NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 119-125

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__119_0>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Moment d'inertie d'un solide donné par rapport à un axe passant par l'origine. Variation de ce moment quand l'axe tourne autour de l'origine. Ellipsoïde d'inertie.*

II. *On considère les coniques* (C) *qui admettent* O *pour foyer,* Ox *comme axe focal et qui ont une excentricité e donnée (le paramètre de ces coniques étant variable).*

Déterminer les trajectoires orthogonales (Γ) *de cette famille de coniques. Prévoir* a priori *et vérifier que ce sont des courbes homothétiques.*

Cas particuliers :

1° $e = \frac{1}{2}$. *Construire l'une des* (Γ) *et calculer l'aire des boucles;*

2° $e = 1$. *Que sont les* (Γ)? *Pouvait-on le prévoir géométriquement?*

3° $e = 2$. *Construire l'une des* (Γ).

N. B. — *Le problème peut être traité en coordonnées polaires.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Questions de cours.

II. On voit immédiatement que les coniques (C) forment une famille de courbes homothétiques par rapport à l'origine d'où résulte qu'il en est de même des (Γ).

De l'équation classique des (C) on déduit, pour les (Γ),

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1+e\cos\theta}{e\sin\theta}, \qquad \rho = \frac{q}{\sin\theta\left(\tang\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{e}}}.$$

Si $e = \frac{1}{2}$, la courbe présente une boucle parcourue quand θ va de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$. La surface est

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \rho^2\, d\theta,$$

intégrale facile à calculer par les procédés classiques, on trouve $\frac{8q}{15}$.

Si $e = 1$, les (C) sont des paraboles. On voit géométriquement que par un point quelconque du plan passent deux (C) orthogonales, de sorte que les (Γ) ne sont autres que les (C). Les (C) dont l'axe est dirigé dans un sens ont pour (Γ) les (C) dont l'axe est dirigé dans l'autre sens. Le calcul conduit à

$$(C) \quad \rho = \frac{p}{1 + \cos\theta}, \qquad (\Gamma) \quad \rho = \frac{q}{1 - \cos\theta}.$$

Si $e = 2$, la construction d'une (Γ) ne présente pas de difficultés.

Epreuve pratique. — C.34. — *Calculer (en fractions décimales avec la précision des tables à cinq décimales) les intégrales définies suivantes :*

1°
$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{4\cos^2 x + 9\sin^2 x};$$

2°
$$\int_0^1 \frac{x + \log(1 - x)}{x^2}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x + \log(1 - x)}{x^2}\,dx;$$

3°
$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}\,dx}{\sqrt{1 - x}};$$

4°
$$\Gamma_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,e^x \cos x\,dx \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,e^x \sin x\,dx.$$

(Bordeaux, juin 1925.)

Epreuve théorique (Analyse). — C.35. — I. *α et β étant deux nombres réels indépendants de la variable x, soit y une fonction de x vérifiant l'équation différentielle*

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha\frac{dy}{dx} + (\alpha^2 + \beta)y = 0.$$

1° *Donner l'expression de l'intégrale générale y sous forme réelle séparément dans chacun des cas $\beta < 0$, $\beta > 0$, $\beta = 0$.*

2° *Soit Γ une courbe intégrale de l'équation (1), c'est-à-dire la courbe décrite par le point (x, y) quand y est une fonction de x vérifiant l'équation (1). Trouver la condition que doit vérifier β pour que toute courbe intégrale Γ coupe une infinité de fois l'axe des x.*

3° *La dernière condition étant vérifiée, trouver β tel que la distance de deux points d'intersection consécutifs de Γ avec Ox soit π, rapport de la circonférence au diamètre. β gardera cette valeur dans tout ce qui suit.*

4° *La partie du plan comprise entre l'axe des x et la courbe Γ, et, d'autre part, limitée à gauche par Oy, à droite par une parallèle* *à* Oy *ayant pour abscisse un nombre* λ, *possède une certaine aire dont on demande l'expression en fonction de* λ, *quand on convient de regarder comme négatives les parties de cette aire situées par rapport à* Ox *du côté des* y *négatifs.*

5° *A quelle condition doit satisfaire* α *pour que l'aire précédente tende vers une limite* ω *quand* λ *est infini positif? Trouver* ω, *au moyen de* x *et des constantes d'intégration définissant l'ordonnée* $y(x)$ *d'un point mobile de* Γ.

6° *Supposant* α *donné, déterminer la courbe* Γ *par les deux conditions que, d'une part, elle contienne le point* $(0, 1)$; *d'autre part, l'aire* ω *soit nulle;*

7° Γ *étant ainsi choisi, soit* Γ_1 *la courbe décrite par le point* (x, y_1), *si* y_1 *est le produit de l'ordonnée* y *d'un point de* Γ *par son abscisse* x. *Exprimer* y_1 *au moyen de* x. *Soit* ω_1 *l'aire analogue à* ω *comprise entre* Γ_1 *et* Ox *et située à droite de* Oy. *Montrer que* ω_1 *existe si* ω *a une valeur et trouver la valeur de* ω_1. *Prouver que* ω_1 *est toujours négatif et supérieur à* -1. *Choisir* α *de façon que* $\omega_1 = -\frac{1}{2}$.

II. *On considère la fonction* $f(x)$ *égale à* e^x *pour* $0 \leqq x \leqq \pi$, *à* e^{-x} *pour* $-\pi \leqq x \leqq 0$. *Montrer que* $f(x)$ *est la somme d'une série trigonométrique de la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots.$$

Démontrer les formules

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^x\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^x \cos nx\,dx;$$

et en effectuer les calculs.

ÉPREUVE THÉORIQUE (Mécanique). — C.36. — *Dans un plan vertical* (Q), *un point matériel* M, *de masse* m, *est soumis à son poids* $\overrightarrow{MP}$, *dont la valeur est* mg, *et à une attraction centrale* $\overrightarrow{MF}$ *émanant d'un point fixe* O *du plan et définie par l'égalité*

$$\overrightarrow{MF} = -Km\overrightarrow{OM},$$

K *étant une constante positive.*

Le plan (Q) *est orienté et rapporté à un système d'axes* Ox, Oy. *L'origine est au point* O; *l'axe* Ox *est dirigé suivant la verticale descendante; l'angle* (Ox, Oy) *vaut* $\frac{\pi}{2}$. *On désigne par* θ *l'angle* (Ox, OM).

1° *Montrer que le champ plan, défini par les deux forces* $\overrightarrow{MP}$

et $\overrightarrow{\mathrm{MF}}$ *appliquées à chaque point* M, *dérive d'une fonction de forces. Déterminer les lignes de niveau et les lignes de forces.*

2° *Le point* M, *étant soumis aux deux forces du champ, est assujetti à se déplacer sur un cercle fixe parfaitement poli, qu'il ne peut quitter. Le cercle, situé dans le plan* (Q), *a pour rayon* a *et son point le plus haut est* O. *Déterminer les positions d'équilibre du point* M *et étudier la stabilité de l'équilibre. Examiner en particulier l'hypothèse* $a = \frac{g}{K}$.

3° *Le point* M *est placé à l'instant zéro au point* A, *le plus bas du cercle; sa vitesse initiale, dirigée dans le sens d'orientation du plan, a pour valeur*

$$v_0 = 2\sqrt{a(g - aK)}$$

$\left(\right.$*on supposera maintenant* $\left. a < \frac{g}{K}\right)$. *Évaluer la force vive de* M *et la vitesse de ce point en fonction de* $\cos\theta$. *Exprimer en fonction de* θ *le temps* t *employé par le mobile pour parcourir l'arc* AM. *Peut-il atteindre le point* O? *Le mouvement est-il accéléré ou retardé?*

4° *Exprimer la valeur* R *de la réaction du cercle sur le point* M *en fonction de* $\cos\theta$. *Indiquer le sens et la variation de cette réaction. Quelle condition doit remplir* a *pour que cette réaction puisse s'annuler?*

N. B. — *Dans tout le problème on négligera le frottement du point* M *sur le cercle.*

Epreuve pratique. — *Démontrer qu'il y a un angle* α *et un seul, compris entre* 0 *et* 90° *satisfaisant à l'équation*

$$\sin^4\alpha + 4\sin\alpha - 1 = 0.$$

Le calculer en degrés, minutes et secondes à 1″ *près.*

(Paris, juillet 1923.)

Epreuve théorique. — C.37. — I. 1° *Trouver toutes les fonctions* x *et* y *de la variable* t *vérifiant les équations simultanées*

$$\frac{dx}{dt} + y - \sin t = 0, \qquad \frac{dy}{dt} - x + \cos t = 0.$$

2° *Déterminer les constantes arbitraires qui figurent dans les solutions générales trouvés par la condition que, pour* $t = 0$, *on ait* $x = 1$, $y = 0$. *Soient* $x = f(t)$, $y = g(t)$ *les fonctions ainsi obtenues. Tracer la courbe définie paramétriquement par les équations*

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy. *Indiquer sa nature*

C.38. — II. *On considère les deux surfaces* (S) *et* (S′) *définies par les équations*

$$(S)\ 4x^2 + y^2 - 8z = 0, \qquad (S')\ x^2 + 4y^2 + 8z - 20 = 0.$$

1° *Quelle est la nature de ces surfaces?*

2° *Calculer les coordonnées* (x, y, z) *d'un point quelconque* M *de leur courbe d'intersection* C, *en fonction de l'angle polaire* φ *de la projection* m *de* M *sur* xOy. *Construire les projections de la courbe sur les trois plans de coordonnées.*

3° *Vérifier que* (S) *et* (S′) *se coupent orthogonalement en chaque point* M *de* C.

4° *Montrer que la normale en* M *à* (S) *enveloppe une certaine courbe* (A) *quand* M *décrit* C *et calculer les coordonnées du point de contact* P *en fonction des coordonnées* x, y, z *de* M. *Même question, en remplaçant* (S) *par* (S′), *ce qui donne l'enveloppe* (A′) *et le point de contact* P′. *Démontrer géométriquement que la droite* PP′ *est l'axe de courbure de* C *en* M *et indiquer comment on peut en déduire les coordonnées du centre de courbure. Faire ce calcul, en prenant* M *dans le plan* zOx, *du côté des* x *positifs.*

Epreuve pratique. — C.39. — *Un anneau* A *pesant* 2^{kg} *peut glisser avec frottement le long d'une tige verticale* Ox. *Il est attiré par le point fixe* P, *situé au même niveau que le point* O *et à une distance* $OP = 1^m$, *suivant une force égale à* $k.AP$.

1° *Sachant que ses positions d'équilibre sont les points du segment* A′A″, *situé tout entier au-dessous de* O *et tel que* $OA' = 54^{cm}$ *et* $OA'' = 92^{cm}$, *déterminer le coefficient* k *et le coefficient de frottement* f *de l'anneau sur la tige.*

2° *On abandonne* A *sans vitesse initiale à partir du point* O. *Décrire le mouvement qui prend naissance. Calculer sa durée totale. Construire le diagramme des espaces et le diagramme des vitesses. Calculer l'énergie totale absorbée par le frottement, en ergs, en joules et en kilogrammètres.*

(Clermont-Ferrand, juin 1925.)

Épreuve théorique. — C.40. — I. Ox, Oy, Oz *étant trois axes de coordonnées rectangulaires, on considère le volume* V *intérieur au cylindre*

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - y = 0$$

limité inférieurement par le plan

$$(P) \qquad z = 0,$$

et supérieurement par la surface

$$(\Sigma) \qquad z = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

1° *Indiquer, d'une façon précise, la nature de la courbe d'intersection de* (C) *et de* (Σ).

2° *Calculer la surface latérale* S *du cylindre* (C) *comprise entre le plan* (P) *et la surface* (Σ).

3° *Calculer le volume* V.

4° *Ce volume étant rempli d'une matière homogène de densité* 1, *calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe* O*z* *et le rayon de giration* R *correspondant.*

C.41. — II. *Un disque circulaire homogène, de centre* O *et de rayon* R, *peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal, perpendiculaire en* O *à son plan. Un point* P *de la circonférence de ce disque est attiré par un point fixe* A, *situé à la distance* a *au-dessous du point* O *et sur la verticale de ce point, suivant une force égale à* k.PA.

1° *Démontrer que le mouvement du disque est synchrone au mouvement d'un pendule simple de direction* OP *et dont on calculera la longueur* λ.

2° *On suppose que l'attraction subie par le point* P, *quand le rayon* OP *est horizontal, égale le poids du disque. Étudier, dans cette hypothèse, les variations de* λ *en fonction de* a.

Epreuve pratique. — *Construire la courbe*

$$x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2y = 0.$$

On déterminera, en particulier, les points de cette courbe où la tangente est parallèle à Ox, *ainsi que les points d'intersection de ces tangentes avec la courbe. On calculera enfin, à* 0,0001 *près, l'abscisse du point de la courbe qui a pour ordonnée* 2.

(Clermont-Ferrand, novembre 1925.)

Epreuve théorique. — I. *Soit* C *la courbe représentée par rapport aux axes rectangulaires* Oxyz *par*

$$x = \frac{1}{2}\sin^2 t, \qquad y = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}, \qquad z = \sin t.$$

a. Projections de C *sur les plans* xOy *et* xOz. *Allure générale de* C.

b. Déterminer par leurs projections le vecteur unité de la tangente, *suivant les t croissants, et celui de la normale principale (vers la concavité).*

c. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.

INDICATIONS. — *a.* Cycloïde et arc du parabole; *b, c.* t est l'abscisse curviligne, et l'on a

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 t}}$$

et les coordonnées du centre de courbure

$$X = x + \frac{\cos 2t}{1 + \sin^2 t}, \qquad Y = y + \frac{\sin 2t}{1 + \sin^2 t}, \qquad Z = z - \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t}.$$

C.42. — II. Soit le champ vectoriel défini, en coordonnées rectangulaires, par

$$X = 2x + y + z, \qquad Y = x + 2y + z, \qquad Z = x + y + 2z.$$

a'. Chercher les lignes de forces de ce champ par la méthode suivante : on exprimera les coordonnées d'un point d'une telle ligne, en fonction du paramètre $t = x + y + z$. On sera ramené à intégrer trois équations de la forme

$$\frac{dx}{dt} = K\frac{x+t}{t}, \qquad \frac{dy}{dt} = K\frac{y+t}{t}, \qquad \frac{dz}{dt} = K\frac{z+t}{t},$$

où l'on précisera la valeur de t.

b'. Montrer qu'il existe une famille de surfaces de révolution qui sont orthogonales au champ en chacun de leurs points. Déterminer leurs méridiennes. En résolvant un problème plan de trajectoires orthogonales, remonter de ces méridiennes aux lignes de forces du champ et vérifier que les résultats obtenus s'accordent avec ceux de *a'*.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.43. — En désignant par n un entier positif, calculer l'intégrale double

$$I_n = \int\int x^n e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

étendue à tout le plan, en passant aux coordonnées polaires.

(Poitiers, juin 1925.)