Concours d'agrégation de 1923

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 105-114

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__105_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1923.

Problème de Mécanique rationnelle.

Deux pavés P *et p homogènes, parallélépipédiques de masses respectives* M *et m sont assujettis à glisser sur deux plans inclinés des angles* Δ *et* δ *sur l'horizon. Ces plans sont limités à leur intersection. Un fil inextensible et sans masse est attaché par ses extrémités aux centres des faces supérieures des deux pavés. Ce fil passe dans un anneau très petit* O *absolument fixe situé à la distance h au-dessus de l'arête des deux plans inclinés. Les dimensions des pavés et cette hauteur h sont choisies de façon que les deux brins de fil soient parallèles aux deux plans inclinés.*

(¹) En invoquant la propriété caractéristique de la tangente; ou encore en montrant que C reste invariablement lié à la circonférence γ_1 ou à la circonférence γ_2 lorsqu'on impose à l'une d'elles de rouler sans glisser sur l'une des circonférences de base.

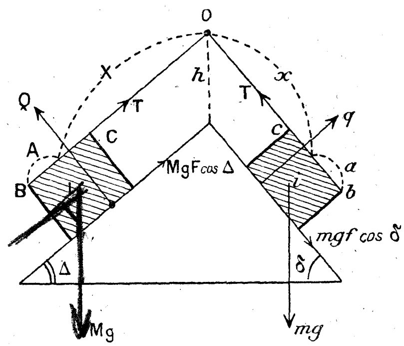
Étudier l'équilibre et le mouvement du système formé par les deux pavés et dans l'hypothèse où le fil est tendu :

1° *En supposant que les pavés ne frottent pas sur les plans inclinés;*

2° *En supposant que les pavés frottent sur les plans inclinés.*

On désignera par F *et* f *les coefficients de frottement respectifs.*

Fig. 1.



N. B. — On n'étudiera que les positions des pavés pour lesquelles le système formé par les deux plans inclinés, les deux pavés et le fil admet un plan vertical de symétrie fixe.

Solution par M. J. Marion,
Professeur au Lycée de Brest.

Les centres de gravité I et i des deux pavés se déplacent sur des parallèles aux lignes de plus grande pente des deux plans. Nous les prendrons comme axes des X et des x dirigés vers le bas. Le système est à liaisons complètes. Sa position dépend en effet des longueurs X et x des deux brins de fil lesquelles sont unies par la relation $X + x = l$, l étant la longueur totale du fil. La liaison des deux pavés par le fil inextensible s'exprime par la relation différentielle

$$dX + dx = 0.$$

Premier cas. — Il n'y a pas de frottement des pavés sur les plans inclinés. Les forces agissant sur le pavé P sont : le poids Mg appliqué en I, la traction T exercée par le fil, la réaction Q du plan incliné. La force T est dirigée vers le point O, nous supposerons $T > 0$. La force Q est dirigée de façon à soulever le pavé P de dessus le plan incliné.

Les forces agissant sur le pavé p sont : le poids mg appliqué en i, la traction T exercée par le fil et dirigée vers O, la réaction q du plan incliné dirigée de façon à soulever le pavé p de dessus le plan incliné.

Équilibre. — Sa recherche analytique revient à appliquer le principe des travaux virtuels. Les seules forces données sont les poids des deux pavés. La somme algébrique de leurs travaux virtuels est

$$T_e = (Mg \sin\Delta\, \delta X + mg \sin\delta . \delta x).$$

Si le déplacement virtuel est compatible avec la liaison (inextensibilité du fil) on a $\delta X + \delta x = 0$, d'où

$$T_e = g\,[M \sin\Delta - m \sin\delta] \times \delta X.$$

Une condition nécessaire de l'équilibre est que T_e soit nul quel que soit le déplacement virtuel δX. Il vient donc

$$M \sin\Delta = m \sin\delta.$$

Mais cela ne suffit pas. Le pavé P peut être regardé comme libre sous l'action des trois forces Mg, T, Q. Or Q est appliquée en un point du polygone de sustentation. L'équilibre ne sera donc possible que si la force verticale Mg perce la face supérieure du pavé P. En d'autres termes, la verticale du point I doit traverser le segment BC, ce qui entraîne l'inégalité $A > \frac{h}{2} \sin\Delta$. Le même raisonnement s'applique au pavé p.

En résumé. — Le système reste en équilibre, quelles que soient les longueurs X, x des brins de fil, si on le dépose sans vitesse sur les plans inclinés lorsque $M \sin\Delta = m \sin\delta$, à la condition toutefois que les dimensions des pavés vérifient les inégalités

$$2A > h \sin\Delta; \qquad 2a > h \sin\delta.$$

Si ces inégalités ne sont pas vérifiées les pavés ne restent pas en contact avec les plans inclinés, mais basculent dès qu'ils son abandonnés.

En projetant toutes les forces qui sollicitent chaque pavé sur la ligne de plus grande pente du plan incliné correspondant et sur la perpendiculaire à cette ligne de plus grande pente élevée dans le plan de la figure on trouve aisément la valeur des forces de liaison :

$$T = Mg \sin \Delta = mg \sin \delta, \qquad Q = Mg \cos \Delta, \qquad q = mg \cos \delta.$$

La force Q passe par le point où la verticale du point I coupe le côté BC. Q est ainsi définie en grandeur, direction, sens. Remarque semblable pour q.

Étude du mouvement. — Une équation suffira pour définir le mouvement. Elle sera fournie par le théorème des forces vives. La force vive du système est

$$2T = M\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (M+m)\left(\frac{dX}{dt}\right)^2$$

car $dX + dx = 0$ pendant tout le mouvement.

La somme des travaux élémentaires des poids est

$$g\,[M \sin \Delta - m \sin \delta]\, dX$$

de sorte que les forces données dérivent de la fonction des forces

$$g\,[M \sin \Delta - m \sin \delta]\, X;$$

d'où l'équation différentielle du mouvement

$$(M+m)\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 = 2g\,[M \sin \Delta - m \sin \delta]\, X + k,$$

où k est une constante. Dérivons par rapport au temps t

$$(1) \qquad (M+m)\frac{d^2X}{dt^2} = g\,[M \sin \Delta - m \sin \delta].$$

Le système va prendre un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est

$$\gamma = g\,\frac{M \sin \Delta - m \sin \delta}{M+m};$$

si, en particulier, $M \sin \Delta = m \sin \delta$, le système sera animé d'une vitesse constante.

Pour discuter plus complètement le mouvement il convient de calculer T et Q.

Calcul des liaisons. — Regardons le pavé P comme libre sous l'action des forces Mg, T et Q. Le théorème du mouvement du centre de gravité nous fournit les équations

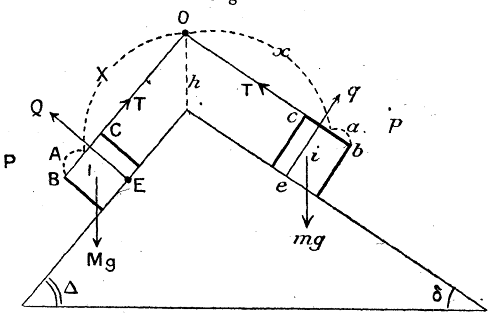
$$Mg\sin\Delta - T = M\frac{d^2X}{dt^2} = Mg\frac{M\sin\Delta - m\sin\delta}{M+m},$$
$$Q - Mg\cos\Delta = 0;$$
$$T = Mmg\frac{\sin\Delta + \sin\delta}{M+m},$$
$$Q = Mg\cos\Delta.$$

Le même calcul appliqué au pavé p donne pour T la même valeur et pour q la valeur $q = mg\cos\delta$.

Remarquons que la valeur trouvée pour T est essentiellement positive, ce qui nous montre que si le fil est tendu au début du mouvement il le restera pendant toute la durée du mouvement.

Les forces Q et q dont on vient de déterminer la grandeur et dont on connaît la direction ne seront définies que si l'on connaît un point de leur support. Le pavé P, par exemple, ne tourne pas autour de son centre de gravité I. Il en résulte que la somme des

Fig. 2.



moments des forces qui le sollicitent, par rapport au point I, sera nulle. Nous voyons déjà que la force Q doit être par rapport au point I située du même côté que le point C. Soit ρ la distance du point I au support de la force Q

$$\rho Q = \frac{h}{2}\cos\Delta T,$$

d'où

$$\rho = \frac{1}{2} mh \frac{\sin \Delta + \sin \delta}{M + m}.$$

Remarquons maintenant que la force Q est appliquée en un point intérieur au polygone de sustentation du pavé P, ce qui entraîne la condition $A > \rho$.

En résumé. — Pour que le mouvement soit possible il faut avant tout que les dimensions des deux pavés vérifient les inégalités

$$2A > mh \frac{\sin \Delta + \sin \delta}{M + m},$$

$$2a > Mh \frac{\sin \Delta + \sin \delta}{M + m};$$

si ces dernières ne sont pas vérifiées les pavés basculent avant de se mettre en mouvement.

Discussion. — Supposons ces conditions remplies. Le mouvement du système est uniformément accéléré tant que les points E et e d'application des forces Q et q sont en contact avec les plans inclinés et tant qu'un des pavés n'est pas venu heurter l'anneau O. Lorsqu'une de ces circonstances se produit, un des pavés bascule ou subit un choc, et un nouveau problème se pose.

Pour fixer les idées supposons $\gamma > 0$, c'est-à-dire $M \sin \Delta > m \sin \delta$.

Premier cas. — Le pavé P est tiré vers le bas parallèlement à la ligne de plus grande pente ou abandonné sans vitesse initiale. Le pavé P descend, tandis que p s'élève. Le mouvement du système est accéléré, sa vitesse croît jusqu'au moment où le pavé p bascule ou frappe l'anneau disposé en O.

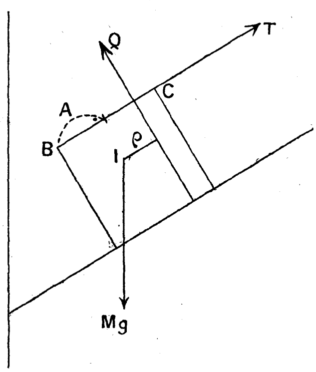
Deuxième cas. — Le pavé p est tiré vers le bas parallèlement à la ligne de plus grande pente du plan incliné sur lequel il repose $\left(\frac{dX}{dt}\right)_0 < 0$. Dans sa première phase le mouvement du système est retardé. Il sera aisé de calculer la limite supérieure à attribuer à $\left|\left(\frac{dX}{dt}\right)_0\right| = |V_0|$ pour que le point E reste en contact avec le plan incliné ou pour que le pavé ne heurte pas l'anneau. Si $|V_0|$ ne surpasse pas cette limite le pavé P va s'élever d'un mouvement retardé et s'arrêter; puis, ensuite, il va redescendre d'un mouvement accéléré jusqu'au moment où p, arrivé au haut de sa course, basculera ou heurtera l'anneau O. La durée t de la première phase du mouvement est fournie par l'équation

$$g\frac{M\sin\Delta - m\sin\delta}{M+m}t + V_0 = 0 \qquad \text{où} \qquad V_0 < 0.$$

Remarque. — Le problème est en tous points analogue au mouvement d'un point pesant sur la ligne de plus grande pente d'un plan dès que les inégalités ci-dessus sont vérifiées.

Deuxième cas. — *Cas du frottement.* — Nous étudierons d'abord le cas du mouvement et la discussion nous indiquera très clairement les conditions de l'équilibre. Nous raisonnerons sur le pavé P. Pour fixer les idées supposons qu'au début du mouvement P descende sur son plan incliné, tandis que p monte sur le sien. Le pavé P est soumis aux mêmes forces que plus haut et à une

Fig. 3.



force de frottement dirigée en sens inverse du mouvement et égale à QF. Or le centre de gravité I de ce pavé reste à une distance constante de la ligne de plus grande pente du plan incliné. On a donc $Q = Mg\cos\Delta$, de sorte que la force de frottement est $MgF\cos\Delta$. Le pavé p est soumis aux mêmes forces que plus haut et à une force de frottement dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan incliné sur lequel il repose et vers le bas, cette force ayant pour intensité $mgf\cos\delta$.

L'équation du mouvement sera encore fournie par le théorème des forces vives. La force vive du système est

$$2T = (M + m)\left(\frac{dX}{dt}\right)^2.$$

La somme des travaux des deux forces T est $T(dx + dX) = 0$, le travail élémentaire de chacune des forces Q et q est nul. La somme des travaux des forces données (poids des pavés, forces de frottement) est donc

$$(Mg \sin\Delta - Mg\,F \cos\Delta)\,dX + (mg \sin\delta + mgf \cos\delta)\,dx\,;$$

soit

$$[Mg(\sin\Delta - F\cos\Delta) - mg(\sin\delta + f\cos\delta)]\,dX$$

et le théorème des forces vives donne l'équation différentielle du mouvement

$$\frac{d^2X}{dt^2} = g\,\frac{M(\sin\Delta - F\cos\Delta) - m(\sin\delta + f\cos\delta)}{M + m}.$$

Le mouvement est encore ici uniformément varié.

Calcul des liaisons. — On opérera comme dans le cas du glissement sans frottement

$$Q = Mg\cos\Delta,$$

$$T = Mmg\,\frac{\sin\Delta - F\cos\Delta + \sin\delta + f\cos\delta}{M + m},$$

$$q = mg\cos\delta.$$

Pour que le fil reste tendu pendant toute la durée du mouvement il faut que T soit positif, ce qui entraine l'inégalité

$$\sin\Delta - F\cos\Delta + \sin\delta + f\cos\delta \geqq 0\,;$$

si cette dernière n'est pas vérifiée, le fil cesse d'être tendu dès le début du mouvement.

Pour déterminer la ligne d'action des forces Q et q on appliquera au mouvement relatif autour des points I et i le théorème des moments des quantités de mouvement. Soient R et r les distances de I et i aux supports des forces Q et q, ces distances étant comptées algébriquement selon la position qu'occupent les forces Q et q par rapport à I et i :

$$QR + (T - QF)\frac{h}{2}\cos\Delta = 0,$$

$$qr + (T + qf)\frac{h}{2}\cos\delta = 0.$$

De là on tirera R et r. Si nous remarquons que les forces Q et q doivent être appliquées en un point intérieur au polygone de sustentation des pavés on arrive aux conclusions suivantes :

Dans l'hypothèse où le pavé P descend au début du mouvement, ce dernier n'est possible que si les trois inégalités suivantes sont remplies :

$$\sin\Delta - F\cos\Delta + \sin\delta + f\cos\delta > 0,$$
$$A > |R|,$$
$$a > |r|.$$

Si la première condition n'est pas remplie le fil n'est pas tendu.

Si les deux autres conditions ne sont pas vérifiées un des pavés ou les deux pavés basculent dès l'instant initial.

Si ces conditions sont remplies le mouvement a lieu. Il est accéléré si

$$M[\sin\Delta - F\cos\Delta] - m(\sin\delta + f\cos\delta) > 0,$$

retardé si

$$M[\sin\Delta - F\cos\Delta] - m(\sin\delta + f\cos\delta) < 0.$$

Dans le premier cas même si le système est posé sans vitesse initiale sur le plan incliné, le pavé P descend sans cesse avec une vitesse *croissante* jusqu'au moment où le pavé p heurte l'anneau o ou jusqu'au moment où il perd contact avec son plan incliné.

Dans le deuxième cas le pavé P descend avec une vitesse qui tend vers 0, puis à un moment donné le pavé P s'arrête. Supposons qu'alors le pavé p ne soit pas venu heurter l'anneau ou qu'il n'ait pas basculé à l'extrémité du plan incliné. Que se passe-t-il ensuite? C'est ce que nous allons étudier.

Étude de l'équilibre. — Je dis tout d'abord que le pavé P ne peut pas descendre plus bas. En effet s'il reprenait sa marche vers le bas l'équation de son mouvement serait la même que plus haut. On aurait $\frac{d^2X}{dt^2} < 0$, en d'autres termes $\frac{dX}{dt}$ devrait décroître en partant de la valeur zéro, c'est-à-dire prendre des valeurs négatives, ce qui est incompatible avec le sens du mouvement du pavé P considéré.

Supposons donc qu'après s'être arrêté P se mette à remonter.

Mettant le problème en équation dans cette hypothèse, on trouve l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{m(\sin\delta - f\cos\delta) - M(\sin\Delta + F\cos\Delta)}{M + m},$$

$\frac{dx}{dt}$ part de la valeur zéro et doit prendre des valeurs positives. Cela ne pourra pas se produire si

$$m(\sin\delta - f\cos\delta) - M(\sin\Delta + F\cos\Delta) < o.$$

En résumé, l'équilibre du système se trouvera réalisé si les données du problème vérifient les deux inégalités simultanées

$$m(\sin\delta - f\cos\delta) - M(\sin\Delta + F\cos\Delta) \leqq o,$$
$$M(\sin\Delta - F\cos\Delta) - m(\sin\delta + f\cos\delta) \leqq o.$$

car dans ces conditions le système étant abandonné sans vitesse initiale ne pourra se mettre en mouvement ni dans un sens, ni dans l'autre. Ces conditions nécessaires sont insuffisantes car les pavés doivent rester en contact avec les plans inclinés et le fil être tendu. Cette dernière condition est remplie *a priori* dans le cas de l'équilibre. Les pavés basculeront au lieu de demeurer en équilibre, si leurs dimensions A et *a* sont inférieures à certaines valeurs.