Solution de question de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 177-178

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__177_1>

SOLUTION DE QUESTION DE LICENCE.

Question C.7.

(*Mécanique rationnelle*, *épreuve théorique; énoncé publié en novembre* 1925, *p.* 52.)

SOLUTION
par TH. BOZON.

Nous désignons par A et C les coefficients de l'ellipsoïde central pour l'un ou l'autre des deux solides, par l et l_1 les cotes des centres de gravité suivant l'axe commun Oz. Les positions des solides dépendent des angles d'Euler

$$\theta,\ \psi,\ \varphi; \qquad \theta,\ \psi,\ \varphi_1,$$

avec la condition de liaison

$$\frac{\varphi+\varphi_1}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

La méthode de Lagrange conduit immédiatement aux équations suivantes $\left(\text{où l'on a posé } \mathcal{A} = A + M\dfrac{l^2 + l_1^2}{2}\right)$:

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\theta'^2 = [Mg(l + l_1)\cos\theta + h][A\sin^2\theta + C\cos^2\theta] - \lambda^2 \equiv F(\theta)$$

$$\mathcal{A}\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\psi' = \lambda$$

$$\varphi' = \mu.$$

1° Lorsque $l + l_1 = 0$ la discussion en θ est très simple puisque $F(\theta)$ est un polynome du second degré par rapport à $\cos\theta$. Lorsque $\cos^2\theta$ varie de 0 à 1 cette fonction varie, toujours dans le même sens entre $h\mathcal{A} - \lambda^2$ et $hC - \lambda^2$. Donc θ' ne s'annulera jamais, θ variant donc toujours dans le même sens (mouvement révolutif) lorsque $\dfrac{\lambda^2}{h}$ sera inférieur à A et à C.

Si, au contraire, $\dfrac{\lambda^2}{h}$ est compris entre $\mathcal{A}$ et C [noter qu'il ne peut dépasser à la fois $\mathcal{A}$ et C parce que $F(\theta)$ serait alors toujours négatif], θ' s'annulera et θ aura une variation périodique. On voit immédiatement que les oscillations sont symétriques par rapport à l'une des droites $\theta = 0$ ou $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ suivant que C dépasse ou non $\mathcal{A}$.

2° $l + l_1$ est positif et très grand. Pour avoir un mouvement dans lequel θ tend asymptotiquement vers π, il faut que π soit racine double de $F(\theta)$, c'est-à-dire que -1 soit racine simple de

$$g(u) \equiv [Mg(l + l_1)u + h][\mathcal{A} + (C - \mathcal{A})u^2] - \lambda^2 = 0$$

sans qu'il y ait d'autre racine entre u_0 (valeur initiale de $\cos\theta = u$) et -1.

Ceci donne

$$\lambda^2 = [-Mg(l + l_1) + h]C \tag{1}$$

et la dérivée $\varphi'(-1)$, calculée dans cette hypothèse, peut s'écrire

$$g'(-1) = 2(\mathcal{A} - C)\frac{\lambda^2}{C} + Mg(l + l_1)C,$$

évidemment positif parce que nous sommes dans le cas $\mathcal{A} > C$. $\varphi(u)$ ayant les signes + et — pour u égal à $-\infty$ et $+\infty$, -1 est la seconde racine de ce polynome. La troisième racine ne peut être qu'au delà de u_0 de sorte que (1) est la seule condition à satisfaire. Introduisons les valeurs initiales θ'_0 et ψ'_0 ; il vient d'abord, pour déterminer h, la condition

$$\mathcal{A}[\mathcal{A} + (C - \mathcal{A})u_0^2]\theta_0'^2 = [Mg(l + l_1)u_0 + h)[\mathcal{A} + (C - \mathcal{A})u_0^2] - C[h - Mg(l + l_1)];$$

θ' étant assez grand pour que la valeur de h ainsi obtenue dépasse $Mg(l + l_1)$, l'équation (1) déterminera λ, c'est-à-dire ψ'_0.

Autre solution par J. de Caumont.