.$$

Si l'on revient aux coordonnées absolues, on voit que l'homographie (H) est définie par les relations

$$x' = a\frac{x}{y}, \qquad y' = \frac{b}{y}, \tag{2}$$

a et b désignant deux constantes qu'on peut supposer positives.

4. Cela posé, les courbes Γ cherchées vérifient la relation

$$dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2$$

ou, en tenant compte des formules (2),

$$a^2(y\,dx - x\,dy)^2 + b^2\,dy^2 = y^4(dx^2 + dy^2). \tag{3}$$

Si l'on désigne par T le point où la tangente à Γ au point (x, y) rencontre Ox, par θ l'angle de cette tangente avec Ox, la relation (3) s'écrit

$$a^2\overline{\mathrm{OT}}^2 + b^2 = \frac{y^4}{\sin^2\theta}.$$

Cette nouvelle forme conduit à choisir pour nouvelles variables θ et $x_0 = \overline{\mathrm{OT}}$, c'est-à-dire à définir Γ comme enveloppe d'une droite

$$x = x_0 + y\cot\theta.$$

Le point de contact de cette droite avec son enveloppe vérifie

$$y = \frac{dx_0}{d\theta}\sin^2\theta.$$

La nouvelle équation différentielle est

$$a^2x_0^2 + b^2 = \left(\frac{dx_0}{d\theta}\right)^4 \sin^6\theta$$

ou

$$\frac{dx_0}{\sqrt[4]{a^2x_0^2 + b^2}} = \pm\frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{\sin\theta}}.$$

On est donc ramené à deux quadratures qui, nous allons le voir, se réduisent à une seule.

5. *Intégration par les fonctions elliptiques* (¹). — Le point M qui décrit Γ a pour coordonnées

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{dx_0}{d\theta}\sin\theta\cos\theta,\\ y &= \frac{dx_0}{d\theta}\sin^2\theta,\end{aligned}\right. \tag{4}$$

θ et x_0 étant liés par

$$\frac{(dx_0)^2}{\sqrt{a^2x_0^2 + b^2}} = \pm\frac{(d\theta)^2}{\sin^3\theta}.$$

(¹) Le lecteur qui ne serait pas familier avec la théorie des fonctions elliptiques peut passer immédiatement aux paragraphes 8 et suivants : *Propriétés et construction des courbes* Γ *à partir de leur équation différentielle.*

Comme l'angle θ est défini à $k\pi$ près, on peut supposer $\sin\theta > 0$ et écrire

$$(5)\qquad \frac{dx_0}{\sqrt[4]{a^2x_0^2+b^2}} = \varepsilon\frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{\sin\theta}} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Prenons maintenant les nouvelles variables t et ρ définies par

$$(6)\qquad a^2x_0^2+b^2 = b^2t^4, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\rho^2} \qquad (t > 0,\ \rho > 0).$$

De (6) on tire

$$x_0 = \varepsilon'\frac{b}{a}\sqrt{t^4-1}, \qquad dx_0 = \varepsilon'\frac{b}{a}\frac{2t^3\,dt}{\sqrt{t^4-1}} \qquad (\varepsilon' = \pm 1),$$

$$\theta = \arc\sin\frac{1}{\rho^2}, \qquad d\theta = \varepsilon''\frac{2\,d\rho}{\rho\sqrt{\rho^4-1}} \qquad (\varepsilon'' = \pm 1,\ \varepsilon''\cos\theta < 0).$$

Si l'on porte dans (5), on obtient

$$(7)\qquad m\frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^4-1}} = \varepsilon_1\frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{\rho^4-1}},$$

en posant

$$m = \frac{\sqrt{b}}{a} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon''}{\varepsilon'}.$$

On est donc ramené à une seule quadrature.

Avec les nouvelles variables t et ρ, les coordonnées de M s'écrivent

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \sqrt{b}\left(\varepsilon' m\sqrt{t^4-1} - \varepsilon\varepsilon''\dfrac{t}{\rho}\sqrt{\rho^4-1}\right), \\ y = \varepsilon\sqrt{b}\,\dfrac{t}{\rho}. \end{cases}$$

6. Il reste à évaluer l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^4-1}}.$$

Envisageons la fonction $p(u)$ de Weierstrass définie par l'équation différentielle

$$p'^2 = 4p^3 + p$$

et posons

$$(9)\qquad t = \frac{1}{2}\frac{p'(u)}{p(u)},$$

u étant choisi de manière que l'on ait $t > 0$ (il suffit de changer s'il le faut u en $-u$).

On aura alors

$$t^4 - 1 = \left(p - \frac{1}{4p}\right)^2,$$

$$\sqrt{t^4 - 1} = \pm\left(\frac{1}{4p} - p\right).$$

Si l'on observe que p supposé réel est positif en vertu de l'équation différentielle qui le définit, et que si p tend vers zéro, t tend vers $+\infty$, on voit que seul le signe $+$ convient. Donc

$$\sqrt{t^4 - 1} = \frac{1}{4p} - p.$$

On tire ensuite de (9)

$$dt = \frac{1}{2}\,\frac{pp'' - (p')^2}{p^2}\,du = \left(p - \frac{1}{4p}\right)du,$$

d'où

$$I = -\int \frac{4p^3 + p}{4p^2}\,du = -\int p\,du - \int \frac{du}{4p},$$

et en introduisant la fonction $\zeta(u)$ associée à $p(u)$

$$I = \zeta(u) - \int \frac{du}{4p}.$$

Pour achever l'intégration, décomposons la fonction elliptique $\frac{1}{4p}$ en éléments simples.

Soit α un zéro de $p(u)$, on a

$$p(\alpha) = 0, \qquad p'(\alpha) = 0, \qquad p''(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

La formule de Taylor appliquée à $p(u)$ au point α nous donne

$$p(u) = p(\alpha) + (u - \alpha)p'(\alpha) + (u - \alpha)^2\,\frac{p''(\alpha)}{2} + \ldots$$

ou

$$p(u) = \frac{(u - \alpha)^2}{4} + \ldots.$$

Dans un parallélogramme de périodes, $p(u)$ a donc un seul zéro qui est double et congru à α. D'où il résulte que $\frac{1}{4p}$ admet α pour pôle double, la partie principale relative à ce pôle étant $\frac{1}{(u-\alpha)^2}$.

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{4p} = p(u-\alpha) + C.$$

Si l'on fait $u = 0$ dans cette identité, il vient

$$0 = p(-\alpha) + C,$$

d'où

$$C = -p(\alpha) = 0.$$

Il reste

$$\frac{1}{4p} = p(u-\alpha),$$

et l'on a

$$-\int \frac{du}{4p} = \zeta(u-\alpha).$$

Donc, enfin,

$$I = \zeta(u) + \zeta(u-\alpha).$$

7. Si l'on pose de même

$$\rho = \frac{1}{2}\frac{p'(v)}{p(v)},$$

on voit que l'intégrale générale de l'équation différentielle (7) est définie par

$$m[\zeta(u) + \zeta(u-\alpha)] - \varepsilon_1[\zeta(v) + \zeta(v-\alpha)] = C,$$

C désignant une constante.

Quant aux coordonnées (8) du point M, elles deviennent

$$(10)\quad \begin{cases} x = \varepsilon'\sqrt{b}\left\{ m[p(u-\alpha) - p(u)] - \varepsilon_1 \frac{p(v)}{p(u)}\frac{p'(u)}{p'(v)}[p(v-\alpha) - p(v)] \right\}, \\ y = \varepsilon\sqrt{b}\,\frac{p'(u)p(v)}{p'(v)p(u)}. \end{cases}$$

Adjoignons aux axes Ox, Oy du plan π un troisième axe Oz normal à π, et posons

$$(11)\quad z = m[\zeta(u) + \zeta(u-\alpha)] - \varepsilon_1\zeta[(v) + \zeta(v-\alpha)].$$

Nous pouvons alors énoncer ce théorème :

Les courbes Γ cherchées sont (le plan π étant supposé horizontal) les projections sur le plan π des courbes de niveau de *la surface représentée paramétriquement par les équations* (10) *et* (11).

Propriétés et construction des courbes Γ.

8. Nous allons construire les courbes Γ en nous servant uniquement de leur équation différentielle. Indiquons auparavant diverses propriétés de ces courbes qui résultent immédiatement de cette équation.

I. Reprenons l'équation différentielle sous sa forme primitive :

$$(1)\qquad (a^2x^2+b^2-y^4)y'^2-2a^2xyy'+a^2y^2-y^4=0.$$

Elle montre que par tout point $M(x, y)$ du plan passent deux courbes Γ. Celles-ci sont réelles si l'on a

$$(2)\qquad a^4x^2-(a^2x^2+b^2-y^4)(a^2-y^2)\geqq 0.$$

La courbe limitant les régions où (2) est vérifiée est une quartique Σ d'équation

$$x^2=\frac{(b^2-y^4)(a^2-y^2)}{a^4y^2}.$$

Sa forme est indiquée sur la figure (page 234) dans l'hypothèse $m<1$, c'est-à-dire $a>\sqrt{b}$.

II. On sait que la courbe Σ est l'enveloppe des courbes intégrales Γ ou bien le lieu de leurs points de rebroussement. On vérifie aisément qu'on se trouve ici dans le second cas.

III. L'équation (1) est vérifiée si

$$y^2(a^2-y^2)=0.$$

Il y a donc au moins 3 droites parmi les courbes intégrales.

La droite $y=0$ qui a pour homologue la droite de l'infini du plan π' est une solution étrangère. Les droites $y=\pm a$, dont les homologues sont à distance finie, seules sont intéressantes.

D'autre part, on se rend compte aisément qu'il n'y a pas d'autres courbes intégrales rectilignes; il suffit de remarquer que si D est une droite faisant partie des Γ, le point à l'infini de D a son homologue aussi à l'infini; d'où il résulte que D doit être parallèle à $y=0$. On retrouve ce résultat connu : *Il y a dans le* *plan π deux droites Δ_1 et Δ_2, telles que la correspondance établie par* (H) *entre les points de ces droites et ceux de leurs homologues est une égalité.*

IV. Si, en un point M d'une courbe intégrale Γ_0, la tangente est parallèle à Ox, ce point vérifie

$$y^2(a^2-y^2)=0.$$

Or, l'inégalité (2) n'est pas satisfaite pour $y=0$. Donc, M est sur l'une des droites $\Delta_1 \Delta_2$, par exemple, sur Δ_1 d'équation $y=a$. Les deux courbes Γ passant par M sont Δ_1 et une seconde courbe dont la pente en M est

$$y'=\frac{2a^3x}{a^2x^2+b^2-a^4}\neq 0.$$

Il s'ensuit que la courbe Γ_0 est identique à Δ_1.

Donc, *exception faite pour les droites Δ_1 et Δ_2, aucune courbe Γ n'admet de tangente parallèle à Ox.*

V. Les courbes Γ ont des tangentes parallèles à Oy. Le lieu de leurs points de contact est la quartique Σ' d'équation

$$y^4=a^2x^2+b^2.$$

Elle est tracée en pointillé sur la figure.

VI. Si M est un point d'une courbe Γ où la tangente est verticale, Γ traverse en ce point la quartique Σ'. Donc, en M, y' passe par l'infini en changeant de signe, et M ne peut être point d'inflexion de Γ.

Soit maintenant M un point d'inflexion de Γ à tangente non verticale.

En ce point $y''=0$. D'autre part, si après avoir dérivé par rapport à x, l'équation différentielle (1), on y fait $y''=0$, il reste

$$y^3y'(1+y'^2)=0.$$

Or, nous avons déjà observé qu'au point M on a

$$y\neq 0.$$

Donc, en M, $y'=0$, et la courbe Γ est une des droites Δ_1, Δ_2.

Nous pouvons dire : *exception faite pour les droites Δ_1, Δ_2, aucune courbe Γ n'admet de point d'inflexion.*

VII. Envisageons un point M d'abscisse x_0 sur l'une des droites $y = \pm\sqrt{b}$ sur $y = \sqrt{b}$, par exemple. Il passe par M deux courbes Γ dont les tangentes ont pour pentes

$$y' = \frac{a\sqrt{b} \pm b}{a x_0}.$$

Les équations de ces tangentes :

$$x_0(ay \pm b) - x(a\sqrt{b} \pm b),$$

sont linéaires en x_0. D'où cette propriété :

Les tangentes aux courbes Γ, *aux points situés sur les deux droites* $y = \pm\sqrt{b}$, *passent par l'un ou l'autre des deux points fixes* F *et* F′ *ayant pour coordonnées*

$$x = 0, \qquad y = \pm\frac{b}{a}.$$

Dans le cas de la figure ci-après ($a > \sqrt{b}$), ces points sont situés entre les deux droites $y = \pm\sqrt{b}$. Ces points FF′, qu'on pourrait appeler *foyers du plan* π, ont une signification géométrique simple : ce sont les cercles de rayon nul du faisceau formé par les cercles du plan π qui ont pour homologues des cercles dans le plan π'. On voit aussi que tout angle du plan π ayant pour sommet F ou F′ a pour homologue un angle égal dans le plan π'.

VIII. On peut se poser une question analogue à la précédente et chercher l'enveloppe de la tangente à la seconde courbe Γ qui passe par un point variable sur Δ_1 ou Δ_2. On obtient une conique d'équation

$$\frac{x^2}{a^2 - \frac{b^2}{a}} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Cette conique a pour foyers les points F, F′, et Δ_1, Δ_2 sont ses tangentes aux extrémités β, β' de l'axe focal.

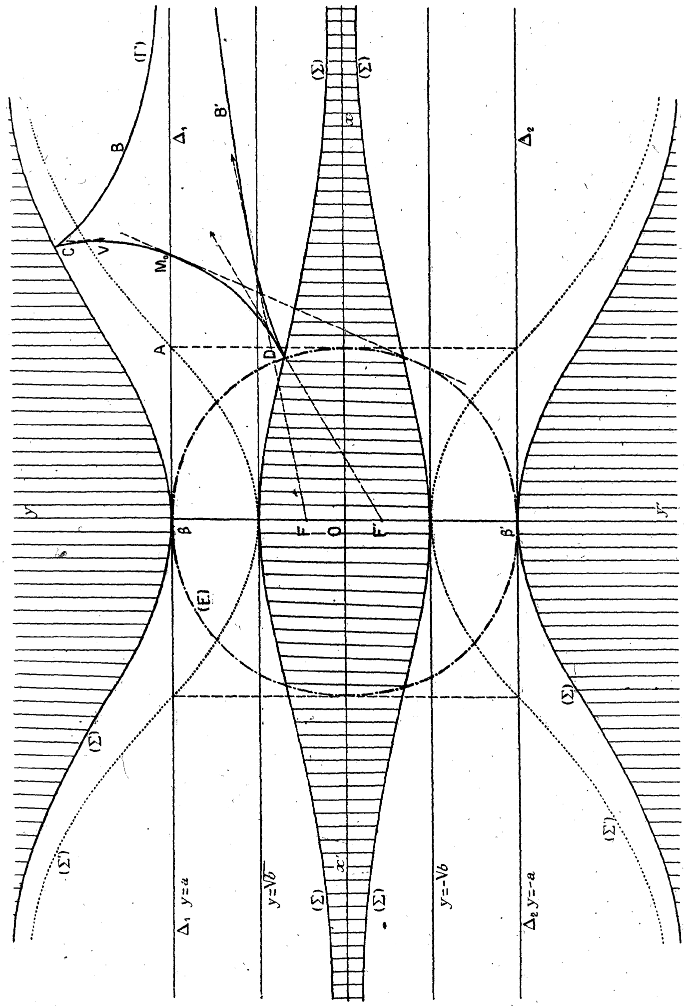
Dans le cas $a > \sqrt{b}$, c'est une ellipse E représentée en trait mixte sur la figure.

9. *Construction de* Γ. — La construction de la quartique sépa-

ratrice Σ conduit à distinguer trois cas :

$$a > \sqrt{b}, \qquad a = \sqrt{b}, \qquad a < \sqrt{b}.$$

Nous nous bornerons à étudier le premier, les deux autres n'introduisant pas de modification profonde dans la forme des courbes Γ.



La courbe Σ présente la forme indiquée, et les courbes Γ ne peuvent pénétrer dans les régions hachurées.

La courbe Σ', lieu des points à tangente verticale, est figurée en trait pointillé. En dehors de deux points de contact $y = \pm\sqrt{b}$, situés sur Oy, elle n'a aucun point commun avec Σ.

Les droites Δ_1 et Δ_2 sont des tangentes à Σ.

Partons d'un point M_0 de Δ_1 ayant son abscisse positive; pour fixer les idées, supposons-le à droite du point A où Δ_1 rencontre Σ'.

Il passe par M_0 une seule Γ curviligne. La tangente en M_0 à cette courbe est la seconde tangente qu'on peut mener de M_0 à l'ellipse E, et l'on voit que sa pente est positive.

1° Faisons d'abord croître y à partir de a; nous obtenons un arc M_0 VC, la tangente en V étant verticale, et C étant un rebroussement sur Σ.

Il part ensuite du point C un second arc CB. La valeur de y' au point C est négative; comme y' ne peut s'annuler à distance finie, y' reste négatif sur CB, et y décroît sur CB quand x croît. En outre, y, borné inférieurement par zéro, a pour $x = +\infty$ une limite y_1 positive ou nulle. On obtient donc une branche infinie CB admettant une asymptote

$$y = y_1.$$

Précisons cette asymptote. Tout d'abord on aura

$$\lim \frac{y}{x} = 0 \quad (\text{pour } x = +\infty).$$

D'autre part, y'' ne pouvant s'annuler, y' varie dans le même sens et croît avec x, mais y' ne peut s'annuler à distance finie; il part d'une valeur négative. Donc sur CB,

$$y' < 0.$$

Il suit de là que y' a une limite y'_1 pour $x = +\infty$, et puisque

$$\lim \frac{y}{x} = \lim y',$$

on a

$$y'_1 = \lim y' = 0.$$

Nous allons maintenant déduire de là la valeur de y_1. Pour cela, dans l'équation différentielle (1), faisons tendre x vers $+\infty$; y tend vers y_1 et y' vers zéro. Il nous faut connaître la limite de xy'. Or, sur l'arc CB, on peut écrire

$$y = y_1 + \frac{\alpha}{x^k} + \frac{\alpha'}{x^{k'}} + \dots \qquad (0 < k \leqslant k' \leqslant \dots);$$

et l'on voit aisément, avec ce développement, que $\lim xy' = 0$.

On a donc, en passant à la limite,

$$y_1^2(a^2 - y_1^2) = 0.$$

Comme on a $y_1 \geqq 0$, on aura, soit $y_1 = 0$, soit $y_1 = a$.

L'hypothèse $y_1 = 0$ est à rejeter. En effet, si Ox était asymptote de la branche CB, celle-ci rencontrerait la droite $y = \sqrt{b}$ en un point où la tangente couperait l'axe des y au-dessus du segment FF'; elle ne pourrait donc passer par l'un des points F et F'. On a donc $y_1 = a$.

Ainsi, *la branche infinie* CB *est asymptote à* Δ_1.

2° Partons à nouveau du point M_0, et faisons maintenant décroître y à partir de a, nous obtenons un premier arc M_0D, D étant un rebroussement sur Σ. On voit comme plus haut qu'il part du point D une seconde branche infinie DB', sur laquelle y croît avec x. Elle ne peut rencontrer Δ_1. Si, en effet, elle rencontrait Δ_1 en un point M_1, la tangente à DB' en M_1 couperait Oy entre F et β, et par suite, ne pourrait être tangente à l'ellipse E.

y est donc borné supérieurement par a, et en raisonnant comme on l'a déjà fait, on voit que y a une limite égale à a. Donc, *la branche infinie* DB' *a aussi pour asymptote* Δ_1.

Si l'on observe que l'équation différentielle (1) se reproduit si l'on change de signe x ou y, ou x et y à la fois, on voit que par symétrie par rapport aux axes Ox, Oy, ou par rapport à l'origine, on déduirait de la courbe construite trois autres courbes répondant à la question.