

## Certificats de mécanique rationnelle

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1925), p. 156-160

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1925\\_6\\_1\\_\\_156\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__156_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

### CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Une demi-sphère creuse de poids négligeable et de rayon  $r$  est soudée à une demi-sphère pleine, homogène, de poids  $P$  et de même rayon. La sphère ainsi formée est mobile sans frottement sur un plan incliné faisant l'angle  $\alpha$  avec l'horizon.

On supposera que la sphère est abandonnée sans vitesse et que, à l'instant initial, le centre de gravité  $G$  de la sphère est dans le plan vertical passant par son centre de figure  $O$  et normal au plan incliné.

On appellera  $\theta$  l'angle que fait, à l'instant  $t$ , la droite  $OG$  avec la perpendiculaire abaissée de  $O$  sur le plan incliné.

Étudier le mouvement de la sphère. — On demande en particulier :

1° D'exprimer, en fonction de  $\theta$ , la dérivée  $\frac{d\theta}{dt}$  et la réaction  $R$  de la sphère sur le plan.

2° De dire s'il est possible de choisir la valeur initiale de  $\theta$ ,  $\theta_0$ , de façon que, au début du mouvement, la sphère remonte le long du plan incliné.

3° D'examiner le cas où la valeur initiale de  $\theta$  est très petite.

INDICATIONS. — La projection de  $G$  sur le plan incliné a un mouvement uniformément varié ; on a, d'autre part,

$$\theta'^2(k^2 + a^2 \sin^2 \theta) = 2ga \cos \alpha (\cos \theta - \cos \theta_0).$$

On répondra à 2° en évaluant, à l'instant initial, l'accélération de  $O$ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Deux points pesants  $A$  et  $B$ , de même poids  $P$ , sont mobiles sur une droite horizontale, l'un  $A$  avec frottement (le coefficient de frottement étant  $\frac{1}{10}$ ), l'autre  $B$  sans frottement. Ils sont reliés par un fil élastique de masse négligeable et dont la tension est proportionnelle à l'allongement ; la longueur naturelle de ce fil (sa tension étant nulle) est  $1^m$  ; pour un allongement de  $1^m$  la tension prend la valeur  $\frac{P}{5}$ .

On supposera qu'à l'instant initial la tension du fil est nulle et que les deux points ont même vitesse :  $2$  m/sec dirigée dans le sens  $AB$ .

Étudier le mouvement des deux points jusqu'à l'instant  $t$  où la vitesse de  $A$  s'annule. Calculer cet instant  $t$ . Dire ce que sera le mouvement immédiatement après l'instant  $t$ .

On prendra l'accélération de la pesanteur  $g = 10 \text{ m/sec}$ .

INDICATIONS. — On trouve, pour les abscisses des deux points,

$$x_A + x_B = 1 + 4t - \frac{1}{2}t^2, \quad x_B - x_A = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t$$

et l'instant  $t$ , pour lequel A s'immobilise, est  $3^{\circ}, 60$ .

(Marseille, novembre 1922.)

C. 53. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une tige rectiligne AB, homogène et pesante, de masse  $m$ , de longueur  $2l$ , mobile dans l'espace, vient heurter, par son extrémité A, un plan horizontal fixe P.

A l'instant du choc la tige fait avec le plan P l'angle  $\theta_0$  donné, et tous les points de la tige ont la même vitesse donnée  $v_0$  normale au plan. On suppose que le choc a lieu entre corps mous : le coefficient de restitution  $e$  sera donc pris égal à zéro :

1° On admet que le contact de la tige et du plan a lieu sans frottement.

Déterminer l'état des vitesses de la tige après le choc.

Discuter si, dans le mouvement qui suit immédiatement le choc, l'extrémité de la tige restera, ou non, en contact avec le plan P. Étudier sommairement, dans l'un ou l'autre cas, le mouvement de la tige jusqu'au moment où viendrait à se produire un nouveau choc.

2° Il y a frottement au contact de la tige et du plan, le coefficient de frottement étant  $f$ . Déterminer l'état des vitesses de la tige après le choc.

C. 54. — ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Condition d'équilibre d'un fil inextensible, de masse négligeable, qui porte à ses extrémités les points matériels pesants P et P<sub>1</sub>, de masses  $m$  et  $m_1$ , et qui repose avec frottement ( $f = 0,25$ ) sur un cylindre circulaire fixe, d'axe horizontal, en touchant ce cylindre suivant la demi-section droite A<sub>1</sub>BA.

2° Les masses  $m$  et  $m_1$  étant égales, et le point P<sub>1</sub> restant immobile, on communique à P la vitesse  $v_0$  normale à AP (dans le plan du fil).

a. On suppose d'abord que le fil ne peut glisser sur le cylindre. Évaluer, dans ces conditions, à un instant quelconque, la vitesse du point P et la tension du fil en P en fonction de l'angle  $\theta$  du fil avec la verticale descendante.

b. Le coefficient de frottement au contact du fil et du cylindre étant toujours  $0,25$ ; dire quelle condition doit remplir  $v_0$  pour que, au moins au début, le mouvement précédent se produise effectivement sans qu'il y ait glissement du fil sur le cylindre.

On donne :  $r$ , rayon du cylindre;  $AP = l = 1^m$ .

(Marseille, juin 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Dans un plan vertical fixe P, on a une verticale fixe Oz<sub>1</sub> et un cercle fixe Γ.

1° Mouvement d'un solide homogène pesant et de révolution dont le centre de gravité décrit Oz et dont l'axe reste tangent à Γ.

2° Le plan P est animé d'une rotation uniforme de vitesse donnée ω autour de Oz<sub>1</sub>. On se donne la valeur initiale θ<sub>0</sub> de l'angle de l'axe avec Oz<sub>1</sub>; montrer qu'on peut déterminer la rotation initiale r<sub>0</sub> du solide autour de son axe de façon qu'en partant de θ<sub>0</sub> avec r<sub>0</sub> et θ'<sub>0</sub> = 0, le paramètre θ reste en équilibre. — Gardant r<sub>0</sub>, on part de θ<sub>0</sub> avec une valeur très petite θ'<sub>0</sub>; comment verra-t-on si, dans le mouvement, le paramètre θ restera ou non très voisin de θ<sub>0</sub>. — Faire la distinction effective des valeurs de θ<sub>0</sub> d'après cette propriété dans le cas où le cercle Γ se réduit à un point ?

Indications sur la solution. — Les axes fixes et mobiles à choisir sont évidents. Pour la première partie, on a la liaison

$$a = b = 0, \quad c = -\frac{R + l \cos \theta}{\sin \theta}, \quad \psi = 0,$$

c'est un problème dans le cas régulier d'intégration visible *a priori*, car il admet l'intégrale des forces vives et l'intégrale de rotation autour de l'axe de révolution. En formant 2G = 2T + 2U, écrivant les deux intégrales, on arrive pour θ à l'équation

$$[M(l + R \cos \theta)^2 + A \sin^4 \theta] \theta'^2 = [h \sin \theta - 2Mg(R + l \cos \theta)] \sin^3 \theta$$

dont la discussion ne présente aucune difficulté.

Pour la deuxième partie on a ψ' = ω. On est encore dans le cas régulier d'intégration, mais avec l'intégrale généralisée des forces vives de Painlevé. On arrive ainsi à

$$\begin{aligned} & [M(l + R \cos \theta)^2 + A \sin^4 \theta] \theta'^2 \\ &= [A \omega^2 \sin^3 \theta + 2C r_0 \omega \sin \theta \cos \theta \\ & \quad + (h - C r_0^2) \sin \theta - 2Mg(R + l \cos \theta)] \sin^3 \theta = F(\theta) \sin^3 \theta. \end{aligned}$$

Pour l'équilibre de θ, il faut.

$$F(\theta_0) = 0, \quad F'(\theta_0) = 0,$$

ces deux équations déterminent h et r<sub>0</sub>. Pour ces valeurs de h et r<sub>0</sub>, la fonction F à θ<sub>0</sub> comme racine double. Si l'on donne à θ'<sub>0</sub> une valeur qui n'est plus nulle, on augmente h, donc aussi la fonction F; il apparaîtra donc deux racines de part et d'autre de θ<sub>0</sub> si F était maxima pour θ<sub>0</sub>, et il n'en apparaîtra aucune si F était minima, de sorte qu'il y a stabilité ou instabilité suivant le signe de F''(θ<sub>0</sub>) pour les valeurs h, r<sub>0</sub> précédemment trouvées.

ÉPREUVE PRATIQUE. —  $Ox$  et  $Oz$  étant deux axes rectangulaires, on considère l'aire limitée par les deux lignes

$$z = (x - 2)^2, \quad z = 1.$$

Cette aire en tournant autour de  $Oz$  engendre un solide de révolution qu'on suppose homogène et dont on demande le rayon de giration par rapport à la droite du plan  $zx$ ,

$$z = x - 2.$$

Indications sur la solution. — On calcule l'ellipsoïde d'inertie en  $O$ , on en déduit l'ellipsoïde central, d'où le moment d'inertie par rapport à la droite au moyen de ses cosinus directeurs et de sa distance au centre de gravité.

(Bordeaux, novembre 1923.)

Un parallélépipède rectangle homogène, de masse  $M = 12$  et de côtés

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad c = \sqrt{\frac{5}{2}},$$

est mobile autour de son centre de gravité  $O$  et n'est soumis à aucune force.

1° Calculer les moments d'inertie  $A, B, C$  du solide, relatifs à ses axes de symétrie  $Oxyz$  respectivement parallèles aux côtés  $a, b, c$ , ainsi que la vitesse angulaire initiale  $(p_0 q_0 r_0)$  résultant du couple de percussion  $(\sqrt{2}, 3, 1)$  appliqué au solide en repos.

2° Former et intégrer les équations numériques déterminant les composantes  $p, q, r$  de la vitesse angulaire.

3° L'axe fixe  $Oz$  étant pris en coïncidence avec le moment résultant  $I$  des quantités de mouvement par rapport à  $O$ , calculer sans intégration les deux angles d'Euler  $\theta$  et  $\varphi$  en fonction du temps, au moyen des valeurs de  $p, q, r$  précédemment calculées.

4° Calculer le troisième angle d'Euler  $\psi$  en fonction du temps.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. A. CABANTOUS. — 1° Les moments d'inertie sont :

$$A = 4, \quad B = 3, \quad C = 2,$$

et la rotation initiale a pour composantes

$$p_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad q_0 = 1, \quad r_0 = \frac{1}{2}.$$

2° Les équations classiques d'Euler se réduisent ici à

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{qr}{4}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{2rp}{3}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{pq}{2}.$$

On vérifie facilement que l'on se trouve dans le cas élémentaire où la polhodie est décomposée en deux coniques. Les équations précédentes donnent d'ailleurs

$$4p \frac{dp}{dt} = -\frac{3}{2} q \frac{dq}{dt} = 2r \frac{dr}{dt},$$

d'où en tenant compte des données initiales

$$2p^2 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}(q^2 - 1) = r^2 - \frac{1}{4},$$

et enfin

$$r = p\sqrt{2} = \sqrt{1 - \frac{3q^2}{4}};$$

en portant dans la seconde des équations (1), on a aisément

$$q = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{th} u, \quad r = p\sqrt{2} = \frac{1}{\operatorname{ch} u}.$$

avec

$$u = \varepsilon - \frac{t}{\sqrt{6}} \quad (\varepsilon = \text{const.}).$$

3° et 4° Il est inutile d'insister sur la méthode qui permet de calculer les angles d'Euler ( $\theta$  et  $\varphi$  sans intégration), on trouvera

$$\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\operatorname{sh} u}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{ch} u},$$

et

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{3} \frac{1 + \operatorname{th}^2 u}{2 + \operatorname{th}^2 u},$$

dont l'intégration est immédiate.

(Toulouse, juillet 1924.)