Agrégation des sciences mathématiques (1925)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 168-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__168_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1925).

Mathématiques Spéciales [2].

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Établissons d'abord quelques lemmes, le lecteur étant prié de faire les figures d'ailleurs très simples.

a. Le lieu des centres des quadriques contenant les côtés d'un quadrilatère gauche ABCD *est la droite joignant les milieux* α, β *des diagonales* AC, BD.

Notations : D_Δ, plan mené par une droite D parallèlement à une autre Δ; de même Δ_D; (D, Δ) est le plan parallèle à D_Δ ou Δ_D et équidistant de chacun d'eux; AB, CD, côtés opposés, seront figurés par 1, 2; de même BC, DA par I, II.

La droite $\alpha\beta$ est manifestement contenue dans chaque plan (1, 2) ou (I, II); le paraboloïde, unique, qui contient les côtés de ABCD a son axe parallèle à $\alpha\beta$. Soient ω un point quelconque de $\alpha\beta$, et 1′, 2′, I′, II′ les symétriques, relativement à ω, de 1, 2, I, II. Écrivons le tableau

$$T\begin{cases} 1 & 2 & \mathrm{I}' & \mathrm{II}' \\ \mathrm{I} & \mathrm{II} & 1' & 2' \end{cases}$$

[1] *Voir*, par exemple, KŒNIGS, *Leçons de Cinématique*, p. 175.

[2] Pour l'énoncé de ce problème, le lecteur est prié de se reporter au numéro d'octobre 1925 des *Nouvelles Annales* (page 13), où il trouvera aussi une solution analytique de la question.

La droite $1'$ rencontre 1 à l'infini, 2 parce que $1'$ et 2 sont dans 2_1, I' au symétrique de B, II' au symétrique de A. Le même procédé montre que chaque droite de T rencontre les 4 droites de l'autre ligne, de sorte que les 8 droites sont sur une même quadrique Q (suffisamment déterminée par 3 droites quelconques de l'une des lignes). Cette quadrique admet ω pour centre et la variation de ω sur $\alpha\beta$ livre les ∞^1 quadriques du faisceau (ponctuel ou tangentiel) défini par ABCD.

b. Soient deux droites arbitraires D *et* Oz, *et* O *un point arbitraire de* Oz; *les droites* D', D'' *symétriques de* D, *l'une relativement à* O, *l'autre à* Oz, *se rencontrent.*

La symétrie relative à Oz peut être décomposée en deux symétries, successives, planes, relatives à xOz, puis yOz; la symétrie relative à O introduit une troisième symétrie relative à xOy, de sorte que D', D'' sont symétriques par rapport à xOy et se coupent en un point de ce plan.

c. Suivant que AB, CD *ne sont pas isotropes ou le sont tous deux, il y a deux quadriques ou* ∞^1 *du faisceau précédent ayant un axe de symétrie dans le plan* (1, 2).

AB et CD, isotropes ou non, ont *une* perpendiculaire commune, soit Oz, O étant pris dans le plan (1, 2). De O menons les parallèles à AB, CD et soit $O\omega$ l'une des deux bissectrices de ces parallèles, en supposant d'abord AB, CD non isotropes; si AB, CD sont isotropes (non parallèles, bien entendu, puisque le quadrilatère est gauche), les bissectrices sont indéterminées, et l'on prend pour $O\omega$ une droite *quelconque* du plan 1, 2. Soit ω le point où $O\omega$ perce $\alpha\beta$; la quadrique Q du faisceau, qui admet ω pour centre, est à elle-même sa symétrique relativement à $O\omega$, car cette symétrie permute 1 et 2; la droite I est remplacée par une droite I'' qui rencontre 1 et 2 aux symétriques de C et B; le lemme *b* prouve que I'' rencontre I', donc Q contient I''. Le même raisonnement s'appliquerait aux symétriques par rapport à $O\omega$ des diverses droites de T, de sorte que Q coïncide bien avec sa symétrique.

1° Cela posé, soient une droite réelle Oz, deux droites isotropes, horizontales et conjuguées, I et J rencontrant Oz en deux points imaginaires conjugués dont le milieu est appelé O. Il existe ∞^2

quadriques réelles contenant Oz, I, J. Elles forment un réseau linéaire, ponctuel ou tangentiel. Soit H l'une d'elles, *prise une fois pour toutes :* c'est une telle quadrique que l'énoncé fait intervenir. *Les droites* I, J *déterminent un système linéaire* ∞^3 *de quadriques réelles (système ponctuel ou tangentiel)* ; H *est l'une d'elles.* Deux quelconques se coupent suivant deux nouvelles droites coupant I et J. On en conclut immédiatement que les quadriques du système ∞^3 en jeu sont toutes les quadriques $H_{\lambda\mu}$ de l'énoncé, où on laisse λ et μ arbitraires. Une telle quadrique est parfaitement déterminée par un cercle horizontal de cote quelconque. Appelons h la section de H par le plan xOy et soit $h_{\lambda\mu}$ un cercle *arbitraire* du plan xOy qui définit complètement $H_{\lambda\mu}$; les quadriques H et $H_{\lambda\mu}$ ont toutes deux leur centre dans le plan xOy, ces centres sont donc ceux de h et $h_{\lambda\mu}$. Les génératrices communes à H et $H_{\lambda\mu}$ sont celles, de même système sur H que Oz, passant par les points communs à h et $h_{\lambda\mu}$; *si donc on fixe* λ, μ *le cercle* $h_{\lambda\mu}$ *est seulement assujetti à passer par les traces horizontales* g_λ, g_μ *de* G_λ, G_μ ; *il engendre un faisceau ;* $H_{\lambda\mu}$ *aussi*, et le lieu des centres des quadriques est la droite perpendiculaire à $g_\lambda g_\mu$ en son milieu (lemme a). Le paraboloïde du faisceau est défini par I, J et la droite $g_\lambda g_\mu$.

Si $h_{\lambda\mu}$ est concentrique à h, G_λ et G_μ deviennent les nouvelles génératrices isotropes horizontales de H ; dans ce cas, le faisceau $H_{\lambda\mu}$ ($h_{\lambda\mu}$ conservant même centre que h avec un rayon variable) donne des quadriques ayant toutes même centre et même diamètre conjugué des plans horizontaux ; le rapport des rayons des cercles obtenus par le même plan horizontal est constant ; une quadrique exceptionnelle de ce faisceau se réduit aux deux plans horizontaux contenant l'un I, l'autre J.

2° Le contour apparent sur le plan horizontal de $H_{\lambda\mu}$ est l'enveloppe des projections horizontales des génératrices de $H_{\lambda\mu}$; or, I et J donnent les droites isotropes issues de O, donc on a une conique C ayant O pour foyer ; si ω est le centre de $H_{\lambda\mu}$, le lemme (c) prouve que $O\omega$, axe focal de C, est axe de symétrie de $H_{\lambda\mu}$.

3° λ, μ étant donnés, remarquons que H ayant pour centre α (centre de h), le pied de la génératrice verticale autre que Oz est le point α' de h diamétralement opposé à O ; la projection horizontale de G_λ est la droite $g_\lambda \alpha'$, celle de G_μ la droite $g_\mu \alpha'$. *La conique* C *est simplement assujettie à avoir* O *pour foyer et* $g_\lambda \alpha'$, $g_\mu \alpha'$ *pour tangentes;* comme g_λ et g_μ, projections du foyer O sur ces tangentes, doivent être sur un cercle ayant ω pour centre, le centre ω de C ou $H_{\lambda\mu}$ est sur la perpendiculaire à $g_\lambda g_\mu$ en son milieu, ce qui fait retrouver autrement le lieu de ω; le lieu du second foyer F est la hauteur, issue de α', du triangle $g_\lambda g_\mu \alpha'$; si F décrit la demi-hauteur indéfinie, allant de α' vers $g_\lambda g_\mu$, C est une ellipse; la demi-hauteur opposée correspond aux hyperboles; la position α' pour F donnerait la quadrique H tout simplement et C se réduirait à une droite double.

L'axe non focal enveloppe la parabole de foyer O, admettant pour tangente au sommet la droite lieu de ω, pour directrice la droite lieu de F.

La directrice relative à O passe par un point fixe φ, car une transformation par polaires réciproques relativement à un cercle de centre O transforme le faisceau tangentiel C en le faisceau ponctuel des cercles γ ayant deux points fixes; or, le centre de γ, point transformé de la directrice, décrit une droite. Si l'on remarque que la seconde directrice est homothétique, relativement à φ, dans le rapport de 1 à 2, de l'axe non focal, on voit que cette directrice enveloppe une parabole.

Un cas exceptionnel est celui où λ devient infini, de sorte que G_λ est simplement Oz; g_λ coïncide avec O, le centre ω décrit la perpendiculaire au milieu de Og_μ et le contour apparent, singulier, se réduit à une droite double C pivotant autour de O; la quadrique $H_{\infty\mu}$ a une seconde génératrice verticale dont le pied est sur $\alpha' g_\mu$.

4° Nous avons déjà, λ, μ *étant donnés*, caractérisé $P_{\lambda\mu}$; la droite $g_\lambda g_\mu$ en est une génératrice principale et l'axe est la perpendiculaire abaissée de O sur $g_\lambda g_\mu$: σ, pied de cette perpendiculaire, est sommet de $P_{\lambda\mu}$ et la seconde génératrice principale est la droite, issue de σ, s'appuyant sur I, J. Pour la partie suivante, il est utile d'indiquer une propriété plus compliquée, qui permet de retrouver cette génératrice. Un plan horizontal, de cote arbitraire, coupe H suivant un cercle h' et G_λ, G_μ aux points g'_λ, g'_μ de ce cercle; la corde $g'_\lambda g'_\mu$ engendre $P_{\lambda\mu}$; G_λ et quatre de ces cordes déterminent quatre plans, tangents à $P_{\lambda\mu}$ aux points g'_λ correspondants, et le rapport anharmonique de ces quatre plans est égal soit à celui des cotes, soit à celui des quatre cordes $g'_\lambda g'_\mu$ (transportées parallèlement en un même point). Soit O' le point où le plan horizontal utilisé pour h', g'_λ, g'_μ coupe encore Oz; de O' abaissons la perpendiculaire δ' sur $g'_\lambda g'_\mu$; δ' engendre un paraboloïde, car elle reste parallèle au plan horizontal, s'appuie sur Oz; de plus, quatre positions de δ' donnent avec Oz quatre plans dont le rapport anharmonique est égal à celui déjà obtenu pour les cotes ou les droites $g'_\lambda g'_\mu$ ou les droites δ' elles-mêmes, ce qui suffit pour établir qu'on a un paraboloïde $P'_{\lambda\mu}$. Ce paraboloïde $P'_{\lambda\mu}$ contient I et J, comme on le voit en prenant les plans horizontaux correspondants. Donc, $P_{\lambda\mu}$, $P'_{\lambda\mu}$ sont des quadriques particulières du système linéaire ∞^3 étudié au début; les deux paraboloïdes ont en commun I, J puis deux génératrices de système opposé à I ou J : l'une est K, droite à l'infini du plan horizontal, l'autre est précisément la génératrice principale non horizontale de $P_{\lambda\mu}$, car elle passe en σ.

Si maintenant *on laisse* λ, μ *arbitraires*, les paraboloïdes $P_{\lambda\mu}$ engendrent le système ∞^2 linéaire, pontuel ou tangentiel, déterminé par I, J et la droite à l'infini K du plan xOy. Imposer alors à tel paraboloïde $P_{\lambda\mu}$ un point P lui impose tous les points de la droite Δ, issue de P et rencontrant I, J, sans compter tous les plans, pivotant autour de Δ, comme plans tangents; de même imposer à $P_{\lambda\mu}$ un plan tangent nouveau Π revient à lui imposer, considérée comme enveloppe de plans tangents ou lieu de points, la droite Δ joignant les traces sur Π de I et J, et l'on obtient ainsi un *faisceau* de paraboloïdes prélevé dans le *réseau* qui nous occupe : il n'y a donc qu'à donner immédiatement, non pas P ni Π, mais une droite Δ rencontrant I et J; cette droite Δ sera d'ailleurs parfaitement connue si l'on donne sa projection horizontale δ. Dans ce cas, la conique C de contour apparent est une parabole de foyer O et tangente à δ : C engendre donc un faisceau *tangentiel*.

Si l'on appelle O_1 la projection de O sur δ, la tangente au sommet de C doit passer en δ, de sorte que le sommet σ de C, qui est, nous l'avons vu au 2°, sommet de $P_{\lambda\mu}$, engendre un cercle S de diamètre OO_1. La donnée de S, cercle arbitraire passant toutefois en O, donne O_1, point diamétralement opposé à O, puis δ qui est la tangente à S en O_1 : on en déduit aussitôt Δ, lieu de P, enveloppe de Π.

5° D'après ce qui précède, si μ tend vers λ, $P_{\lambda\mu}$ tend vers le paraboloïde R_λ, lieu des tangentes à chaque cercle h' au pied g'_λ de G_λ sur h' et le paraboloïde auxiliaire $P'_{\lambda\mu}$ du 4° vers le paraboloïde R'_λ obtenu en abaissant de chaque point O′ la perpendiculaire sur la tangente en g'_λ à h'; l'intersection de R_λ et R'_λ est la génératrice principale Δ dont on cherche le lieu; l'introduction du paraboloïde auxiliaire R'_λ montre clairement que la surface Σ lieu de Δ est coupée par chaque plan horizontal suivant la podaire du cercle h' relativement au point O′ de ce cercle; c'est donc une cardioïde. La surface lieu de Δ est de degré 4.

6° R_λ et $R_{\lambda'}$ ont leurs axes rectangulaires quand les tangentes à h en g_λ et $g_{\lambda'}$ sont rectangulaires; R_λ et $R_{\lambda'}$ se coupent suivant I, J, K, plus une droite réelle γ rencontrant I et J; la trace horizontale de γ est l'intersection des tangentes à h en g_λ et $g_{\lambda'}$, c'est-à-dire un cercle concentrique à h, ayant son rayon égal à celui de h multiplié par $\sqrt{2}$; le lieu de γ est donc une quadrique Q contenant ce cercle et I et J; c'est l'une de ces quadriques signalées en fin de 1°, ayant même centre que H, même diamètre conjugué des plans horizontaux; on amplifie, dans le rapport $\sqrt{2}$ à partir de son centre, chaque cercle horizontal de H. De nouveau R_λ coupe Q suivant deux génératrices γ_1 et γ_2; cela tient à ce que, λ donné, on peut associer à λ deux valeurs λ'_1 et λ'_2, car il y a deux tangentes de h perpendiculaires sur une tangente donnée. Le raisonnement employé subsisterait si l'angle des axes de R_λ et $R_{\lambda'}$ était égal à α, au lieu de $\frac{\pi}{2}$; on amplifierait chaque cercle de H dans le rapport $\dfrac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ $\left(\text{ou } \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$ pour déterminer la quadrique Q; seulement ici il y aurait deux quadriques Q et Q′, en raison de ce fait qu'on peut remplacer α par $\pi - \alpha$. Il est intéressant de signaler la propriété suivante : *soit une quadrique réglée* H, *une série de sections circulaires par des plans parallèles, deux génératrices* G_λ, G_μ *d'un même système; h étant une section circulaire*, α *son centre*, g_λ *et* g_μ *les traces sur h de* G_λ *et* G_μ, *l'angle* $g_\lambda \alpha g_\mu$ *reste constant, quand le plan de h se déplace parallèlement à lui-même*. Il suffit de mettre H en perpective à partir d'un point A de H, sur un plan parallèle à celui des sections circulaires; ces sections se projettent suivant des cercles passant en deux points fixes B, C; G_λ, G_μ ont pour perspective deux droites γ_λ, γ_μ issues de B, l'angle $g_\lambda \alpha g_\mu$ reste inaltéré par la perspective et il est égal au double de l'angle $(\gamma_\lambda, \gamma_\mu)$.

Ceci explique comment, dans la question de ce paragraphe, on a dans chaque plan horizontal à chercher le lieu du point d'intersection de deux tangentes variables à un même cercle, quand leur angle reste constant.