Agrégation des sciences mathématiques (session de 1925)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 200-214

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__200_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (SESSION DE 1925).

Problème de Calcul différentiel et intégral.

On désigne par k une constante positive, par $f(x)$ une fonction positive et continue pour toutes les valeurs positives de x, ayant une dérivée première continue ; $f(x)$ peut d'ailleurs être discontinue pour $x = 0$. On considère alors l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + f(x) = 0, \tag{1}$$

définie par les valeurs initiales x_0 et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = x'_0$, pour

$$t = t_0 (x_0 > 0).$$

1° *Montrer qu'il existe un nombre positif T, fini ou infini, tel que l'intégrale $x(t)$ soit définie et positive à l'intérieur de l'intervalle $(t_0,\ t_0+T)$ et tende vers zéro quand t tend vers t_0+T.*

Indiquer comment varie $x(t)$ dans cet intervalle.

2° *Si $f(x)$ reste supérieure à un nombre positif quand x tend vers zéro, T possède une valeur finie. Il est d'ailleurs possible de choisir x_0 et x'_0 de manière que la valeur correspondante de T soit finie, pour toutes les fonctions $f(x)$ satisfaisant aux conditions du premier alinéa.*

3° *En désignant par $F(x)$ une fonction primitive de $-f(x)$ et posant*

$$G(x) = 2F(x) - 2F(x_0) + x_0'^2,$$

démontrer que l'inégalité $\left|\frac{dx}{dt}\right| < \sqrt{G(x)}$ est vérifiée dans tout l'intervalle $(t_0,\ t_0+T)$ et que si $x'_0 \leqq 0$, il en est de même de l'inégalité

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| > \sqrt{G(x)} - k(x_0 - x).$$

Si $f(x)$ est, pour x voisin de zéro, un infiniment grand ayant pour partie principale $\frac{\mu}{x^{1+\alpha}}$ $(\alpha > 0)$, déduire des deux inégalités précédentes la valeur principale de $x(t)$ en fonction de l'infiniment petit $(t_0 + \mathrm{T} - t)$.

[*On suppose, pour éviter toute difficulté accessoire, que les termes négligés dans l'expression de $f(x)$ sont d'un ordre déterminé et inférieur à $1 + \alpha$.*]

4° *Les hypothèses précédentes étant conservées et la fonction $\varphi_n(x)$ étant définie, à partir de la fonction $\varphi_0(x) = \sqrt{\mathrm{G}(x)}$, par la formule de récurrence*

$$\varphi_{n+1}(x) = |x'_0| - k(x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x)}{\varphi_n(x)}\,dx,$$

démontrer que, si x_0 est suffisamment petit, la fonction $\varphi_1(x)$ reste positive dans l'intervalle $(t_0, t_0 + \mathrm{T})$, que les fonctions φ_0, φ_1, φ_2, ..., sont approchées alternativement par excès et par défaut de $-\frac{dx}{dt}$ regardée comme fonction de x, et qu'elles forment une suite convergente dans tout l'intervalle $(x_0, 0)$.

5° *Supposons maintenant que $f(x)$ soit holomorphe pour $x = 0$ et développable en série de la forme*

$$a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

les a_n étant positifs ou nuls, et posons

$$y = -kx + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

$$z = -kx + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n x^n,$$

les α_n et les β_n étant respectivement déterminés par la condition que y et z vérifient formellement les équations

$$y\left(k + \frac{dy}{dx}\right) + f(x) = 0, \tag{2}$$

$$z\left(k + \frac{z}{x}\right) + f(x) = 0. \tag{3}$$

Comparer les valeurs de α_n et β_n et en déduire que la série y

possède, comme la série z un rayon de convergence fini. Montrer que ce résultat subsiste quand certains des a_n sont négatifs.

6° *Déduire de ce qui précède que si $f(x)$ est de la forme considérée au n° 5, il existe une intégrale positive $x(t)$, de l'équation* (1), *pour laquelle* T *est infini, $x(t)$ étant développable suivant les puissances d'exposants positifs et entiers de $e^{-k(t-t_0)}$.*

Montrer, par un exemple simple, qu'il n'en est plus toujours ainsi quand $f(x)$ est de la forme

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

avec $a_1 > 0$.

Solution par M. Bertrand Gambier,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Le procédé classique ramène l'équation

$$x'' + kx' + f(x) = 0 \tag{1}$$

au système

$$y\frac{dy}{dx} + ky + f(x) = 0, \tag{2}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y}. \tag{3}$$

L'équation (2) n'est pas intégrable dans le cas général; le cas simple $f(x) \equiv a_1 x + a_2$, où a_1 et a_2 sont constants, s'intègre directement sous forme (1) sans passer par (2). Il est commode, pour abréger le langage, d'appeler t le *temps*, $x' = \frac{dx}{dt}$ et $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ *vitesse* et *accélération*.

L'inégalité du texte

$$|x'| < \sqrt{G(x)} \tag{4}$$

est fournie immédiatement par l'équation des forces vives, obtenue en multipliant (1) par $2x'$, puis intégrant; d'où, avec les notations de l'énoncé

$$x'^2 = G(x) - 2k\int_{t_0}^{t} x'^2\, dt. \tag{5}$$

Cela prouve de plus que $G(x)$ est positive, si l'on y remplace x par $x(t)$; si donc ξ est un zéro *positif* de $G(x)$, comme $G(x)$ est une fonction *décroissante* de x, quand x est positif, la fonction $x(t)$ ne pourra dépasser ξ; exemple simple :

$$f(x) \equiv ax, \qquad \text{avec} \quad a > 0, \qquad \xi = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{a}}.$$

On peut, d'autre part, remarquer que, si k ne doit pas prendre diverses valeurs constantes, on peut, sans particulariser, supposer $k = 1$; car le changement de fonction et variable

$$(6) \qquad kt = T, \qquad x = X, \qquad F(X) \equiv \frac{f(x)}{k^2}$$

donne la nouvelle équation

$$(7) \qquad \frac{d^2X}{dT^2} + \frac{dX}{dT} + F(X) = 0,$$

et, si l'on adopte ensuite de petites lettres, on retrouve l'équation du début avec $k = 1$.

I, II. Deux cas suivant que l'on a $x_0' > 0$ ou $x_0' < 0$.

Si l'on suppose $x_0' > 0$, x_0'' est négatif, donc x' décroît pendant un certain temps : nous allons montrer que, *si pour* $x > x_0$, $f(x)$ *a une limite inférieure m positive non nulle, le laps de temps où x' reste positif et non nul est fini.*

Supposons t tel que, de t_0 à t, x' reste positif, non nul, de sorte que $x > x_0$. On écrit

$$(8) \qquad x'' = -kx' - f(x),$$

$$(9) \qquad x' = x_0' - k(x - x_0) - \int_{t_0}^{t} f(x)\,dt.$$

La valeur (9) de x', puisque $x > x_0$ et $f(x) > m$, est évidemment *inférieure* à $x_0' - m(t - t_0)$ et, comme x' est supposée *positive*, on a

$$(10) \qquad t - t_0 < \frac{x_0'}{m}.$$

Donc, entre l'époque t_0 et l'époque $t_0 + \frac{x_0'}{m}$, il existe une époque θ où la vitesse $x'(\theta)$ s'annule, tandis que l'accélération $x''(\theta)$ se réduit à $-f[x(\theta)]$, *valeur non nulle et négative;* la vitesse, à l'époque θ, continue donc à décroître, devient négative. *Un décalage de l'origine des temps nous autorise donc à nous borner désormais à l'hypothèse* $x'_0 < 0$: c'est ce que fait d'ailleurs l'énoncé :

Soit donc $x'_0 < 0$: nous allons voir que $x(t)$ *décroît et atteint en un temps fini tout point* $x_1 (0 \leq x_1 < x_0)$, *tel qu'entre* x_0 *et* x_1 *la limite inférieure de* $f(x)$ *soit un nombre* m *positif non nul.*

(Pour simplifier l'écriture, supposons $k = 1$). L'équation

$$x'' = -x' - f(x)$$

montre que, si $|x'_0| < f(x_0)$, x''_0 est négatif; donc x' décroît au début et par suite la quantité *positive* $|x'|$ croît : ce résultat vaut tant que $|x'|$ reste inférieur à $f(x)$.

Au contraire, si $|x'_0| > f(x_0)$, x' croît d'abord, donc $|x'|$ décroît; cela vaut tant que $|x'|$ surpasse $f(x)$, *ce qui ne peut avoir lieu que si* $|x'|$ *surpasse* m.

Conclusion. — Si au début du mouvement on a $|x'_0| > m$, $|x'(t)|$ peut avoir des alternatives de croissance ou décroissance, *mais il reste toujours supérieur à* m; si, au début du mouvement, on a $|x'_0| < m$, $|x'(t)|$ croît au moins au début; *s'il n'atteint pas* m, *il reste supérieur à* $|x'_0|$; *s'il atteint* m, *il ne peut plus retomber en dessous de* m. De toutes façons $|x'|$ reste supérieur au plus petit des deux nombres $|x'_0|$, m et l'intervalle $x_0 x_1$ est couvert en un temps inférieur au plus grand des deux nombres

$$\frac{x_0 - x_1}{m}, \quad \frac{x_0 - x_1}{|x'_0|},$$

le mobile se dirigeant toujours de x_0 vers l'origine.

Si donc la limite inférieure de $f(x)$ entre x_0 et 0 est un nombre positif non nul, le temps T de l'énoncé est fini.

Supposons qu'entre ε (ε positif très petit) et x_0 la limite inférieure de $f(x)$ soit positive non nulle, mais que $f(x)$ tende vers zéro si x tend vers zéro [autrement dit $f(+0) = 0$; la valeur exacte de $f(0)$, puisque l'énoncé admet une discontinuité pour $x = 0$, importe peu]. Nous choisirons des nombres x_0,

x_1; ..., x_n, ... tendant vers zéro d'après une loi arbitraire, en décroissant constamment quand n croît. Le temps T_n, nécessaire pour atteindre x_n, croît avec n; si n devient infini, T_n peut rester fini, il peut devenir infini; on pourra étudier la série dont le terme général est le temps nécessaire pour parcourir le segment $x_{n-1}x_n$. Des exemples simples prouvent l'existence effective des deux cas. Ainsi, A étant une constante positive, inférieure à $\frac{1}{2}$, l'équation

$$x'' + x' + \left(\frac{1}{4} - A^2\right) x = 0 \tag{11}$$

donne, avec des constantes α, β,

$$x = \alpha e^{-\left(\frac{1}{2} - A\right) t} + \beta e^{-\left(\frac{1}{2} + A\right) t}. \tag{12}$$

Si l'on a $\alpha > 0$, $\beta > 0$, x n'atteint l'origine qu'en un temps T infini; si $\alpha\beta < 0$, T est fini; *pour cet exemple, les circonstances changent suivant les valeurs initiales respectives de* x_0 *et* x'_0.

Au contraire, pour

$$x'' + x' + \left(\frac{1}{4} + A^2\right) x = 0, \tag{13}$$

on a

$$x = \alpha e^{-\frac{t}{2}} \cos(At + \beta), \tag{14}$$

et *quelle que soit l'intégrale*, T *est fini.*

Il est intéressant de montrer que, quelle que soit $f(x)$, *il y a toujours certaines intégrales (sinon toutes) pour lesquelles* T *est fini.*

Pour cela, démontrons en nous bornant à $x'_0 < 0$, l'inégalité

$$|x'| > \sqrt{G(x)} - (x_0 - x). \tag{15}$$

En effet, posons

$$x' = y = -Y, \tag{16}$$

de sorte que l'équation du début (2) devient (avec $k = 1$),

$$\frac{dY}{dx} = 1 - \frac{f(x)}{Y}. \tag{17}$$

De (17) on déduit, puisque $Y_0 = -x'_0$,

$$(18) \qquad Y = -x'_0 - (x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x)\,dx}{Y}.$$

Au second membre, remplaçons Y par la quantité plus grande $\sqrt{G(x)}$, on a

$$(19) \qquad Y > -x'_0 - (x_0 - x) + \int_{x_1}^{x_0} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{G(x)}}.$$

Comme $G(x)$ *est différent de zéro*, le second membre de (19) a toujours un sens : il est manifestement supérieur à $-x'_0-(x_0-x)$, puisque $x < x_0$; il est aussi *a fortiori* supérieur à $-x'_0 - x_0$.

Si donc on suppose $x'_0 < 0$ *et* $-x'_0 - x_0 > 0$, *la fonction* Y *reste toujours supérieure à* $-x'_0 - x_0$ *et, quelle que soit* $f(x)$, *on a*

$$T < \frac{x_0}{|x_0| - x_0}.$$

Le résultat demandé par l'énoncé pour T se trouve ainsi obtenu, sans se servir de l'inégalité (15); mais pour obtenir (15), il suffit dans (19) de remplacer $f(x)$ par $-\frac{1}{2}G'(x)$ pour voir que la quadrature s'effectue et comme $\sqrt{G(x_0)}$ est le nombre *positif* $(-x'_0)$, on voit que (19) se réduit à (15). D'ailleurs, sous cette forme (15), on peut remarquer que $G(x)$ étant *décroissant*, $\sqrt{G(x)}$ reste, pour $x < x_0$, supérieur à $\sqrt{G(x_0)}$ et l'on retrouve encore le résultat $|x'| > |x'_0| - x_0$.

Remarque. — Pour démontrer que, si x'_0 est positif, le mobile rétrograde effectivement, on a dû supposer que pour $x > x_0$, la limite inférieure m de $f(x)$ est *positive*, *non nulle*. Cette hypothèse est nécessaire, comme le prouve l'exemple suivant, obtenu en déterminant $f(x)$ *a priori* de façon que l'équation

$$x'' + x' + f(x) = 0$$

admette une intégrale *particulière*

$$x = \xi - A_1 e^{-t} - A_2 e^{-2t},$$

où A_1, A_2, ξ sont des constantes positives, arbitraires sauf la restriction $\xi - A_1 - A_2 > 0$. On a aussitôt

$$f(x) = 2 A_2 e^{-2t}, \qquad x' = A_1 e^{-t} + 2 A_2 e^{-2t}.$$

Prenons $t_0 = 0$; t croissant de o à $+\infty$, x croît de $\xi - A_1 - A_2$ à ξ pendant que $f(x)$ décroît de $2A_2$ à o; le mobile ne rétrograde donc pas; la relation entre x et $f(x)$ s'obtient évidemment en éliminant θ entre

$$x = \xi - A_1 \theta - A_2 \theta^2, \qquad f = 2 A_2 \theta^2.$$

La courbe (x, f) est une parabole tangente à Ox au point ξ de Ox; l'arc de cette parabole, obtenu pour θ positif, est celui qui correspond à $0 < x < \xi$ et est situé au-dessous du diamètre conjugué de Ox; en arrivant au point $(\xi, 0)$, on peut prolonger l'arc de parabole par une courbe arbitraire partant de ce point tangentiellement à Ox et nous définissons ainsi une fonction $f(x)$ satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé; sauf une : la limite inférieure de $f(x)$ est en effet, pour $x > 0$, nulle.

De même, si x'_0 est négatif et si la fonction $f(x)$ admet un zéro ξ compris entre o et x_0, on fait le changement de variables

$$x = \xi + X, \qquad f(\xi + X) = F(X),$$

et l'on a l'équation

$$X'' + X' + F(X) = 0,$$

qui montre que ξ joue maintenant le rôle de O dans ce qui précède : le mobile peut donc atteindre ξ avec une vitesse finie, donc le dépasser pour se rapprocher davantage de O; ou bien il peut arriver en ξ avec une vitesse nulle, en un temps fini, et il s'arrête en ξ; ou bien il peut n'atteindre ξ qu'en un temps infini.

III. Supposons, au voisinage de $x = 0$,

$$f(x) = \frac{\mu}{x^{1+\alpha}} + \ldots, \qquad G(x) = \frac{2\mu}{\alpha} \frac{1}{x^{\alpha}} + \ldots.$$

Puisque $\frac{dx}{dt}$ est négatif, pour x positif et voisin de zéro, et que $\frac{dx}{dt}$ est compris entre $-\sqrt{G(x)}$ et $-\sqrt{G(x)} + x_0 - x$, on peut écrire

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2\mu}{\alpha} \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}}}\, \varphi(t_0 + T - t),$$

où $\varphi(u)$ tend vers 1 si u tend vers zéro. En posant $u = t_0 + \mathrm{T} - t$, nous écrirons

$$x^{\frac{\alpha}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}}\,[1 + \psi(u)]\,du,$$

$$\frac{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\alpha}{2}} = u\sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}}\,[1 + \chi(u)],$$

$$x = \left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}} u^{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}}[1 + \mathrm{F}(u)],$$

φ, χ, F étant des fonctions de u tendant vers zéro si u tend vers zéro; x est donc infiniment petit d'ordre $\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}$ et cette formule donne la partie principale.

IV. La forme donnée à l'équation du début, en supposant $k = 1$, $x' = y = -\mathrm{Y}$, est, nous l'avons vu,

$$(20) \qquad \frac{d\mathrm{Y}}{dx} = 1 - \frac{f(x)}{\mathrm{Y}}.$$

Cela nous suggère une méthode d'approximation évidente : bornons-nous au cas où x'_0 est négatif, et où le nombre

$$(21) \qquad \mu = -x'_0 - x_0$$

est positif, non nul. Ces hypothèses n'ont rien d'arbitraire, puisque nous avons vu leur signification : T *est fini, quelle que soit* $f(x)$ *et* Y *reste positive, non nulle, quand* x *décroît de* x_0 *à* 0; Y *surpasse* μ. Au second membre de (20) prenons, comme approximation de Y, une fonction qui, de 0 à x_0, reste *positive, non nulle*, $\varphi_n(x)$, avec la condition $\varphi_n(x_0) = \mathrm{Y}_0 = -x'_0$; on en déduit une nouvelle approximation $\varphi_{n+1}(x)$ par la relation

$$(22) \qquad \frac{d\varphi_{n+1}}{dx} = 1 - \frac{f(x)}{\varphi_n}$$

jointe à

$$(23) \qquad \varphi_{n+1}(x_0) = -x'_0.$$

On en déduit, avec $0 < x < x_0$,

$$\varphi_{n+1}(x) = -x'_0 - (x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x)\,dx}{\varphi_n(x)}. \tag{24}$$

C'est précisément la formule de l'énoncé; l'intégrale du second membre a un sens, puisque φ_n ne s'annule pas entre o et x_0, d'autre part elle est *positive;* donc nous avons évidemment

$$\varphi_{n+1}(x) > -x'_0 - (x_0 - x) > -x'_0 - x_0. \tag{25}$$

Nous voyons que $\varphi_{n+1}(x)$ reste constamment, pour $0 \leq x \leq x_0$, supérieure au nombre positif μ déjà défini; donc φ_{n+1} peut servir, sans difficulté, pour définir une nouvelle approximation φ_{n+2}, et ainsi de suite : la fonction φ_0 peut être prise quelconque, pourvu qu'elle soit positive, non nulle, de o à x_0 compris; les suivantes, non seulement, seront positives, mais encore supérieures à μ. Or il est naturel de prendre $\varphi_0 \equiv \sqrt{G(x)}$, car si, au lieu de faire $k = 1$, nous laissons k constant mais arbitraire, l'équation

$$\frac{dY}{dx} = k - \frac{f(x)}{Y}$$

admet, pour k voisin de zéro, une intégrale voisine de $\sqrt{G(x)}$ qui est intégrale de l'équation obtenue pour $k = 0$

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{f(x)}{Y}.$$

Avec ce choix particulier de φ_0, la fonction φ_1 devient celle calculée plus haut, $\varphi_1 = \sqrt{G(x)} - (x_0 - x)$; φ_0 surpasse Y, φ_1 lui est inférieure, et la différence $\varphi_0 - \varphi_1$ ou $(x_0 - x)$ surpasse $\varphi_0 - Y$ ou $Y - \varphi_1$. En adjoignant à (24) l'équation

$$Y = -x'_0 - (x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x)\,dx}{Y}, \tag{26}$$

on a, par différence,

$$Y - \varphi_{n+1} = \int_x^{x_0} \frac{(\varphi_n - Y) f\,dx}{Y\varphi_n}, \tag{27}$$

de sorte que si $\varphi_n(x)$ est toujours supérieure (ou inférieure) à Y, $\varphi_{n+1}(x)$ est toujours inférieure (ou supérieure) à Y. Les fonctions d'indice pair $\varphi_0, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}, \ldots$ sont donc approchées par excès, celles d'indice impair $\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_{2n+1}, \ldots$ approchées par défaut; toutes sont, pour $0 \leqq x \leqq x_0$, supérieures au nombre positif μ.

Soit M la limite *supérieure*, supposée *finie* de $f(x)$ dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq x_0$ (cette hypothèse sur M écarte les fonctions du paragraphe 3, infinies pour $x=0$; pour une telle fonction, le raisonnement s'appliquerait dans un intervalle $x_1 \leqq x \leqq x_0$, où x_1 est un nombre positif non nul). Appliquons la formule (27) pour $n=1$, en remplaçant au second membre $Y-\varphi_1$ par la quantité positive supérieure (x_0-x), et $Y\varphi_1$ au dénominateur par la quantité positive inférieure μ^2; on a

$$(28) \qquad \varphi_2 - Y < \int_x^{x_0} \frac{M}{\mu^2}(x_0-x)\,dx = \frac{M}{\mu^2}\,\frac{(x_0-x)^2}{2!}.$$

Le même procédé, appliqué toujours à (27), démontre de proche en proche

$$(29) \qquad |Y-\varphi_{n+1}| < \frac{M^n}{\mu^{2n}}\,\frac{(x_0-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La formule (29) démontre la convergence de la suite $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$; l'erreur dont nous connaissons le sens, décroît, en valeur absolue comme les termes successifs du développement de l'exponentielle $e^{\frac{M(x_0-x)}{\mu^2}}$. On remarquera que le raisonnement peut être recommencé en prenant pour $\varphi_0(x)$ une fonction positive *quelconque,* égale à $-x_0'$ pour $x=x_0$, supérieure, de 0 à x_0 compris, à un nombre positif fixe; si φ_0 est toujours supérieure (ou inférieure) à Y, les fonctions $\varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{2n}, \ldots$ posséderont la même propriété, les fonctions $\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_{2n+1}, \ldots$, seront approchées de Y en sens inverse; toutes, quelle que soit la parité de l'indice, étant supérieures à μ, sauf peut-être φ_0. Quand l'indice augmente indéfiniment, la fonction φ_n tend vers Y.

Si l'on suppose que φ_0 est, par intervalles, supérieure, soit inférieure à Y, le résultat subsiste sauf que l'on ne peut rien garantir sur le sens de l'approximation de φ_n.

Ayant écrit comme plus haut, dans ces nouvelles hypothèses,

$$Y - \varphi_1 = \int_x^{x_0} \frac{(\varphi_0 - Y)f\,dx}{Y\varphi_0},$$

si l'on appelle δ la limite supérieure de $|\varphi_0 - Y|$ dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq x_0$, on trouve immédiatement

$$|Y - \varphi_1| < \frac{\delta M}{\mu^2}(x_0 - x),$$

$$|Y - \varphi_n| < \frac{\delta}{n!}\left[\frac{M(x_0 - x)}{\mu^2}\right]^n,$$

de sorte que la vitesse d'approximation ne dépend pas finalement du choix de telle fonction initiale φ_0 plutôt que d'une autre.

V. Faisons $k = 1$; on détermine $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$, par l'égalité

$$(30) \qquad (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots)(2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \ldots) + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = x[2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \ldots].$$

Si donc on calcule d'abord

$$(31) \qquad \frac{1}{2}(\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots)^2 \equiv A_4 x^4 + A_5 x^5 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

on a

$$(32) \qquad A_4 = \frac{\alpha_2^2}{2}, \qquad A_5 = \alpha_2 \alpha_3, \qquad A_6 = \frac{\alpha_3^2}{2} + \alpha_2 \alpha_4 \ldots,$$

d'une façon générale A_n est un polynome entier à coefficients *positifs* des variables $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-2}$.

$$A_n = P_n(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-2}).$$

On aura donc

$$(33) \qquad \begin{cases} 2\alpha_2 = a_2, \\ 3\alpha_3 = a_3 + 4A_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ n\alpha_n = a_n + (n+1)A_{n+1}. \end{cases}$$

On calcule de proche en proche $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. Si l'on ne suppose rien sur le signe (ou même sur la réalité) de $a_2, a_3, \ldots, a_n$, on voit que, remplacer $a_2, a_3, \ldots$ par $|a_2|, |a_3|, \ldots$, augmente le module de $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$. On augmente encore $|\alpha_2|, |\alpha_3|, \ldots$, si l'on remplace chaque a_n par une quantité positive de module supérieur.

Si tous les a_n sont positifs, tous les α_n le sont aussi.

Le calcul de z donne

$$(34) \qquad \frac{1}{x}[\beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots]^2 + a_2 x^2 + \ldots \equiv \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots,$$

donc on a

$$(35)\qquad \begin{cases} \beta_2 = a_2, \\ \beta_3 = a_3 + 2\mathrm{B}_4, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \beta_n = \alpha_n + 2\mathrm{B}_{n+1} \end{cases}$$

avec

$$\mathrm{B}_n = \mathrm{P}_n(\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-2}),$$

P_n étant le même polynome que précédemment (chaque lettre α_i étant remplacée par β_i). Cela nous montre que, si tous les a_n sont positifs, on a

$$(36)\qquad \beta_2 > \alpha_2, \qquad \beta_3 > \alpha_3, \qquad \dots, \qquad \beta_{n-1} > \alpha_{n-1}, \qquad \dots.$$

La première inégalité est vérifiée directement, les autres résultent de la comparaison

$$\alpha_n = \frac{a_n}{n} + \frac{n+1}{n}\mathrm{A}_{n+1},$$

$$\beta_n = a_n + 2\mathrm{B}_{n+1}.$$

Si les a_n ne sont pas tous positifs, on a, pour la même raison,

$$|\beta_2| > |\alpha_2| \dots |\beta_{n-1}| > |\alpha_{n-1}|.$$

Si donc la série z est convergente, *a fortiori* la série y l'est. Or on calcule directement z par une équation du second degré : en choisissant convenablement la racine

$$(37)\qquad z = -\frac{x}{2} - \frac{x}{2}[1 - 4x(a_2 + a_3 x + \dots)]^{\frac{1}{2}}.$$

La série $a_2 + a_3 x + \dots$ étant supposée avoir un rayon de convergence non nul, on peut effectivement développer z par la formule (37) suivant une série convergente de rayon de convergence non nul; et alors la série y a un rayon de convergence au moins égal.

VI. Nous posons

$$(38)\qquad \frac{dx}{dt} = y, \qquad e^{-(t-t_0)} = \theta, \qquad \mathrm{X} = \frac{x}{\theta}.$$

Le calcul du numéro précédent nous a fourni une équation différentielle du premier ordre, *ne renfermant aucune constante arbitraire*

$$(39)\qquad \frac{dx}{dt} = -x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots,$$

dont toutes les intégrales satisfont à l'équation (E) du début. On a immédiatement

$$(40) \qquad \frac{dX}{d\theta} = \frac{\theta\frac{dx}{d\theta} - x}{\theta^2} = \frac{-\frac{dx}{dt} - x}{\theta^2},$$

$$(41) \qquad \frac{dX}{d\theta} = -\alpha_2 X^2 - \alpha_3 \theta X^3 - \alpha_4 \theta^2 X^4 - \ldots.$$

Or, l'équation (41) admet une intégrale holomorphe et une seule se réduisant pour $\theta = 0$ à X_0, où X_0 est *arbitraire*

$$(42) \qquad X = X_0 + \beta_1 \theta + \beta_2 \theta^2 + \ldots,$$

d'où pour $x = X\theta$ le développement annoncé, convergent pour θ suffisamment petit ou $t - t_0$ suffisamment grand. Il faut bien remarquer que l'équation (41) est strictement équivalente à (39) et par suite ne peut donner des fonctions $x(t)$ dépendant de deux constantes arbitraires; or β_1, β_2, ..., coefficients du développement (42) dépendent de la valeur particulière X_0 et θ contient la constante t_0 : si l'on multiplie X par une constante arbitraire et si l'on divise θ par la même constante, l'équation (41) ne change pas et finalement le produit $X\theta$ contient bien les deux constantes X_0 et t_0, mais uniquement par le groupement $X_0 e^{t_0}$; pour X_0 nul, on aurait $X \equiv 0, x \equiv 0$, cas à écarter; on pourra donc sans restreindre supposer $X_0 = 1$; on a ainsi ∞^1 intégrales $x(t)$ du type demandé par l'énoncé, ne différant les unes des autres que par un décalage de l'origine des temps.

Il est évident qu'un tel développement $x(t)$ n'existe *jamais* si α_1 est différent de zéro : c'est une conclusion plus précise, plus restrictive que celle de l'énoncé. En effet, écrivons en supposant t_0 égal à zéro, ce qui ne restreint rien,

$$(43) \qquad x = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + \ldots + A_n e^{-nt} + \ldots.$$

On a

$$(44) \qquad f(x) = -(x' + x'') = -2A_2 e^{-2t} - \ldots - n(n-1) A_n e^{-nt} - \ldots.$$

La relation entre x et $f(x)$ est fournie par l'élimination de e^{-t} entre les équations (43) et (44). Or, distinguons deux cas : $A_1 \neq 0$ et $A_1 = 0$. Soit le premier cas : $A_1 \neq 0$; appelons n le premier entier $\geqq 2$ pour lequel $A_n \neq 0$; on aura donc $A_1 > 0$,

$A_n < 0$ pour que x et $f(x)$ soient positifs tous les deux quand t est positif, suffisamment grand; e^{-t} est développable en série $\frac{x}{A_1} + \ldots$, de sorte que l'on obtient pour $f(x)$ le développement

$$(45) \qquad f(x) \equiv -n(n-1)A_n\left(\frac{x}{A_1}\right)^n + \ldots,$$

où a_1 est nul.

Dans le second cas, $A_1 = 0$, soit toujours A_n le premier coefficient non nul ($n \geqq 2$); on voit que $f(x)$ et x sont de signe contraire pour t positif suffisamment grand de sorte que nous ne sommes plus dans les conditions strictes de tout le problème. En tous cas, l'équation (43) permet d'obtenir le développement de e^{-t} suivant les puissances croissantes de $x^{\frac{1}{n}}$ et l'on a

$$(46) \qquad f(x) \equiv -n(n-1)x + \ldots.$$

Le développement (46) commence par un terme $a_1 x$, où a_1 a la valeur *négative* d'ailleurs très particulière $-n(n-1)$; ce développement (46) devient d'ailleurs holomorphe si dans (43) les indices des termes non nuls sont tous multiples de l'entier n. L'exemple simple où $f(x) \equiv \left(\frac{1}{4} - A^2\right)x$, donné plus haut, confirme aussi ces résultats; les intégrales particulières $x = \alpha e^{-\left(\frac{1}{2}-A\right)t}$ ou $x = \beta e^{-\left(\frac{1}{2}-A\right)t}$ ne sont pas du type demandé; le multiplicateur de t dans l'exposant est en effet différent de (-1) du moins tant que a_1 est supérieur à zéro, sans égalité.