Certificat de géométrie supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 217-219

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__217_1>

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Soit la surface réglée unicursale* S (*axes rectangulaires ou non*)

$$(S) \qquad x = t, \qquad y = t^2 + u, \qquad z = t^3 + 3ut.$$

Expliquer sans calcul *que la cubique* $u = 0$ *est une asymptotique.*

Équation de S. *Vérifier que, quel que soit a, la transformation*

$$X = x, \qquad Y = y + a, \qquad Z = z + 3ax,$$

transforme S *en elle-même. En déduire* sans calcul *que les cubiques* $u =$ const. *sont asymptotiques.*

2° *Les plans osculateurs de la cubique* $u = 0$ *coupent* S *suivant une génératrice et une parabole* C : t_0 *étant le paramètre du point d'osculation, trouver la relation liant u et t le long de* C. *En chaque point de* S *passent deux paraboles* C : *elles forment un système conjugué. Quelle est leur enveloppe?*

3° S *peut être représentée par les équations*

$$x = \frac{t_0 + t_1}{2}, \qquad y = \frac{t_0^2 + t_1^2 + 4t_0t_1}{6}, \qquad z = \frac{t_0t_1(t_0 + t_1)}{2}.$$

Le système (t_0, t_1) *est conjugué. Enveloppe des courbes* t_0, *ou* t_1 : *la déterminer* sans calcul. *Équation aux dérivées partielles relative à ce système.*

4° *Soit sur* S *une famille de courbes définie par l'équation*

$$f\left(u, t, \frac{dt}{du}\right) = 0.$$

Comment obtient-on l'équation différentielle des courbes conjuguées.

5° *On pose*

$$t = \theta_1 + \theta_2, \qquad u = (\theta_1 - \theta_2)^2.$$

Définir les courbes θ_1, θ_2. *En déduire que la surface possède* ∞^1 *modes de génération comme surface de translation.*

Indications sur la solution. — 1° La surface S est une surface du troisième ordre, dite surface de Cayley.

La génératrice rectiligne

$$t = \text{const.}$$

est contenue dans le plan osculateur de la cubique $u = 0$ au point correspondant. Ce plan étant ainsi tangent à la surface, la cubique est une asymptotique.

La transformation indiquée équivaut à la transformation

$$(1) \qquad v = u + a.$$

Les cubiques $v = 0$ sont des asymptotiques, comme transformées homographiques de la cubique $u = 0$.

2° La parabole C, correspondant au point d'osculation $t = t_0$, est définie par l'équation

$$(2) \qquad (t - t_0)^2 + 3u = 0.$$

Les deux paraboles qui passent par un point vérifient évidemment l'équation

$$(3) \qquad du\,\delta t + dt\,\delta u = 0$$

des lignes conjuguées. L'enveloppe des paraboles C est la cubique $u = 0$.

3° Les courbes t_0 et t_1 ne sont autres que les paraboles C, d'où les propriétés indiquées. L'équation aux dérivées partielles, relative à ce système de lignes conjuguées, est

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t_0 \partial t_1}\frac{t_0 - t_1}{2} + \frac{\partial \omega}{\partial t_0} - \frac{\partial \omega}{\partial t_1} = 0.$$

4° L'équation différentielle demandée est

$$f\left(u,\ t,\ -\frac{dt}{du}\right) = 0,$$

d'après l'équation (3).

5° Le changement de coordonnées indiqué donne

$$x = \theta_1 + \theta_2, \qquad y = 2(\theta_1^2 + \theta_2^2), \qquad z = 4(\theta_1^3 + \theta_2^3).$$

Si l'on rapproche ce résultat du n° 1, il est évident que la surface admet ∞^1 modes de génération comme surface de translation.

Épreuve pratique. — C.58. — 1° *On considère la surface* (m, m_1, μ *constantes; t et t_1 paramètres curvilignes*)

$$x = \mu(t^3 + 3mt^5) + \frac{1}{\mu}(t_1^3 + 3m_1 t_1^5),$$

$$y = (1 - \mu^2 t^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\mu^2} + \frac{2m}{\mu^4} + \frac{3m}{\mu^2}t^2\right],$$

$$z = \left(1 - \frac{t_1^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}}[\mu^2 + 2m_1\mu^4 + 3m_1\mu^2 t_1^2].$$

Former son ds^2 : il est indépendant de μ.

2° *Intégrer l'équation différentielle des asymptotiques.*

3° *Courbure totale de la surface. Courbure moyenne.*

(Lille, octobre 1925.)