

Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 126-128

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__126_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.1.

[Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en octobre 1925, p. 31.]

SOLUTION

par J. DE CAUMONT.

1° Il s'agit d'obtenir le développement en série entière de

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{xt-t^3} dt.$$

En développant e^{xt} en série et en admettant qu'il soit permis d'intégrer terme à terme, on obtient

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^3} dt + \frac{x}{1!} \int_0^{\infty} t e^{-t^3} dt + \frac{x^2}{2!} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^3} dt + \dots,$$

ou, en posant $t^3 = u$,

$$3F(x) = \int_0^{+\infty} u^{-\frac{2}{3}} e^{-u} du + \frac{x}{1!} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{3}} e^{-u} du + \frac{x^2}{2!} \int_0^{+\infty} e^{-u} du + \dots$$

Les coefficients de $x^0, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots$ sont respectivement $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \Gamma\left(\frac{3}{3}\right), \dots$ Rappelons que

$$\Gamma\left(\frac{3p+1}{3}\right) = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3p-2)}{3^p} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$\Gamma\left(\frac{3p+2}{3}\right) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3p-1)}{3^p} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

D'où le développement

$$F(x) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{x}{1} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{3p}}{(3p)!} \frac{1 \cdot 4 \dots 3p-2}{3^p} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\ + \frac{x^{3p+1}}{(3p+1)!} \frac{2 \cdot 5 \dots 3p-1}{3^p} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{x^{3p+2}}{(3p+2)!} 1 \cdot 2 \dots p + \dots$$

La série du second membre a un rayon de convergence infini (rapport d'un terme au précédent). Elle représente bien $F(x)$. Soient, en effet, $S_n(x)$ et $R_n(x)$ la somme des n premiers termes et le reste correspondant, soit $r_n(x)$ le reste analogue dans la série e^{xt} ; on a

$$F(x) = S_n(x) + \int_0^\infty r_n(xt) e^{-t^3} dt$$

et il faut vérifier que l'intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Or, on augmente cette intégrale en remplaçant x par $|x|$ et, d'autre part, pour une limite supérieure finie, on obtient une valeur évidemment inférieure à $R_n(|x|)$. L'intégrale est donc inférieure ou égale à $R_n(|x|)$ qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

2° Pour développer en série les fonctions

$$\int_0^\infty \cos(\rho x - \rho^3) d\rho, \quad \int_0^\infty \sin(\rho x - \rho^3) d\rho,$$

nous calculerons l'intégrale

$$\int e^{wz-w^3} dw \quad \left(z = x e^{\frac{i\pi}{3}}; x \text{ réel} \right)$$

étendue au contour suivant du plan de la variable complexe w : a . la partie positive de l'axe des x ; b . un arc de cercle de centre O , de rayon infini, d'angle au centre $\frac{\pi}{6}$; c . la droite qui fait avec Ox l'angle $\frac{\pi}{6}$ décrite de l'infini à zéro. L'intégrale le long de ce contour est nulle; elle est nulle le long de l'arc de cercle, comme le montre un raisonnement classique; d'autre part, le long de la deuxième droite, on a

$$w = \rho e^{\frac{\pi i}{6}} \quad (\rho \text{ réel});$$

donc

$$e^{-\frac{i\pi}{6}} F\left(x e^{\frac{\pi i}{3}}\right) = \int_0^\infty e^{i(\rho x - \rho^3)} d\rho = \int_0^\infty \cos(\rho x - \rho^3) d\rho + i \int_0^\infty \sin(\rho x - \rho^3) d\rho.$$

La partie réelle, dans le développement de $e^{-\frac{i\pi}{6}} F\left(x e^{\frac{\pi i}{3}}\right)$ est

$$\int_0^\infty \cos(\rho x - \rho^3) d\rho$$

égale à

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{x}{1} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{x^3}{3!} \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{x^4}{4!} \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \dots \right].$$

Les termes du développement de $F(x)$ sont multipliés successivement par $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dots$

Le coefficient de $i, \int_0^\infty \sin(\rho^x - \rho^3) d\rho$, s'obtiendra en multipliant les termes de $F(x)$ successivement par $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, \dots$

Question C.2.

[Calcul différentiel et intégral, épreuve pratique ; énoncé publié en octobre 1925, p. 31.]

SOLUTION

par J. DE CAUMONT.

1° On trouvera

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2,622$$

avec trois décimales exactes ;

2° Il s'agit d'évaluer l'intégrale

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

prise le long d'un chemin complexe allant de -1 à $+1$ et coupant l'axe imaginaire en un seul point d'ordonnée plus grande que 1 . En complétant le chemin en question par le segment d'axe réel allant de $+1$ à -1 , on a un circuit équivalent au lacet qui part de 0 en suivant l'axe des y , entoure le point $z = i$ et revient en 0 en suivant l'axe des y . L'intégrale le long du lacet est

$$2 \int_0^i \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}},$$

c'est-à-dire ($z = \rho i$),

$$2i \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} = iI;$$

l'intégrale prise le long du segment $+1, -1$ d'axe réel est I , car il faut changer le signe du radical. Donc

$$J + I = iI;$$

$$J = I(i-1).$$

