NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 215-217

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__215_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.25.

[*Calcul différentiel et intégral*, *épreuve théorique*, *énoncé publié en décembre* 1925, *p.* 94.]

SOLUTION
par A. MONJALLON.

1. On demande d'intégrer le système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xz^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y}(1 + z + zx^2).$$

La première équation donne

$$z = \frac{1}{u - x^2},$$

u étant fonction arbitraire de y. Il vient alors

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{u'}{(u - x^2)^2},$$

et la seconde équation se transforme en une équation linéaire en u

$$u' = \frac{u+1}{y},$$

qui a pour intégrale

$$u = Cy - 1.$$

La solution du système proposé est donc

$$z = \frac{1}{Cy - x^2 - 1}.$$

Elle dépend d'une constante arbitraire C, ce qui était à prévoir, le système proposé satisfaisant à la condition d'intégrabilité.

2. Pour que le système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xz^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = F(x, y, z),$$

admette une solution dépendant d'une constante arbitraire, il faut qu'il vérifie la condition d'intégrabilité qui est

$$\frac{\partial F}{\partial x} + 2xz^2 \frac{\partial F}{\partial z} = 4xz\,F.$$

Cette équation aux dérivées partielles conduit au système

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{2xz^2} = \frac{dF}{4xzF}.$$

Prenons trois intégrales premières, ce seront

$$y = C_1,$$
$$\frac{1}{z} + x^2 = C_2,$$
$$F = C_3 z^2.$$

La fonction $F(x, y, z)$ la plus générale sera alors

$$F(x, y, z) = z^2 \varphi\left(x^2 + \frac{1}{z}, y\right),$$

la fonction φ étant arbitraire.

Question C.12.

[*Analyse supérieure; épreuve pratique; énoncé publié en novembre* 1925, *p.* 55].

Solution

par J. de Caumont.

On demande de prouver que la surface S d'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{1 + u^2}{u^2(1 - u^2)^3}\,du^2 + \frac{2\,du\,dv}{u(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{dv^2}{1 - u^2}$$

est applicable sur une surface de révolution Σ, engendrée par une chaînette en tournant autour de sa base.

La variable v ne figurant pas dans l'élément linéaire donné, il convient à une surface de révolution dont les lignes $u =$ const. seront les parallèles. On mettra en évidence les trajectoires orthogonales de ces courbes en écrivant

$$ds^2 = \frac{1}{1 - u^2}\left[dv + \frac{du}{u\sqrt{1 - u^2}}\right]^2 + \frac{2\,du^2}{(1 - u^2)^3},$$

et il reste à identifier avec l'élément linéaire de Σ qui s'écrit

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + dz^2,$$

c'est-à-dire, parce que

$$a^2\,dr^2 = (r^2 - a^2)\,dz^2,$$

$$d\sigma^2 = \frac{r^2}{r^2 - a^2}\,dr^2 + r^2\,d\varphi^2.$$

On posera donc

$$r = \frac{k}{\sqrt{1 - u^2}},$$

et l'égalité

$$\frac{2\,du^2}{(1 - u^2)^3} = \frac{r^2\,dr^2}{r^2 - a^2}$$

donne immédiatement

$$a = k = \sqrt{2};$$

enfin

$$dv + \frac{du}{u\sqrt{1 - u^2}} = \sqrt{2}\,d\varphi.$$

La méridienne de la surface Σ a pour équation

$$r = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

On demandait enfin la valeur absolue de la torsion d'une ligne asymptotique de S. On sait que cette torsion est un élément géodésique et que, R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux, on a

$$\left|\frac{1}{T}\right| = \frac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}},$$

$\left|\frac{1}{T}\right|$ est donc égale à la racine carrée du module de la courbure totale, qui se conserve quand on passe de S à Σ.

Dans le cas présent, la courbure totale de Σ, surface de révolution minima, est égale en module au carré de la courbure de la chaînette $\frac{a^2}{r^4}$. Donc

$$\left|\frac{1}{T}\right| = \frac{a}{r^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - u^2).$$