

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}
76825 Quai des Grands-Augustins, 55

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ECOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION

DIRIGÉ PAR

R. BRICARD

Professeur au Conservatoire national
des Arts et Métiers
et à l'École Centrale des Arts et Manufactures

H. VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences
Professeur à l'Université de Strasbourg
Directeur du *Journal de Mathématiques pures
et appliquées*
Directeur du *Mémorial des Sciences mathématiques*

J. PÉRÈS

Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, AN TOMARI,
DUPORCO, BOURLET, LAISANT.

SIXIÈME SÉRIE — TOME I

(LXXXIII^e VOLUME DE LA COLLECTION)

BIBLIOTHÈQUE
CENTRALE
UNIVERSITAIRE

PARIS

GAUTHIER-VILLARS et C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1925

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.**

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

ASYMPTOTIQUES D'UNE SURFACE. FORMULES DE LELIEUVRE ;

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. M. Lelievre a donné des formules, devenues classiques, pour les surfaces rapportées à leurs asymptotiques

$$(L) \quad \begin{cases} x = \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} \right) du - \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right) dv, \\ y = \int \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} \right) du - \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} \right) dv, \\ z = \int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right) du - \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right) dv, \end{cases}$$

les trois fonctions $\theta_1(u, v)$, $\theta_2(u, v)$, $\theta_3(u, v)$ étant solutions d'une même équation du second ordre

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = k(u, v) \theta,$$

où k est une fonction quelconque de u, v .

On peut rattacher ces formules à la propriété caractéristique :

Tout le long d'une asymptotique, la droite MM' joignant deux points infiniment voisins est aussi la droite commune aux plans tangents infiniment voisins en M et M'.

Cette définition, de caractère nettement dualistique, doit être confrontée avec les coordonnées plückériennes de la droite, dont

le caractère est aussi dualistique, car on les obtient aussi bien en donnant deux points de la droite qu'en donnant deux plans la contenant : la comparaison conduit aussitôt aux formules (L) et aux formules analogues pour les coordonnées tangentielles de la surface.

Si nous prenons des coordonnées homogènes (par rapport à un tétraèdre de référence quelconque), les coordonnées homogènes (x, y, z, t) d'un point d'une courbe sont fonctions de u ; le point infiniment voisin est défini, *par exemple*, par

$$(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt);$$

un point de la tangente peut donc s'obtenir, *par exemple*, en retranchant les coordonnées homologues et divisant par du ; on a ainsi le point

$$\left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}, \frac{dt}{du} \right)$$

associé au point (x, y, z, t) pour définir la tangente. Cela posé, sur une surface S , considérons les coordonnées-points (x, y, z, t) et les coordonnées-plans (ξ, η, ζ, τ) toutes fonctions de u, v . D'après ce qui précède, la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ est définie par les deux points

$$(2) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} \\ x & y & z & t \end{array} \right\|$$

et la tangente conjuguée par les deux plans

$$(3) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \xi & \eta & \zeta & \tau \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} & \frac{\partial \tau}{\partial u} \end{array} \right\|$$

Si les courbes $v = \text{const.}$ sont asymptotiques, ces droites coïncident.

2. Rappelons quelques résultats simples de la géométrie réglée; prenons provisoirement des notations plus commodes pour notre but. Soit une droite définie par deux points

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\|$$

et

$$(5) \quad p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

On a

$$p_{ii} = 0, \quad p_{ik} + p_{ki} = 0.$$

D'habitude, on ne considère que les six quantités

$$(6) \quad p_{14}, p_{24}, p_{34}, p_{23}, p_{31}, p_{12}$$

liées par la relation

$$(7) \quad p_{14} p_{23} + p_{24} p_{31} + p_{34} p_{12} = 0.$$

A tout système de six nombres (6), définis à un facteur arbitraire près de proportionnalité et vérifiant (7), correspond une droite et une seule. L'interprétation géométrique des p_{ik} est aisée et démontre d'ailleurs l'affirmation qui précède, car

$$(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4)$$

sont les coordonnées d'un point de la droite; or, pour $\lambda = y_4$, $\mu = -x_4$, on obtient le point $(p_{14}, p_{24}, p_{34}, 0)$; de sorte que (p_{14}, p_{24}, p_{34}) sont, dans le plan $x_4 = 0$, les coordonnées homogènes de la trace de la droite sur ce plan.

Si l'on prend les traces sur les plans x_2, x_3, x_4 , on trouve

$$(8) \quad \left\| \begin{array}{cccc} p_{12} & 0 & p_{32} & p_{42} \\ p_{13} & p_{23} & 0 & p_{43} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & 0 \end{array} \right\|$$

et en vertu de (7) on aperçoit aussitôt que, multipliant chaque ligne de (8) respectivement par p_{34}, p_{42}, p_{23} et ajoutant, on trouve zéro dans chaque colonne, ce qui démontre bien que les trois (et par suite quatre) traces sont sur une même droite. Multiplier les x par une même constante, ou les y , ou remplacer deux points par deux autres sur la même droite, ne fait que multiplier les p_{ik} par un même facteur.

Définissons maintenant la droite par deux plans

$$(9) \quad \left\| \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \right\|.$$

La trace sur le plan $x_4 = 0$ est définie par le système

$$x_4 = 0, \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \quad v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0,$$

de sorte que si l'on pose

$$(10) \quad q_{ik} = u_i v_k - u_k v_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

on voit que $(q_{23}, q_{34}, q_{12}, 0)$ sont les coordonnées homogènes de cette trace. Mais alors les six quantités homogènes

$$(11) \quad q_{14}, q_{24}, q_{34}, q_{23}, q_{31}, q_{12}$$

peuvent servir aussi de coordonnées plückériennes à la droite et l'on a

$$(12) \quad \frac{q_{23}}{p_{14}} = \frac{q_{31}}{p_{24}} = \frac{q_{12}}{p_{34}} = \frac{q_{14}}{p_{23}} = \frac{q_{24}}{p_{31}} = \frac{q_{34}}{p_{12}}.$$

On a les *mêmes* coordonnées, dans un *autre* ordre (1). Cette remarque conduit aux formules de Lelievre.

3. Les courbes $v = \text{const.}$ étant asymptotiques, les coordonnées plückériennes de la tangente à une telle courbe s'obtiennent au moyen des tableaux (2), (3) indifféremment. Si l'on multiplie x, y, z, t par une même expression (fonction ou non de u, v), on ne change pas la surface, mais on multiplie les p_{ik} par le carré de cette expression. On peut donc, sans restreindre, supposer les identités

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} t \frac{\partial x}{\partial u} - x \frac{\partial t}{\partial u} \equiv \eta \frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial u}, \\ t \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial t}{\partial u} \equiv \zeta \frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi \frac{\partial \zeta}{\partial u}, \\ t \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial t}{\partial u} \equiv \xi \frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial u}, \end{array} \right.$$

ce qui peut s'écrire en posant

$$(14) \quad \theta_1 = \frac{\xi}{t}, \quad \theta_2 = \frac{\eta}{t}, \quad \theta_3 = \frac{\zeta}{t};$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{x}{t} \right) = \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{y}{t} \right) = \theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{z}{t} \right) = \theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial u}. \end{array} \right.$$

(1) Bien entendu $(q_{14}, q_{24}, q_{34}, 0)$ sont les coordonnées homogènes du plan contenant la droite et le sommet du tétraèdre opposé à la face $x_4 = 0$.

Si nous supposons les lignes, $u = \text{const.}$, aussi asymptotiques, on aura aussi, avec un facteur de proportionnalité ρ qui résulte des opérations déjà faites,

$$(16) \quad t \frac{\partial x}{\partial v} - x \frac{\partial t}{\partial v} \equiv \rho \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v} \right)$$

et analogues, en permutant circulairement x, y, z et ξ, η, ζ . Les formules (16) se transforment en

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{x}{t} \right) = \rho \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right)$$

et analogues. Exprimons maintenant que les expressions

$$(18) \quad \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} \right) du + \rho \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right) dv$$

et analogues sont différentielles totales. On trouve

$$(19) \quad \left(\theta_2 \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial u \partial v} - \theta_3 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial u \partial v} \right) (1 - \rho) + (1 + \rho) \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial v} \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \frac{\partial \theta_3}{\partial v} \frac{\partial \theta_2}{\partial u} \right) = 0$$

et analogues. Les trois équations (19) et analogues étant multipliées respectivement par $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ puis ajoutées, on trouve

$$(20) \quad (1 + \rho) \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial u} & \frac{\partial \theta_2}{\partial u} & \frac{\partial \theta_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} & \frac{\partial \theta_2}{\partial v} & \frac{\partial \theta_3}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant qui figure dans (20) ne peut être nul s'il s'agit d'une surface non développable; en effet, d'après (14), $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont les paramètres directeurs de la normale à la surface; la nullité du déterminant en jeu entraînerait celle de

$$\begin{vmatrix} \theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} & \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \\ \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} & \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ou encore du jacobien

$$\frac{D \left(\begin{matrix} \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_1 & \theta_1 \end{matrix} \right)}{D(u, v)},$$

de sorte que le plan tangent à la surface resterait parallèle aux plans tangents d'un certain cône au lieu de pouvoir prendre une orientation arbitraire. Donc l'équation (20) entraîne nécessairement $\rho = -1$, et par suite nous avons démontré les formules (L), en même temps que (19), où l'on remplace ρ par -1 , fournit le résultat exprimé par (1).

En même temps nous pourrions poser

$$(14') \quad \theta_1 = \frac{x}{\tau}, \quad \theta_2 = \frac{y}{\tau}, \quad \theta_3 = \frac{z}{\tau}$$

et les équations (13) seraient complétées par

$$(13') \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \frac{\partial \tau}{\partial u} - \tau \frac{\partial \xi}{\partial u} \equiv z \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \xi \frac{\partial \tau}{\partial v} - \tau \frac{\partial \xi}{\partial v} \equiv - \left(z \frac{\partial y}{\partial v} - y \frac{\partial z}{\partial v} \right) \end{array} \right.$$

et analogues : ces équations ne diffèrent des premières que par l'échange des lettres x, y, z, t et ξ, η, ζ, τ . On aura donc aussi

$$(L') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi}{\tau} = \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} \right) du - \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right) dv, \\ \frac{\eta}{\tau} = \int \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} \right) du - \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} \right) dv, \\ \frac{\zeta}{\tau} = \int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right) du - \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right) dv, \end{array} \right.$$

avec $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ solutions de l'équation

$$(1'') \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = k_1(u, v) \theta.$$

4. Sans insister davantage sur les nombreuses conséquences de ces formules (voir DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. IV, Déformation infiniment petite des surfaces), il y a intérêt à signaler quelques formes remarquables de l'équation (1). Prenons d'abord

$$k(u, v) \equiv 0;$$

chaque fonction $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ est une somme d'une fonction de u seul et d'une fonction de v seul; écrivons

$$(21) \quad \theta_1 = U_1 + V_1, \quad \theta_2 = U_2 + V_2, \quad \theta_3 = U_3 + V_3,$$

on a

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} x = V_2 U_3 - V_3 U_2 + \int U_2 dU_3 - U_3 dU_2 - \int V_2 dV_3 - V_3 dV_2, \\ y = V_3 U_1 - V_1 U_3 + \int U_3 dU_1 - U_1 dU_3 - \int V_3 dV_1 - V_1 dV_3, \\ z = V_1 U_2 - V_2 U_1 + \int U_1 dU_2 - U_2 dU_1 - \int V_1 dV_2 - V_2 dV_1. \end{array} \right.$$

C'est une surface signalée incidemment par Darboux (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 368). On a la propriété intéressante :

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} U_1' \frac{dx}{du} + U_2' \frac{dy}{du} + U_3' \frac{dz}{du} = 0, \\ V_1' \frac{dx}{dv} + V_2' \frac{dy}{dv} + V_3' \frac{dz}{dv} = 0. \end{array} \right.$$

En chaque point d'une asymptotique, la tangente à l'autre ligne asymptotique est parallèle à un plan fixe.

Les surfaces applicables sur le parabolôide de révolution sont définies par les formules (22), où l'on suppose de plus

$$(24) \quad U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = \frac{p}{4i},$$

où p est le paramètre du parabolôide : on obtient des surfaces réelles pour p réel ou p imaginaire pure.

Les surfaces développées des surfaces minima s'obtiennent pour

$$(25) \quad U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = 0.$$

On remarquera que, si l'on prend pour U_1, U_2, U_3 des polynomes entiers en u de degré 2, pour V_1, V_2, V_3 des polynomes entiers en v de degré 2, les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ seront des cubiques gauches. On trouve ainsi certaines surfaces, qui appartiennent aux deux catégories précédemment indiquées, en prenant ($\varepsilon = \pm 1$)

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \sqrt{i} \frac{1+k^2-u^2}{2k}, \quad U_2 = \sqrt{-i} \frac{1-k^2+u^2}{2k}, \quad U_3 = \sqrt{i} \frac{u}{k}, \\ V_1 = \varepsilon \sqrt{i} \frac{1+k^2-v^2}{2k}, \quad V_2 = \varepsilon \sqrt{-i} \frac{1-k^2+v^2}{2k}, \quad V_3 = \varepsilon \sqrt{i} \frac{v}{k}, \end{array} \right.$$

où k est une constante réelle; on obtient une surface réelle, sur

laquelle u et v sont imaginaires conjugués pour les points réels de la surface; cette surface est de degré 12, classe 8; elle est applicable sur le parabolôide de révolution réel $x^2 + y^2 = 4z$. J'ai étudié en détail cette surface, ou plutôt les deux surfaces obtenues pour $\varepsilon = +1$, puis $\varepsilon = -1$, au *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. L, 1922, p. 153-219; j'ai montré que l'une des deux surfaces, mais non l'autre, est *physiquement* applicable sur le parabolôide.

Si l'on prend

$$(27) \quad \begin{cases} U_1 = \sqrt{i} \frac{1-u^2}{2}, & U_2 = \sqrt{i} \frac{1+u^2}{2}, & U_3 = \sqrt{i} u; \\ V_1 = \varepsilon \sqrt{i} \frac{1-v^2}{2}, & V_2 = \varepsilon \sqrt{i} \frac{1+v^2}{2}, & V_3 = \varepsilon \sqrt{i} v, \end{cases}$$

on obtient l'une ou l'autre des développées de la surface minima d'Enneper; le degré est encore 12, la classe 8 et les asymptotiques imaginaires.

La surface minima d'Enneper (degré 9, classe 6) est une autre surface correspondant aux U, V polynomes du second degré: on peut prendre pour elle

$$(28) \quad \begin{cases} x = 3u + 3v + 2u^3 + 2v^3 - 6u^2v - 6uv^2, & \xi = 2u + 2v, \\ y = 3u - 3v + 2u^3 - 2v^3 + 6u^2v - 6uv^2, & \eta = -2u + 2v, \\ z = 12uv; & \zeta = 2u^2 + 2v^2 - 1, \\ & \tau = -12uv - 8uv(u^2 + v^2). \end{cases}$$

Cette surface correspond à

$$(29) \quad \begin{cases} \theta_1 = \frac{i}{\sqrt{6}}(u+v), & \theta_2 = \frac{i}{\sqrt{6}}(v-u), & \theta_3 = \frac{i}{\sqrt{6}}\left(u^2 + v^2 - \frac{1}{2}\right); \\ \theta_1 = \frac{i}{4\sqrt{3}} \frac{x}{3uv + 2uv(u^2 + v^2)}, & \theta_2 = \frac{i}{4\sqrt{3}} \frac{y}{3uv + 2uv(u^2 + v^2)}, \\ \theta_3 = \frac{i}{4\sqrt{3}} \frac{z}{3uv + 2uv(u^2 + v^2)}. \end{cases}$$

Cet exemple suffit pour montrer que les deux équations déjà citées

$$(30) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = k(u, v) \theta, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = k_1(u, v) \theta.$$

sont différentes : l'intégration de l'une se ramène à l'intégration de l'autre : j'y reviendrai un peu plus bas.

On obtient une surface encore plus simple, de degré 6 et classe 4 par les formules

$$(31) \quad \begin{cases} x = u - v, & y = u^2 + v^2, & z = (u + v)^3; \\ \xi = 3(u^2 - v^2), & \eta = -3(u + v), & \zeta = 1, \\ & \tau = -(u + v)(u^2 + v^2 - 4uv), \end{cases}$$

qui correspond à

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{3(u^2 - v^2)}{\sqrt{3}}, & \theta_2 &= \frac{-3(u + v)}{\sqrt{3}}, & \theta_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \Theta_1 &= \frac{\sqrt{3}(u - v)}{(u + v)(u^2 + v^2 - 4uv)}, & \Theta_2 &= \frac{\sqrt{3}(u^2 + v^2)}{(u + v)(u^2 + v^2 - 4uv)}, \\ & \Theta_3 &= \frac{\sqrt{3}(u + v)^3}{(u + v)(u^2 + v^2 - 4uv)}. \end{aligned} \right.$$

La surface a pour équations, ponctuelle et tangentielle

$$(33) \quad (2y - x^2)^3 = z^2, \quad \eta^4 - 27\zeta^2(\xi^2 - 2\eta\tau) = 0.$$

5. Il est bon de remarquer que, si les coordonnées homogènes tangentielles ξ, η, ζ, τ ont été multipliées par le facteur convenable de sorte que $\theta_1 = \frac{\xi}{t}$ et $\Theta_1 = \frac{x}{\tau}$, la relation

$$x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau = 0$$

entraîne

$$(34) \quad \theta_1\Theta_1 + \theta_2\Theta_2 + \theta_3\Theta_3 + 1 = 0.$$

On déduit de (34) diverses conséquences intéressantes; si l'on a calculé $\theta_1, \theta_2, \theta_3, x, y, z$ (x, y, z désignant les coordonnées cartésiennes), puisque $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ sont proportionnelles à x, y, z , on déduit de (34)

$$(35) \quad \theta_1 = \frac{-x}{x\theta_1 + y\theta_2 + z\theta_3}, \quad \theta_2 = \frac{-y}{x\theta_1 + y\theta_2 + z\theta_3}, \quad \theta_3 = \frac{-z}{x\theta_1 + y\theta_2 + z\theta_3}.$$

La symétrie entraîne

$$(36) \quad \theta_1 = \frac{-\xi}{\xi\theta_1 + \eta\theta_2 + \zeta\theta_3}, \quad \dots$$

Il est facile d'autre part de montrer que, R et R' étant les rayons de courbure principaux de la surface au point (u, v) , c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, on a

$$(37) \quad \theta_1 = c \sqrt[4]{-RR'}, \quad \theta_2 = c' \sqrt[4]{-RR'}, \quad \theta_3 = c'' \sqrt[4]{-RR'}.$$

Cela résulte de ce que, si l'on considère la ligne asymptotique $v = \text{const.}$,

$$(38) \quad \begin{cases} x = \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} \right) du, & y = \int \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} \right) du, \\ z = \int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right) du, \end{cases}$$

le déterminant

$$| x' \quad x'' \quad x''' |,$$

où x', x'', x''' désignent les dérivées par rapport à u , se réduit au carré de

$$\delta \equiv \left| \theta_1 \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \quad \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u^2} \right|,$$

et que les trois mineurs de la matrice

$$(39) \quad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

sont égaux à $\delta \theta_1, \delta \theta_2, \delta \theta_3$. La formule classique

$$(40) \quad T = \frac{-S(y'z'' - z'y'')^2}{|x' \quad x'' \quad x'''|}$$

donne donc ici, pour les asymptotiques $v = \text{const.}$,

$$(41) \quad T = -(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2).$$

Le même calcul, fait pour les asymptotiques $u = \text{const.}$, donne

$$(42) \quad T = +(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2).$$

D'autre part on sait, d'après la formule d'Enneper (que cette méthode redonnerait aisément), que l'on a pour une asymptotique

$$T = \pm \sqrt{-RR'}.$$

Les formules (37) en découlent aussitôt.

Si l'on considère maintenant la surface polaire réciproque de la proposée, par rapport à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ comme définie par les coordonnées *ponctuelles* (ξ, η, ζ, τ) , et si l'on appelle $\gamma, \gamma', \gamma''$ les cosinus directeurs de la normale à cette nouvelle surface, ρ et ρ' les rayons de courbure principaux, on a de même

$$(43) \quad \theta_1 = \gamma \sqrt[4]{-\rho\rho'}, \quad \theta_2 = \gamma' \sqrt[4]{-\rho\rho'}, \quad \theta_3 = \gamma'' \sqrt[4]{-\rho\rho'}.$$

La relation (34), si l'on appelle V l'angle du rayon vecteur OM de la première surface avec le plan tangent en M , devient

$$(44) \quad RR' \rho \rho' = \frac{1}{\sin^4 V},$$

formule élégante et symétrique liant les courbures aux points homologues des deux surfaces polaires réciproques.

6. Il est bon aussi, pour les applications, de savoir calculer $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ par les voies les plus rapides quand on connaît les expressions paramétriques $x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \tau$ *a priori*. On a

$$\theta_1 = \rho \xi, \quad \theta_2 = \rho \eta, \quad \theta_3 = \rho \zeta,$$

où ρ est un facteur, numérique ou fonction de (u, v) , inconnu. Donc

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} = \rho^2 \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial u} \right)$$

donne le carré de ρ : changer $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ de signe simultanément ne change pas la surface. Comme ρ^2 est seul connu, on voit que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ peuvent contenir une racine carrée portant sur une fonction de $x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \tau$ et de leurs dérivées : les formules (35) montrent aussitôt que $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ contiendront le même radical. Nous avons donné des exemples de surfaces unicursales, où les coordonnées sont exprimées rationnellement au moyen des paramètres asymptotiques et où $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, et par suite aussi $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ sont aussi rationnels en u et v . Voici un exemple différent, obtenu avec une surface classique, la surface de Steiner, où apparaît un radical. Soient les équations

$$(45) \quad x = \left(\frac{u+v}{1+uv} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad y = \left(\frac{1-uv}{1+uv} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad z = \left(\frac{u-v}{1+uv} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On vérifie aussitôt qu'en prenant

$$(46) \quad \sqrt{x} = \left(\frac{u+v}{1+uv} \right)^2, \quad \sqrt{y} = \left(\frac{1-uv}{1+uv} \right)^2, \quad \sqrt{z} = - \left(\frac{u-v}{1+uv} \right)^2,$$

on a

$$(47) \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - 1 = 0,$$

et cela permet d'obtenir aussitôt les paramètres du plan tangent

$$(48) \quad \xi = \frac{1}{(u+v)^2}, \quad \eta = \frac{1}{(1-uv)^2}, \quad \zeta = - \frac{1}{(u-v)^2}, \quad \tau = \frac{-1}{(1+uv)^2},$$

et l'on trouve aussitôt que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ s'obtiennent en multipliant ξ, η, ζ par

$$\sqrt{\frac{2(u^2 - v^2)^3 (1 - uv)^3}{(1 + uv)^5}}.$$

7. En dehors de leur intérêt propre, les formules de Lelievre conduisent à la solution de la question suivante : « Trouver les surfaces S_1 correspondant à la surface S avec orthogonalité des éléments linéaires. » Si l'on pose pour abrégé

$$(49) \quad (\omega, \theta) = \int \left(\omega \frac{\partial \theta}{\partial u} - \theta \frac{\partial \omega}{\partial u} \right) du - \left(\omega \frac{\partial \theta}{\partial v} - \theta \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) dv,$$

on constate aussitôt que, si ω est une solution *arbitraire* de l'équation déjà citée,

$$(E) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = k(u, v) \theta,$$

la surface S_1

$$(50) \quad x_1 = (\omega, \theta_1), \quad x_2 = (\omega, \theta_2), \quad x_3 = (\omega, \theta_3),$$

qui n'est plus rapportée à un système d'asymptotiques mais à un système conjugué, correspond à S avec orthogonalité des éléments linéaires.

Si nous considérons en même temps que l'équation (E) l'équation déjà rencontrée aussi

$$(E') \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = k_1(u, v) \theta$$

correspondant à la surface S , étudiée en coordonnées tangen-

tielles, on constate que ω étant la solution de (E) qui a fourni S_1 , l'expression

$$(51) \quad \Omega \equiv x_1 \theta_1 + y_1 \theta_2 + z_1 \theta_3$$

est solution de (E') : à toute solution de (E) correspond ainsi une solution de (E') et inversement. Je ne puis que renvoyer le lecteur au Tome IV de la *Théorie des surfaces* de Darboux.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (SESSION DE 1925).

Mathématiques Spéciales.

Une surface du second ordre (H) a pour équation, en axes rectangulaires :

$$(H) \quad x(x - a) + y(y - mz) = 0,$$

où a et m sont des constantes données.

Soient G_λ et G_μ deux génératrices rectilignes de cette surface, de même système que Oz , et ayant pour équation :

$$G_\lambda \begin{cases} x - a - \lambda y = 0, \\ \lambda x + y - mz = 0; \end{cases}$$
$$G_\mu \begin{cases} x - a - \mu y = 0, \\ \mu x + y - mz = 0. \end{cases}$$

I. Former l'équation générale des surfaces du second ordre $H_{\lambda\mu}$, qui contiennent les deux droites G_λ et G_μ et qui sont coupées par le plan des xy suivant un cercle.

Quelle est l'intersection de la surface (H) et d'une des surfaces $H_{\lambda\mu}$?

λ et μ étant donnés, quel est le lieu géométrique des centres des surfaces $H_{\lambda\mu}$?

II. Montrer que le contour apparent d'une surface $H_{\lambda\mu}$, sur le plan xOy , parallèlement à Oz , est une conique C dont un foyer est à l'origine et dont l'axe focal est un axe de symétrie de cette surface.

III. λ et μ étant donnés, trouver les enveloppes de l'axe non focal et des directrices réelles de la conique C .

IV. Dédire de l'équation des surfaces $H_{\lambda\mu}$ l'équation générale des paraboloides $P_{\lambda\mu}$, qui admettent le plan xOy pour plan directeur, et passent par deux génératrices de la surface (H) , de même système que Oz .

Former l'équation tangentielle de ces mêmes surfaces.

Quel est le lieu géométrique S des sommets des paraboloides $P_{\lambda\mu}$ qui passent par un point donné P ?

Quel est le lieu géométrique Σ des sommets de ces paraboloides qui sont tangents à un plan donné π ?

S restant fixe, quel est le lieu du point P correspondant?

Σ restant fixe, quelle est l'enveloppe du plan π correspondant?

On examinera, en particulier, le cas où S et Σ coïncident.

V. Supposant que la génératrice G_μ se rapproche indéfiniment de la génératrice G_λ , le paraboloides $P_{\lambda\mu}$ a pour limite un paraboloides R_λ . Soit Δ la génératrice principale de R_λ , qui n'est pas dans le plan xOy .

Trouver la surface lieu de Δ , quand λ varie. Étudier les sections de cette surface par des plans parallèles au plan xOy .

VI. Deux paraboloides R_{λ_1} , R_{λ_2} , dont les axes sont rectangulaires se coupent suivant une droite réelle, à distance finie.

On demande d'étudier la surface engendrée par cette droite et de la comparer à (H) .

SOLUTION ANALYTIQUE PAR M. H. V.

I. Étant donnée la nature des questions posées, il est clair que, surtout dans les quatre premiers paragraphes, les coordonnées tangentielles simplifieront beaucoup l'exposé.

La quadrique H, qui n'est autre que le lieu de l'intersection des plans rectangulaires passant par les deux droites fixes ($x = a, y = 0; x = 0, y = mz$), ou par ces deux autres ($x = 0, y = 0; x = a, y = mz$), a pour équations, ponctuelle et tangentielle :

$$\begin{aligned} x(x - a) + y(y - mz) &= 0, \\ a^2\omega(mv + \omega) + m^2h(ua + h) &= 0. \end{aligned}$$

Cette dernière s'obtient de suite en remarquant par exemple que H fait partie du faisceau tangentiel défini par les couples de sommets opposés du quadrilatère formé par les quatre droites citées plus haut.

Les quadriques $H_{\lambda\mu}$, coupant H suivant deux génératrices du même système, ont encore en commun avec elle deux autres génératrices de l'autre système, complétant un quadrilatère gauche ($\alpha\beta\gamma\delta$). Elles appartiennent donc, soit au faisceau ponctuel défini par H et deux plans tels que $\alpha\beta\gamma, \gamma\delta\alpha$; soit au faisceau tangentiel défini par H et deux points tels que $\alpha\gamma$.

La condition de l'énoncé (section circulaire dans le plan xOy) implique que les deux plans $\alpha\beta\gamma, \gamma\delta\alpha$, qui ont des équations de la forme

$$\begin{aligned} \lambda x + y - mz + \theta(x - a - \lambda y) &= 0, \\ \mu x + y - mz + \rho(x - a - \mu y) &= 0, \end{aligned}$$

soient coupés par le plan $z = 0$ suivant deux droites isotropes; et comme on peut toujours échanger au besoin λ avec μ , on doit donc avoir

$$\frac{\lambda + \theta}{1 - \lambda\theta} = i, \quad \frac{\mu + \rho}{1 - \mu\rho} = -i,$$

d'où en général ($\lambda \neq i, \mu \neq -i$)

$$\theta = i, \quad \rho = -i.$$

L'équation ponctuelle de $H_{\lambda\mu}$ est donc, A étant un paramètre arbitraire :

$$[\lambda x + y - mz + i(x - a - \lambda y)][\mu x + y - mz - i(x - a - \mu y)] + A[x(x - a) + y(y - mz)] = 0,$$

ce qui se met immédiatement sous la forme

$$(I) \quad F(x, y, z) = (K + \lambda\mu - 1)(x^2 + y^2) - m(\lambda + \mu)zx - Kmyz - Kax + a(\lambda + \mu)y + m^2z^2 + a^2 = 0,$$

en posant

$$K = A - i(\lambda - \mu) + 2.$$

D'autre part, l'un des sommets du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ est à l'intersection du plan

$$\lambda x + y - mz + i(x - a - \lambda y) = 0$$

avec la droite

$$\begin{aligned} x - a - \mu y &= 0, \\ \mu x + y - mz &= 0. \end{aligned}$$

De ces trois équations on tire la combinaison évidente

$$(\lambda - \mu)x + i(\mu - \lambda)y = 0,$$

d'où $x = iy$ puisque les deux génératrices G_λ et G_μ sont distinctes; le point défini par les trois équations ci-dessus a les coordonnées homogènes suivantes :

$$(\alpha) \quad ia, \quad a, \quad \frac{a}{m}(1 + i\mu), \quad i - \mu.$$

De même le sommet opposé à celui-là dans le quadrilatère a pour coordonnées

$$(\gamma) \quad -ia, \quad a, \quad \frac{a}{m}(1 - i\lambda), \quad -i - \lambda.$$

L'équation tangentielle des quadriques $H_{\lambda\mu}$ est donc

$$\begin{aligned} &A' [a^2 \omega(m\nu + \omega) + m^2 h(ua + h)] \\ &+ \left[iau + av + \frac{a}{m}(1 + i\mu)\omega + (i - \mu)h \right] \\ &\times \left[-iau + av + \frac{a}{m}(1 - i\lambda)\omega - (i + \lambda)h \right] = 0, \end{aligned}$$

A' étant un paramètre; c'est-à-dire, en posant

$$\begin{aligned} (\text{II}) \quad \Phi(u, \nu, \omega, h) \quad &K' = m^2 A' - i(\lambda - \mu) + 2, \\ &\equiv a^2(u^2 + \nu^2) + K'auh - a(\lambda + \mu)\nu h + (\lambda\mu - 1 + K')h^2 \\ &+ \frac{a^2}{m}(\lambda + \mu)\omega u + K' \frac{a^2}{m} \nu \omega + \frac{a^2}{m^2}(\lambda\mu - 1 + K')\omega^2 = 0. \end{aligned}$$

Les génératrices communes à $H_{\lambda\mu}$ et à H , autres que G_λ et G_μ , sont les génératrices de second système

$$y = sx, \quad x - a + s(y - mz) = 0$$

qui passent par les points (α) et (γ) . Elles correspondent donc à $s = \mp i$, et par conséquent à

$$z = -\frac{a}{ms} = \pm \frac{a}{im};$$

ce sont deux droites isotropes horizontales rencontrant Oz .

Le centre de $H_{\lambda\mu}$ est en évidence sur (II) ; il a pour équation

$$\Phi'_\mu = 0,$$

soit

$$(I) \quad K'au - a(\lambda + \mu)v + 2(\lambda\mu - 1 + K')h = 0,$$

ses coordonnées cartésiennes sont

$$(C) \quad x = \frac{aK'}{2(\lambda\mu - 1 + K')}, \quad y = -\frac{a(\lambda + \mu)}{2(\lambda\mu - 1 + K')}, \quad z = 0,$$

et il décrit, quand K' varie, une droite du plan des xy ; cette droite joint le point $\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ au point $\left(0, \frac{\lambda + \mu}{2(1 - \lambda\mu)}, 0\right)$.

II. On obtient l'équation tangentielle du contour apparent horizontal de $H_{\lambda\mu}$, en faisant $w = 0$ dans l'équation (II) . Cela donne

$$(D) \quad \varphi(u, v, h) \equiv a^2(u^2 + v^2) + K'auh - a(\lambda + \mu)vh + (\lambda\mu - 1 + K')h^2 = 0,$$

c'est-à-dire une conique dont les deux foyers réels sont en évidence (l'équation étant de la forme $u^2 + v^2 + ff' = 0$). Ces foyers sont : $h = 0$ (l'origine) et

$$(F) \quad K'au - a(\lambda + \mu)v + (\lambda\mu - 1 + K')h = 0.$$

Ce dernier point (F) est homothétique du centre de $H_{\lambda\mu}$, dans le rapport 2, par rapport à l'origine O . L'axe focal est donc OF . Cette droite OF est un axe de symétrie de la quadrique $H_{\lambda\mu}$, car elle passe en son centre, d'une part, et d'autre part sa direction est principale; en effet le plan normal à OF , passant au centre C , a une équation de la forme

$$aK'x - a(\lambda + \mu)y + h_0 = 0,$$

avec des coordonnées

$$u_0 = aK', \quad v_0 = -a(\lambda + \mu), \quad w_0 = 0,$$

h_0 en résultant par l'équation (I) .

Le pôle de ce plan a pour coordonnées $\Phi'_{u_0}, \Phi'_{v_0}, \Phi'_{w_0}, 0$; et ces coordonnées elles-mêmes s'écrivent :

$$- 2a^2u_0 + K'ah_0, \quad 2a^2v_0 - a(\lambda + \mu)h_0, \quad \frac{a^2}{m}(\lambda + \mu)u_0 + K'\frac{a^2}{m}v_0, \quad 0,$$

c'est-à-dire

$$u_0(2a^2 + h_0), \quad v_0(2a^2 + h_0), \quad 0, \quad 0.$$

Le pôle est donc à l'infini dans la direction $u_0, v_0, 0$, c'est-à-dire dans la direction de OF , ce qu'il fallait démontrer.

III. L'axe non focal de la conique (D) est perpendiculaire à OC et passe par le centre. Ses coordonnées tangentielles dans le plan horizontal satisfont donc aux équations

$$K'au - a(\lambda + \mu)v + 2(\lambda\mu - 1 + K')h = 0$$

et

$$(\lambda + \mu)u + K'v = 0.$$

L'élimination de K' fournit l'enveloppe de cet axe : c'est la parabole

$$(G) \quad a(\lambda + \mu)(u^2 + v^2) + 2h[(\lambda + \mu)u + (1 - \lambda\mu)v] = 0,$$

dont le foyer ($h = 0$) et la direction de l'axe [point à l'infini : $(\lambda + \mu)u + (1 - \lambda\mu)v = 0$] sont en évidence.

Si une directrice a pour coordonnées u, v, h , son pôle a les coordonnées ponctuelles $\varphi'_u, \varphi'_v, \varphi'_h$. On aura la directrice du foyer O, en écrivant que :

$$\varphi'_u = 0, \quad \varphi'_v = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 2a^2u + K'ah &= 0, \\ 2a^2v - a(\lambda + \mu)h &= 0. \end{aligned}$$

Cette directrice passe donc par le point fixe $(x = 0, y = \frac{-2a}{\lambda + \mu})$.

Le second foyer F avait pour équation l'équation (F); la directrice correspondante satisfera donc aux conditions

$$\frac{\varphi'_u}{aK'} = \frac{\varphi'_v}{-a(\lambda + \mu)} = \frac{\varphi'_h}{(\lambda\mu - 1 + K')},$$

c'est-à-dire

$$\frac{2au + K'h}{K'} = \frac{2av - (\lambda + \mu)h}{-a(\lambda + \mu)} = \frac{K'au - a(\lambda + \mu)v + 2(\lambda\mu - 1 + K')h}{(\lambda\mu - 1 + K')}.$$

En retranchant h des trois membres de cette double égalité, il vient d'abord

$$K' = -(\lambda + \mu) \frac{u}{v},$$

ce qui était évident d'avance puisque les deux directrices sont parallèles; puis en éliminant K' ,

$$(P_2) \quad a(\lambda + \mu)(u^2 + v^2) + \left(\frac{2av}{\lambda + \mu} + h \right) [(\lambda + \mu)u + (1 - \lambda\mu)v] = 0.$$

La seconde directrice réelle enveloppe donc une parabole dont le foyer est le point $\left(x = 0, y = \frac{2a}{\lambda + \mu} \right)$ et dont l'axe passe au point à l'infini

$$(\lambda + \mu)u + (1 - \lambda\mu)v = 0.$$

Cette parabole (P_2) résulte d'ailleurs de la parabole (P_1) par une translation (égale à 0, $\frac{2a}{\lambda + \mu}$) et une homothétie de rapport 2.

IV. Pour trouver celles des surfaces $H_{\lambda\mu}$ qui sont des paraboloides (dont alors un plan directeur est nécessairement horizontal), il suffit ou bien de s'arranger pour que l'équation (I) contienne z en facteur dans ses termes du second degré, ce qui donne

$$K = 1 - \lambda\mu,$$

ou bien de s'arranger pour que la quadrique (II) soit tangente au plan de l'infini, c'est-à-dire que l'équation (II) n'ait pas de terme en h^2 , ce qui donne

$$K' = 1 - \lambda\mu.$$

Les paraboloides $P_{\lambda\mu}$ ont donc pour équation ponctuelle

$$(P'_{\lambda\mu}) \quad m(\lambda + \mu)zx + m(1 - \lambda\mu)yz + (1 - \lambda\mu)ax \\ - a(\lambda + \mu)y - m^2z^2 - a^2 = 0,$$

et pour équation tangentielle

$$(P''_{\lambda\mu}) \quad \psi(u, v, w, h) \equiv a(u^2 + v^2) + (1 - \lambda\mu) \left(uh + \frac{a}{m}vw \right) \\ - (\lambda + \mu) \left(vh - \frac{a}{m}wu \right) = 0.$$

L'équation ponctuelle, mise sous la forme

$$mz[(\lambda + \mu)x + (1 - \lambda\mu)y - mz] + [(1 - \lambda\mu)ax - a(\lambda + \mu)y - a^2] = 0$$

($p_1 p_2 + p_3 = 0$),

met en évidence les deux plans directeurs $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ et le plan tangent au sommet $p_3 = 0$. Ce dernier sommet (s) est à l'intersection des trois plans p_1 , p_2 , p_3 , c'est le point

$$(s) \quad x = a \frac{1 - \lambda\mu}{(1 - \lambda\mu)^2 + (\lambda + \mu)^2}, \quad y = -\frac{a(\lambda + \mu)}{(1 - \lambda\mu)^2 + (\lambda + \mu)^2}, \quad z = 0.$$

On l'aurait aussi facilement déduit de l'équation (P''_μ), où le coefficient de h indique le point à l'infini sur l'axe; les quantités directrices de l'axe sont donc $1 - \lambda\mu$, $-(\lambda + \mu)$, 0; le plan tangent perpendiculaire a donc pour coordonnées

$$u_0 = 1 - \lambda\mu, \quad v_0 = -(\lambda + \mu), \quad w_0 = 0, \quad h_0 = -a,$$

la quatrième coordonnée étant immédiatement déduite de l'équation (P''). Ensuite le sommet est le pôle de ce plan, et il a pour coordonnées

$$x = \frac{\psi'_{u_0}}{\psi'_{h_0}}, \quad y = \frac{\psi'_{v_0}}{\psi'_{h_0}}, \quad z = \frac{\psi'_{w_0}}{\psi'_{h_0}},$$

ce qui redonne les formules (s).

Si le parabolôïde ($P_{\lambda\mu}$) passe par un point fixe, on a, d'après l'équation (P'), une relation linéaire entre $(1 - \lambda\mu)$ et $(\lambda + \mu)$, de la forme

$$A(1 - \lambda\mu) - B(\lambda + \mu) + C = 0.$$

L'élimination de $(1 - \lambda\mu)$ et $(\lambda + \mu)$ entre cette équation et les équations (s) donne immédiatement

$$(S) \quad a(Ax + By) + C(x^2 + y^2) = 0.$$

Le lieu S du sommet (s) est donc un cercle du plan $z = 0$.

Si le parabolôïde P reste tangent à un plan fixe, on a, d'après l'équation (P''), une relation linéaire entre $(1 - \lambda\mu)$ et $(\lambda + \mu)$, de la forme

$$A'(1 - \lambda\mu) - B'(\lambda + \mu) + C' = 0,$$

d'où encore le lieu

$$(\Sigma) \quad a(A'x + B'y) + C'(x^2 + y^2) = 0, \quad z = 0.$$

C'est un cercle Σ .

Si S est donné, c'est que (A, B, C) sont donnés (à un facteur près); on a donc d'après (P') , (x, y, z) désignant le point fixé,

$$\frac{myz + ax}{A} = \frac{-mzx + ay}{B} = \frac{-m^2z^2 - a^2}{C};$$

des combinaisons évidentes montrent que ces trois rapports sont encore égaux aux deux suivants :

$$= \frac{y(m^2z^2 + a^2)}{Amz + Ba} = \frac{x(m^2z^2 + a^2)}{Aa - Bmz}.$$

Le lieu du point (x, y, z) dans ces conditions comprend donc, outre les deux plans imaginaires $m^2z^2 + a^2 = 0$, la droite d'équations :

$$\begin{aligned} Amz + Ba + Cy &= 0, \\ Bmz - Aa - Cx &= 0. \end{aligned}$$

Si le cercle Σ reste fixe, c'est que (A', B', C') sont donnés (à un facteur près). On a alors, d'après P'' , entre les coordonnées du plan fixé π :

$$\frac{uh + \frac{a}{m}vw}{A'} = \frac{vh - \frac{a}{m}wu}{B'} = \frac{a(u^2 + v^2)}{C'};$$

des combinaisons simples montrent que ces trois rapports sont égaux encore à

$$= \frac{h(u^2 + v^2)}{A'u + B'v} = \frac{\frac{a}{m}w(u^2 + v^2)}{A'v - B'u}.$$

L'enveloppe du plan π comprend donc, outre les deux points cycliques $u^2 + v^2 = 0$ du plan horizontal, la droite définie par les deux points

$$\begin{aligned} a(A'u + B'v) - C'h &= 0, \\ m(A'v - B'u) - C'w &= 0. \end{aligned}$$

Un plan passant par cette droite a pour équation

$$ux + vy + \frac{m}{C'}(A'v - B'u)z + \frac{a}{C'}(A'u + B'v) = 0,$$

ou encore

$$u[B'mz - A'a - C'x] - v[A'mz + B'a + C'y] = 0.$$

On voit donc que, si S et Σ coïncident, c'est-à-dire si A', B', C' ,

sont proportionnels à A, B, C, la droite enveloppe du plan π se confond avec la droite lieu du point (x, y, z) .

V. La dernière partie se traite aisément en coordonnées ponctuelles. On a l'équation du parabolôide R_λ en faisant tendre μ vers λ dans l'équation ci-dessus $P'_{\lambda\mu}$, ce qui donne

$$(R_\lambda) \quad mz[2\lambda x + (1 - \lambda^2)y - mz] + (1 - \lambda^2)ax - 2a\lambda y - a^2 = 0.$$

Le plan tangent au sommet est en évidence comme on l'a déjà fait remarquer, c'est le plan

$$(1 - \lambda^2)x - 2\lambda y - a = 0$$

(qui est bien normal aux deux plans directeurs). La génératrice principale non horizontale est donc

$$(\Delta) \quad \begin{cases} (1 - \lambda^2)x - 2\lambda y - a = 0, \\ 2\lambda x + (1 - \lambda^2)y - mz = 0. \end{cases}$$

En éliminant λ , il vient le lieu de Δ quand λ varie :

$$4(x^2 + y^2)^2 - (mzx - ay)^2 = 4(x^2 + y^2)(ax + myz).$$

C'est une surface du quatrième degré, dont les sections par $z = \text{const.}$ sont des quartiques bicirculaires ayant un point de rebroussement à l'origine. Passant aux coordonnées polaires (ρ, θ) , l'équation de ces sections est

$$4\rho^4 - \rho^2(mz \cos \theta - a \sin \theta)^2 - 4\rho^3(a \cos \theta + mz \sin \theta) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2\rho - a \cos \theta - mz \sin \theta)^2 = m^2 z^2 + a^2.$$

Les courbes $z = \text{const.}$ sont donc des cardiôides, podaires de circonférences rencontrant Oz , et de rayon $\frac{1}{4}\sqrt{m^2 z^2 + a^2}$.

VI. L'axe du parabolôide R_λ est dirigé par

$$\lambda^2 - 1, \quad 2\lambda$$

Deux parabolôides à axes rectangulaires satisferont donc à la condition

$$(\lambda_1^2 - 1)(\lambda_2^2 - 1) + 4\lambda_1\lambda_2 = 0,$$

ce qui se met de suite sous la forme

$$1 + \lambda_1 \lambda_2 = \pm (\lambda_1 - \lambda_2).$$

D'autre part, il passe en un point (x, y, z) deux paraboloïdes R_λ , dont les valeurs du paramètre λ correspondant, sont les racines de l'équation du second degré

$$\lambda^2(myz + ax) - 2\lambda(mzx - ay) + m^2z^2 + a^2 - myz - ax = 0.$$

On en conclut

$$1 + \lambda_1 \lambda_2 = \frac{m^2z^2 + a^2}{myz + ax},$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 4 \frac{(mzx - ay)^2}{(myz + ax)^2} - 4 \frac{m^2z^2 + a^2}{myz + ax} + 4.$$

En portant dans la relation ci-dessus, on trouve de suite le lieu des points communs à R_{λ_1} et R_{λ_2}

$$(m^2z^2 + a^2)[4(x^2 + y^2) - 4(myz + ax) - (m^2z^2 + a^2)] = 0,$$

qui se décompose en $m^2z^2 + a^2 = 0$ et en la quadrique

$$H - \frac{1}{4}(m^2z^2 + a^2) = 0;$$

c'est un hyperboloïde à une nappe, qui coupe H suivant deux circonférences, d'ailleurs imaginaires.

QUESTIONS PROPOSÉES.

2483. On pose

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Démontrer que

$$I_0 I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

A. LABROUSSE.

2484. Si l est la longueur d'une lemniscate, I le moment d'inertie de la courbe (supposée homogène et de densité linéaire égale à l'unité) par rapport à son point double, S l'aire limitée par la courbe, on a la relation

$$lI = 4\pi S^2.$$

A. LABROUSSE.

2485. On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2k}}}$$

n et k étant des entiers. Mettre $I_0, I_1, \dots, I_{2k-1}$, sous forme de limites de produits et démontrer les relations

$$I_0 I_k = I_1 I_{k+1} = I_2 I_{k+2} = \dots = I_{k-2} I_{2k-2} = \frac{2k}{\pi}$$

A. LABROUSSE.

2486. Si le triangle XYZ est circonscrit au triangle X'Y'Z' et lui est directement semblable :

1° L'orthocentre de X'Y'Z' est le centre du cercle circonscrit à XYZ et les pieds des hauteurs de X'Y'Z' sont les traces de ses côtés sur ceux du triangle des milieux des côtés de XYZ.

2° Le centre du cercle circonscrit à X'Y'Z' est équidistant des orthocentres des deux triangles, et ce cercle est bitangent à la conique inscrite à XYZ, qui a pour foyers les deux orthocentres et pour cercle directeur le cercle circonscrit à XYZ.

E. BALLY.

2487. 1° Les orthocentres des divers triangles d'un quadrangle inscriptible à un cercle forment un nouveau quadrangle inscriptible dont les triangles ont pour orthocentres les sommets du premier. Les deux quadrangles sont symétriques par rapport à un point, qui est le symétrique du centre de l'un des cercles relativement au centre de gravité des sommets du quadrangle inscrit correspondant. Leurs huit sommets se décomposent de quatre façons en deux quadrangles inscriptibles tels que les triangles de chacun aient pour orthocentres les sommets de l'autre. Les centres des cercles égaux circonscrits aux huit quadrangles forment une seconde figure égale à la première, possédant le même centre de symétrie, et les centres des cercles circonscrits aux quadrangles de la seconde sont réciproquement les huit sommets de la première.

2° Les symétriques d'un point d'un cercle circonscrit à un quadrangle, par rapport aux six côtés de ce quadrangle, sont les six sommets d'un même quadrilatère, dont chaque côté passe en l'orthocentre de l'un des triangles du quadrangle. Chaque triangle du quadrilatère est semblable au triangle correspondant d'orthocentres qui lui est inscrit.

3° Inversement, étant donné un quadrilatère, les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles de ses côtés forment un quadrangle inscriptible à un cercle qui passe au point de concours des premiers. Les orthocentres des triangles de ce quadrangle sont respectivement situés sur les côtés du quadrilatère.

E. BALLY.

2488. Le *point principal* de la tangente en un point de l'hypocycloïde à trois rebroussements étant le point, situé sur cette tangente, où le cercle générateur qui passe au contact de la tangente et est égal au cercle inscrit à l'hypocycloïde touche ce cercle inscrit, on a cette propriété :

Les points principaux de quatre tangentes à l'hypocycloïde à trois rebroussements sont les orthocentres des quatre triangles qui ont pour sommets les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles ayant pour côtés ces tangentes.

E. BALLY.

2489. Il y a deux hypocycloïdes à trois rebroussements égales inscrites à un triangle donné et dont les cercles inscrits aient un rayon donné. Leurs centres sont deux sommets opposés d'un losange qui a pour autres sommets l'orthocentre et le circumcentre du triangle. Leur rayon est au côté de ce losange comme le rayon du cercle circonscrit au triangle l'est à la diagonale des derniers sommets mentionnés du losange.

Sur chaque côté du triangle, les deux points principaux sont symétriques relativement au milieu de ce côté. Les deux tangentes à ces hypocycloïdes, qui ont leurs points principaux respectifs en deux points des cercles inscrits qui soient symétriques relativement au centre de symétrie de ces cercles, sont deux asymptotes d'une même hyperbole circonscrite au triangle, et leur angle est constant (cf. L. BICKART, *I. M.*, 1923, p. 78-79, n° 5280).

E. BALLY.

CORRESPONDANCE.

M. R. Goormaghtigh. — *Sur les courbes gauches Γ_1 dont les binormales sont les normales principales d'une autre courbe gauche Γ_2 .* — M. Bricard, répondant à une question de M. G. Fontené (*Nouvelles Annales*, 1920, p. 188), a donné la forme de l'équation intrinsèque caractérisant les courbes Γ_1 ; on peut donner à la condition pour qu'une courbe gauche soit une courbe Γ_1 une forme qui nous paraît plus simple. On sait, en effet, qu'une courbe plane peut être *tordue*, par rotation de ses trièdres fondamentaux, de telle manière que les courbures soient conservées; ceci posé, on a le résultat suivant :

Pour tordre une courbe plane de manière qu'elle devienne une courbe gauche dont les binormales soient les normales principales d'une autre courbe, il faut que la torsion varie

proportionnellement à la cotangente de l'angle de contingence de la courbe plane.

Il existe entre certaines courbes spéciales Γ_1 et Γ_2 des rapports qui, croyons-nous, n'ont pas encore été signalés.

Si Γ_1 est une géodésique de cône, il en est de même de Γ_2 . La courbe Γ_2 est alors une chaînette tordue et la courbe Γ_1 peut s'obtenir en tordant la développée d'une chaînette d'égale résistance.

La chaînette tordue dont il est ici question jouit d'ailleurs d'une propriété remarquable : *ses courbes inverses par rapport au sommet du cône dont elle est géodésique sont des courbes à courbure constante.*

D'autre part, *si Γ_1 est une chaînette tordue, le rayon de torsion est, en chaque point, égal à l'arc, et les courbures des deux courbes Γ_1 et Γ_2 en deux points correspondants sont égales.*

Ensuite, en cherchant si les courbes Γ_1 peuvent être des hélices, on trouve ce résultat : *Les tractrices tordues de manière à devenir des courbes Γ_1 sont des hélices de cylindres.*

Enfin, *si Γ_2 est une antiloga tordue, les rayons de courbure de Γ_1 et Γ_2 en deux points correspondants ont une différence constante.*

R. GOORMAGHTIGH.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2455.

(1923, p. 189.)

On considère quatre sphères de centres O_1, O_2, O_3, O_4 , qui admettent un centre radical C et une sphère (S) concentrique à la sphère circonscrite au tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$. Montrer que le centre de la sphère inscrite au tétraèdre déterminé par les plans radicaux de la sphère (S) , respectivement avec les sphères O_1, O_2, O_3, O_4 , coïncide avec le centre radical C .

Application. — *Étant donné un tétraèdre quelconque (X), déterminer un point P de l'espace qui soit le centre de la sphère inscrite au tétraèdre (O) dont les sommets sont les projections orthogonales de P sur les faces du tétraèdre (X).*

V. THÉBAULT.

SOLUTION

par E. BALLY.

LEMME : *Si les rayons unissant les sommets d'un tétraèdre (X) au centre de la sphère (C_x) qui lui est circonscrite sont perpendiculaires aux faces d'un tétraèdre (Y), les perpendiculaires abaissées des sommets de (Y) sur les faces correspondantes de (X) concourent au centre d'une sphère (I_y) inscrite à (Y).*

D'après l'hypothèse, les faces de (Y) sont parallèles à celles du tétraèdre (T) des plans tangents à (C_x) aux sommets de (X). Par l'homothétie qui transforme (T) en (Y), le tétraèdre (X) se transforme dans le tétraèdre (Z) des points de contact d'une sphère inscrite à (Y), et les perpendiculaires abaissées des sommets de (Y) sur les faces de (X), étant aussi perpendiculaires aux faces de (Z), concourent au centre de la sphère qui touche les faces de (Y) aux sommets de (Z).

Application. — Rappelons que, relativement à un tétraèdre donné, deux points isogonaux peuvent être caractérisés par cette propriété que les droites qui joignent l'un d'eux aux sommets de ce tétraèdre sont perpendiculaires aux faces du tétraèdre des projections orthogonales de l'autre point, sur les faces du tétraèdre donné.

Si le point P est centre d'une sphère inscrite au tétraèdre (Y) de ses projections orthogonales sur les faces du tétraèdre (X), les perpendiculaires abaissées des sommets de (X) sur les faces de (Y) sont concourantes, d'après la réciproque du lemme, au centre de la sphère (C_x) circonscrite à (X), et le point P est donc le conjugué isogonal, relatif au tétraèdre donné (X), du centre de la sphère qui lui est circonscrite.

(Le point qui, dans le plan, jouit de la propriété similaire, est l'orthocentre du triangle, conjugué isogonal du centre du cercle circonscrit et centre d'un cercle inscrit au triangle des pieds des hauteurs.)

Question proposée. — Chaque sommet du tétraèdre (R) des plans radicaux envisagés est le centre radical commun à la sphère (S) et à trois des sphères (O). Il appartient à l'axe radical de ces trois sphères (O), qui est donc la perpendiculaire de ce sommet de (R) sur le plan des centres des trois sphères (O).

Les perpendiculaires sont abaissées des sommets de (R) sur les faces du tétraèdre des centres des quatre sphères (O), axes radicaux de ces sphères (O) prises trois à trois, concourent au centre radical de ces quatre sphères, qui est donc, d'après le lemme, le centre d'une sphère inscrite au

tétraèdre (R), puisque les perpendiculaires abaissées des sommets du tétraèdre (O) sur les faces de (R) concourent au centre de la sphère circonscrite à (O).

2453.

(1923-1924, p. 75)

Soient ABC, A'B'C' deux triangles inscrits à une même conique. Les six points (AA', BC), (AA', B'C'), (BB', CA), (BB', C'A'), (CC', AB), (CC', A'B'), sont sur une même conique. R. B.

SOLUTION

par G. ROY.

Soient D et E les intersections de BC' et CB' avec AA'; l'hexagone C'A'ABB'CC' étant inscriptible dans la conique donnée, les points (CC', AB), (BB', A'C') et E sont en ligne droite; de même (CC', A'B'), (BB', AC) et D sont alignés. Les deux faisceaux de coniques circonscrites aux deux quadrilatères: (BB', AC), (BB', A'C'), (CC', AB), (CC', A'B') et BB'CC' rencontrent donc AA' en des points qui se correspondent dans la même involution et par suite les groupes de points, (AA', BC), (AA', B'C'), (BB', C'A'), (CC', AB), (CC', A'B'); (BB', CA), A, (BB', CA), (BB', C'A'), A', (CC', AB), (CC', A'B') et deux groupes analogues sont situés sur des coniques.

Autre solution de M. BOUVAIST.

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL (1).

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soient $a(u, v)$, $b(u, v)$, $c(u, v)$ trois fonctions de u et v possédant des dérivées premières continues. On pose:

$$(I) \begin{cases} x = \int \left[\frac{a}{2}(1 - u^2 + v^2) - buv \right] du + \left[\frac{b}{2}(1 - u^2 + v^2) - cuv \right] dv, \\ y = \int \left[\frac{b}{2}(1 + u^2 - v^2) - auv \right] du + \left[\frac{c}{2}(1 + u^2 - v^2) - buv \right] dv, \\ z = \int (au + bv) du + (bu + cv) dv, \end{cases}$$

(1) Ceux des énoncés de certificat, qui sont insérés *sans être résolus*, sont proposés à nos lecteurs dont nous publierons ultérieurement les meilleurs solutions. Ces énoncés seront désignés par un numéro d'ordre précédé de la lettre C.

les intégrales étant prises le long d'une courbe C quelconque reliant les points (u_0, v_0) , origine, et (u, v) , extrémité.

1° Pour que les valeurs de ces intégrales soient indépendantes du choix de la courbe C, il faut et il suffit que l'on ait

$$(2) \quad \frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial b}{\partial u} = -\frac{a+c}{\lambda} v, \quad \frac{\partial c}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v} = -\frac{a+c}{\lambda} u,$$

λ étant une fonction de u et v que l'on calculera.

Désormais, on supposera les conditions (2) réalisées.

2° Pour $b^2 \neq ac$, les formules (1) définissent alors les coordonnées (rectangulaires) d'une surface S. Calculer pour cette surface les cosinus directeurs de la normale et les deux formes quadratiques fondamentales.

3° Déterminer S dans l'hypothèse $b = 0, c = a$.

II. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \rho^2 - 2q x^2 = 0.$$

1° Déterminer les courbes et les développables caractéristiques. Quelle est leur nature géométrique?

2° Déterminer sur chaque surface intégrale les courbes conjuguées des courbes caractéristiques. Pouvaient-on prévoir le résultat géométriquement?

3° Trouver les surfaces intégrales de (E), passant par l'hyperbole $8yz + 1 = 0, x - 1 = 0$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. 1° $\lambda = \frac{1 + u^2 + v^2}{2}$.

$$2^\circ \quad \alpha : \beta : \gamma : 1 = u : v : \frac{u^2 + v^2 - 1}{2} : \lambda.$$

$$ds^2 = \lambda^2 [(a du + b dv)^2 + (b du + c dv)^2].$$

$$S \, dx \, dx = \frac{1}{\lambda} [du(dx + u dz) + dv(dy + v dz)] \\ = a du^2 + 2b du dv + c dv^2.$$

3° $a = \frac{R}{\lambda^2}$; S est une sphère de rayon R.

(Voir aussi RAINICH, C. R., 1925, 1^{er} semestre.)

II. 1° et 2° Les multiplicités caractéristiques sont définies par les équations

$$y = -\frac{x^2}{2a} + b, \quad z = \frac{ax^2}{4} + c, \quad p = ax, \quad q = \frac{a^2}{2}.$$

Les courbes caractéristiques sont des paraboles dont les plans sont parallèles à Ox et dont les axes sont parallèles au plan yOz ; les développables caractéristiques sont des cylindres paraboliques dont les génératrices sont parallèles au plan yOz . Il en résulte que les courbes conjuguées des courbes caractéristiques sont dans des plans parallèles au plan yOz .

3° On trouve les deux surfaces

$$x^2 + 8yz = 0, \quad (x^2 - 2)^2 + 8yz = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer, de préférence par la théorie des résidus, l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 \sqrt{1-x^2}}{a^2 - x^2} dx,$$

où a est une constante réelle supérieure à 1. Quelle est la partie principale du résultat pour $a = \infty$? Pouvait-on la trouver sans avoir calculé I ? Application; $a = 1,25$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — On fend le plan z suivant la droite $(-1, +1)$ et dorénavant $\sqrt{1-z^2}$ désignera une branche de fonction uniforme dans le plan coupé, égale à $+1$ à l'origine, au bord inférieur de la coupure. Si \mathcal{L} est un chemin fermé tournant autour de la coupure dans le sens direct, on a

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{z^2 \sqrt{1-z^2}}{a^2 - z^2} dz = 4I = -2\pi i (R_a + R_{-a} + R_{\infty}),$$

R_c désignant le résidu en c de la fonction à intégrer. On trouve (avec $a > 0$)

$$R_a = -\frac{ia}{2} \sqrt{a^2-1} = R_{-a}, \quad R_{\infty} = i \frac{2a^2-1}{2},$$

le dernier radical étant positif. On en déduit

$$I = \frac{\pi}{4} (a - \sqrt{a^2-1})^2.$$

Application $I = \frac{\pi}{16}$. — La partie principale cherchée = $\frac{\pi}{16a^2}$.

Élémentairement, on calcule commodément l'intégrale, en décomposant $\frac{x^2(1-x^2)}{a^2-x^2}$ suivant ses éléments simples, en posant ensuite $x = \cos \varphi$ et en

remarquant que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - \frac{1}{a} \cos \varphi} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 + \frac{1}{a} \cos \varphi} = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1 - \frac{1}{a} \cos \varphi} = \frac{\pi a}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad (a > 0)$$

(Poitiers, juin 1925.)

C.1. — ÉPREUVE THÉORIQUE (1). — 1° On considère la fonction

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{xt-t^3} dt.$$

Montrer qu'elle est développable en série de puissances de x , et donner l'expression des coefficients, à l'aide de la fonction gamma.

2° Soit

$$z = x e^{\frac{i\pi}{3}},$$

où x est réel. En calculant l'intégrale

$$\int e^{wz-w^3} dw$$

étendue à un contour convenable du plan de la variable

$$w = t + iu \quad (t, u \text{ réels}),$$

développer en série de puissances de x les fonctions

$$\int_0^{\infty} \cos(\rho x - \rho^3) d\rho, \quad \int_0^{\infty} \sin(\rho x - \rho^3) d\rho.$$

C.2. — ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Calculer $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ à 0,001 près.

2° Trouver la relation entre l'intégrale précédente et l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ prise le long d'un chemin complexe coupant l'axe des quantités imaginaires en un point et un seul, l'ordonnée de ce point étant supérieure à un.

Nota. — La méthode à suivre pour la première partie est laissée au choix des candidats. On pourra s'aider du changement de variables $1 - x^2 = t$.

(Clermont-Ferrand, juin 1925.)

(1) Les énoncés de licence insérés sans solution (et qui seront affectés, désormais, d'un numéro d'ordre précédé de la lettre C) sont proposés à nos lecteurs. Nous publierons, comme pour les autres Questions, les meilleures solutions reçues.

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

C.3. — On considère la courbe définie par les formules

$$x = \int_0^t \frac{a^2 dt}{\sqrt{a^4 + t^4}}, \quad y = \int_0^t \frac{t^2 dt}{\sqrt{a^4 + t^4}}.$$

Sans évaluer les intégrales, calculer le rayon de courbure en fonction du paramètre t , dont on fera connaître la signification. Étudier la variation de y en fonction de x . Lorsque x tend vers zéro, quel est l'ordre infinitésimal de y ? Allure de la courbe.

C.4. — On considère trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz . On mène par O un vecteur \vec{OD} de composantes (a, b, c) et de longueur égale à 1. Dans le plan perpendiculaire en O à OD , on prend un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Calculer les coordonnées du point M_1 déduit de M_0 par une rotation positive d'un droit autour de OD . (On pourra définir \vec{OM}_1 comme le produit vectoriel de deux vecteurs appropriés.) Même problème pour une rotation d'un angle quelconque α .

C.5. — Vérifier que l'expression

$$\frac{2(y-2)x dx + (3y^2 + x^2) dy}{y^3 + x^2(y-2)} - \frac{2xy dx + (x^2 - 2) dy}{y(x^2 - 2) + 1}$$

est la différentielle totale d'une fonction $f(x, y)$. Montrer que les courbes $f(x, y) = \text{const.}$ sont algébriques. Construire celles de ces courbes qui possèdent, à distance finie ou à l'infini, un point multiple.

C.6. — Construire la courbe intégrale de l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

telle que, pour $x = 0$, on ait

$$y = 1, \quad y' = 1.$$

(A suivre).



SUR LE MOUVEMENT A DEUX PARAMÈTRES ;

PAR ELIE CARTAN.

1. M. Raoul Bricard a publié tout récemment ⁽¹⁾ un intéressant article sur le mouvement à deux paramètres autour d'un point fixe O. Il montre que si, à un instant donné de la durée à deux dimensions, on donne au solide mobile (S) les différents déplacements à un paramètre contenus dans le mouvement à deux paramètres considéré, le lieu des axes instantanés de rotation est un plan passant par O ; la *droite polaire instantanée* (perpendiculaire élevée en O à ce plan) définit entre la sphère fixe et la sphère mobile de centre O et de rayon 1 une correspondance ponctuelle ; de plus, cette correspondance ponctuelle conserve les aires. M. Raoul Bricard pose enfin ⁽²⁾ le problème de savoir si réciproquement toute correspondance ponctuelle conservant les aires entre la sphère fixe et la sphère mobile peut être obtenue en partant d'un mouvement à deux paramètres convenablement choisi.

2. Il est facile de retrouver les résultats précédents et de résoudre le problème de M. Bricard en se servant de la méthode du trièdre mobile. Prenons d'abord un mouvement à deux paramètres déterminé ; à chaque instant (u, v) de la durée à deux dimensions construisons un trièdre trirectangle d'origine O dont l'axe des z soit dirigé suivant la droite polaire instantanée correspondante. Nous désignerons par (T_0) ce trièdre en tant qu'on le considère dans l'espace fixe et par (T) ce même trièdre en tant qu'on le considère dans le corps solide.

Le déplacement instantané de (T) par rapport au corps mobile (S) est défini par un vecteur

$$P du + P' dv, \quad Q du + Q' dv, \quad R du + R' dv ;$$

⁽¹⁾ *Nouvelles Annales*, juin 1925, p. 328-341.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, n° 6, p. 336.

le déplacement instantané de (T_0) par rapport à l'espace fixe est de même défini par un vecteur

$$P_0 du + P'_0 dv, \quad Q_0 du + Q'_0 dv, \quad R_0 du + R'_0 dv.$$

Le mouvement instantané de (S) par rapport à l'espace fixe étant la somme géométrique du mouvement instantané de (S) par rapport à (T) et du mouvement instantané de (T_0) par rapport à l'espace fixe, ce mouvement instantané est défini par le vecteur

$$(P_0 - P) du + (P'_0 - P') dv, \quad (Q_0 - Q) du + (Q'_0 - Q') dv, \\ (R_0 - R) du + (R'_0 - R') dv;$$

l'axe de rotation étant par hypothèse dans le plan commun des xy des deux trièdres, on a

$$(R_0 - R) du + (R'_0 - R') dv = 0.$$

On en tire évidemment

$$(1) \quad \frac{\partial R_0}{\partial v} - \frac{\partial R'_0}{\partial u} = \frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial R'}{\partial u}.$$

Mais les formules classiques relatives au mouvement à deux paramètres ⁽¹⁾ donnent

$$\frac{\partial R_0}{\partial v} - \frac{\partial R'_0}{\partial u} = P_0 Q'_0 - Q_0 P'_0, \\ \frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial R'}{\partial u} = P Q' - Q P';$$

on a donc

$$(2) \quad P_0 Q'_0 - Q_0 P'_0 = P Q' - Q P'.$$

Cette égalité est la traduction analytique du théorème de M. Bricard. En effet, le pôle instantané de la sphère mobile, rapporté au trièdre (T) , a pour coordonnées $(0, 0, 1)$. Son déplacement élémentaire sur cette sphère a pour projections sur les axes

$$Q du + Q' dv, \quad -P du - P' dv, \quad 0;$$

l'aire élémentaire qu'il décrit sur la sphère est donc

$$(P Q' - Q P') du dv;$$

elle est, d'après ⁽²⁾, égale en grandeur et en signe, à l'aire élémentaire décrite par le pôle instantané de la sphère fixe.

⁽¹⁾ Voir G. DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, Chapitre V, p. 49.

3. La réciproque se démontre facilement. Considérons une variété à deux dimensions (qui jouera tout à l'heure le rôle de la durée); faisons correspondre à chaque point (u, v) de cette variété un point P_0 sur une première sphère et un point P sur une seconde sphère de même centre O que la première, toutes deux étant de rayon 1. Attachons respectivement aux deux sphères deux trièdres trirectangles (T_0) et (T) ayant le point O pour origine, leurs axes des z positifs passant respectivement par le point P_0 et le point P . Cela posé, laissons fixe la première sphère et donnons à la seconde sphère une position telle que P coïncide avec P_0 ; cela est possible d'une infinité de manières; nous nous donnerons suivant une loi arbitraire l'angle λ dont il faut faire tourner le trièdre (T_0) autour de son axe des z pour l'amener sur (T) . La fonction λ étant choisie arbitrairement, on définit ainsi pour la seconde sphère un mouvement à deux paramètres, chaque instant de la durée à deux dimensions correspondant à un point de la variété donnée.

Le déplacement instantané de la sphère mobile est la somme géométrique de son déplacement par rapport au trièdre (T) , du déplacement de (T) par rapport à (T_0) et du déplacement de (T_0) par rapport à la sphère fixe. En conservant les mêmes notations que dans le numéro précédent, nous voyons que la composante suivant OP du déplacement instantané absolu de la sphère mobile est

$$d\lambda + (R_0 - R)du + (R'_0 - R')dv.$$

La droite OP sera la droite polaire instantanée si cette composante est nulle quels que soient du et dv , c'est-à-dire si la fonction λ satisfait à l'équation aux différentielles totales

$$(3) \quad d\lambda = (R - R_0)du + (R' - R'_0)dv.$$

La condition d'intégrabilité est manifestement

$$\frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial R'}{\partial u} = \frac{\partial R_0}{\partial v} - \frac{\partial R'_0}{\partial u},$$

ou

$$PQ' - QP' = P_0Q'_0 - Q_0P'_0.$$

La réciproque est donc démontrée et l'on voit qu'il y a une infinité de mouvements à deux paramètres fournissant la correspondance ponctuelle considérée, supposée avec conservation des aires.

La conclusion n'est cependant rigoureusement exacte que si la variété à deux dimensions donnée est *simplement connexe*. En réalité il faut et il suffit que, le long de tout cycle tracé dans la variété, on ait

$$(4) \quad \int R du + R' dv = \int R_0 du + R'_0 dv.$$

Si la correspondance conserve les aires élémentaires, cette égalité n'est assurée que pour les cycles réductibles à un point par déformation continue.

4. On peut donner de la condition (4) une interprétation qui se rattache du reste facilement à la démonstration donnée de son théorème par M. Bricard. Prenons sur la sphère mobile le *grand cercle des pôles* situé dans le plan des xy du trièdre (T) et sur ce grand cercle le point A qui appartient à l'axe des x positifs. Le déplacement élémentaire de ce point est

$$0, \quad R du + R' dv, \quad - Q du - Q' dv;$$

en désignant la grandeur de ce déplacement par ds et par φ l'angle que fait ce déplacement avec le grand cercle orienté positivement autour de l'axe des z , on a

$$R du + R' dv = \cos \varphi ds.$$

Or, si l'on considère une suite linéaire fermée de grands cercles orientés et qu'on prenne suivant une loi arbitraire un point A sur chacun des grands cercles de la suite, l'intégrale $\int \cos \varphi ds$ est indépendante du choix de ce point A et ne dépend que des grands cercles eux-mêmes de la suite. Ce théorème classique est du reste vrai pour toute suite linéaire fermée de géodésiques orientées d'une surface quelconque et résulte immédiatement de la formule qui donne la variation élémentaire de la longueur d'un arc AB de géodésique, à savoir

$$d(AB) = ds_B \cos(ds_B, BA) + ds_A \cos(ds_A, AB).$$

La formule (4) exprime donc qu'étant donné un cycle quelconque tracé dans la durée à deux dimensions, et les deux suites

linéaires fermées de grands cercles orientés qui lui correspondent sur les deux sphères, l'intégrale $\int \cos \varphi ds$ a la même valeur pour ces deux suites. Or cela est évident géométriquement; au cycle considéré dans la durée correspond un mouvement fermé à un paramètre de la sphère mobile; il suffit de prendre à chaque instant pour point A sur chaque grand cercle des pôles l'un des deux pôles instantanés de rotation pour voir que l'élément $\cos \varphi ds$ possède à chaque instant la même valeur sur les deux sphères.

§. On pourrait se demander quel est l'analogue du théorème de M. Bricard dans le mouvement à deux paramètres d'un plan mobile sur un plan fixe (1). A chaque instant de la durée à deux dimensions on a dans chacun des plans un axe des centres instantanés et, par suite, une correspondance des deux plans *droite orientée à droite orientée*. Cette correspondance conserve la valeur de l'invariant intégral $\int \cos \varphi ds$. Rapportons l'axe des centres à son équation normale

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Si nous prenons sur cet axe pour point A le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine, donné par suite par l'équation

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0,$$

nous aurons par différentiation.

$$\cos \varphi ds = -dx \sin \alpha + dy \cos \alpha = p dx.$$

La condition qui remplace la formule (4) est donc ici

$$\int p dx = \int p_0 dx_0.$$

On peut remarquer que l'intégrale $\int p dx$ étendue aux droites orientées tangentes à une courbe fermée orientée est égale au périmètre de cette courbe (2).

(1) Cf. R. BRICARD, *N. A.*, 1913, p. 302. [*N. de la R.*]

(2) Voir sur cette question, *Bull. Soc. math.*, t. 24, 1896, p. 140-176, et aussi H. LEBESGUE, *N. A.*, 1912, p. 481 (Exposition d'un mémoire de W. Crofton).

**SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES FONCTIONS
DE JACOBI ⁽¹⁾;**

PAR RENÉ GARNIER.

Dans cette Note, nous allons établir la proposition suivante :

Les fonctions monogènes analytiques

$$f(z) = P(x, y) + i Q(x, y)$$

de la variable complexe $z = x + iy$ qui satisfont à l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{X(x)}{Y(y)}$$

se ramènent soit aux fonctions de Jacobi $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$, soit à des combinaisons simples, soit à des dégénérescences de ces fonctions.

Tout d'abord, nous présenterons une remarque qui allège notablement la discussion : Si $f(z)$ répond à la question, les fonctions qui s'en déduisent par l'une des opérations

- (S₁) $z \mid z + \alpha$ (α , constante quelconque),
- (S₂) $z \mid \alpha z$ (α , constante réelle),
- (S₃) $z \mid iz$,
- (S₄) $f(z) \mid \alpha f(z)$,
- (S₅) $f(z) \mid if(z)$,
- (S₆) $f(z) \mid \{f(z)\}^{-1}$,
- (S₇) $f(z) \mid i \{f(iz_0)\}_0$ (u_0 , quantité conjuguée de u)

répondront aussi à la question.

⁽¹⁾ Cet article s'adresse spécialement aux lecteurs qui veulent se familiariser avec les calculs sur les fonctions de Jacobi : réduction des intégrales elliptiques à la forme normale de Legendre, intégration des fonctions de Jacobi, multiplication par 2, transformation d'ordre 2. Pour plus de détails sur les calculs, on pourra se servir des *Principes de la Théorie des fonctions elliptiques*, ..., par P. Appell et E. Lacour, 2^e édition (Paris, Gauthier-Villars, 1922), Chap. IV, VII, X, XIII.

Cela étant, on déduit de (1) : $P = \lambda X$, $Q = \lambda Y$, λ étant une fonction de x et y à déterminer. Posons $\lambda = e^\mu$ et écrivons que P et Q satisfont aux conditions de monogénéité de Cauchy ; il viendra

$$(2) \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = -X \frac{X' - Y'}{X^2 + Y^2}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = Y \frac{X' - Y'}{X^2 + Y^2},$$

et la condition d'intégrabilité pour μ donne alors :

$$(3) \quad 2X'^2 - XX'' - (2Y'^2 - YY'') + X^2 \frac{Y''}{Y} - Y^2 \frac{X''}{X} = 0.$$

Or, cette équation est du type

$$(4) \quad X_1(x) + Y_1(y) + X_2(x) Y_2(y) + X_3(x) Y_3(y) = 0;$$

par différentiations on tire de (4)

$$(5) \quad X_2' Y_2 + X_3' Y_3 = 0.$$

On peut satisfaire à (5) en posant $X_2' = 0 = X_3'$ ou $Y_2' = 0 = Y_3'$; on vérifiera d'ailleurs que l'hypothèse $X_2' = 0 = Y_3'$ n'introduit aucune solution nouvelle ; ces cas écartés, on doit prendre $X_3' = aX_2'$, $Y_2' = -aY_3'$, a étant une constante, et l'on en déduit que, quelles que soient les fonctions $X_2(x)$, $Y_3(y)$, l'équation (4) est vérifiée par les formules

$$(6) \quad \begin{cases} X_1 = -cX_2 - d, & X_3 = aX_2 + b, \\ Y_1 = -bY_3 + d, & Y_2 = -aY_3 + c \end{cases}$$

(a, b, c, d , constantes).

Appliquons ce résultat à (3). Les deux premières solutions fournissent immédiatement la fonction

$$f(z) = e^z,$$

et celles qui s'en déduisent par les opérations (S_1) , (S_2) , (S_3) . Cette solution écartée, on déduit de (6), en prenant $X_2 \equiv X^2$ (ce qui n'introduit aucune restriction)

$$\begin{aligned} -XX'' + 2X'^2 &= -cX^2 - d, & X'' &= aX^3 + bX, \\ YY'' - 2Y'^2 &= bY^2 + d, & Y'' &= aY^3 + cY \end{aligned}$$

(a, b, c, d , constantes réelles).

Ces équations ne sont compatibles que pour $b + c = 0$ et elles

peuvent être remplacées alors par les suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} 2X'^2 = aX^4 + 2bX^2 - d, \\ 2Y'^2 = aY^4 - 2bY^2 - d; \end{cases}$$

dès maintenant, on prévoit donc que les fonctions $f(z)$ devront être des fonctions elliptiques ou des dégénérescences de ces fonctions.

Ceci posé, des transformations (S_2) et (S_4) permettent de ramener les équations (7) à l'un des types canoniques suivants :

$$(8) \quad \begin{cases} X'^2 = (1 - X^2)(1 - k^2 X^2), & X'^2 = \varepsilon(1 + X^2)(1 - l^2 X^2), \\ Y'^2 = (1 + Y^2)(1 + k^2 Y^2), & Y'^2 = \varepsilon(1 - Y^2)(1 + l^2 Y^2) \\ & (\varepsilon = \pm 1; k^2 < 1). \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} X'^2 = (1 + X^2)(1 + k^2 X^2), & X'^2 = \varepsilon(1 - X^2)(1 + l^2 X^2), \\ Y'^2 = (1 - Y^2)(1 - k^2 Y^2), & Y'^2 = \varepsilon(1 + Y^2)(1 - l^2 Y^2) \\ & (\varepsilon = \pm 1); \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} X'^2 = (1 + X^2)^2 - 4h^2 X^2, & X'^2 = (1 - X^2)^2 + 4h^2 X^2, \\ Y'^2 = (1 - Y^2)^2 + 4h^2 Y^2, & Y'^2 = (1 + Y^2)^2 - 4h^2 Y^2 \\ & (0 < h < 1); \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} X'^2 = 1 + X^2, & X'^2 = 1 - X^2, \\ Y'^2 = 1 - Y^2, & Y'^2 = 1 + Y^2; \end{cases}$$

$$(12) \quad X' = 1, \quad Y' = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1);$$

$$(13) \quad X' = 0, \quad Y' = 0.$$

Les types (8), (9), (10) correspondent au cas où dans (7) on a $a \neq 0$; les types (11) supposent $a = 0 \neq b$, et (12), (13) : $a = 0 = b$.

On vérifiera sans peine que les formes (11) conduisent à

$$f(z) = \operatorname{tang} z$$

et à ses transformées par les opérations (S_1) , (S_2) , (S_3) , (S_4) , (S_5) et leurs produits; quant aux systèmes (12) ou (13), ils donnent

$$f(z) = z,$$

et ses transformées par (S_1) , (S_2) , (S_3) , (S_6) , ou $f(z) = \text{const.}$

Examinons maintenant les types restants. La transformation (S_7) fait passer des formes (9) aux formes (8) et échange entre eux les deux systèmes (10); enfin les transformations (S_2) et (S_3) per-

mettent de supposer $\varepsilon = 1$. Nous n'avons donc que trois types de réduction à discuter :

$$(1) \quad X'^2 = (1 - X^2)(1 - k^2 X^2), \quad Y'^2 = (1 + Y^2)(1 + k^2 Y^2).$$

Désignons par $\operatorname{sn} x$ la fonction de Jacobi, de module k^2 , de périodes primitives $4K, 2iK'$ (K et K' réels); nous aurons

$$X = \operatorname{sn} x, \quad Y = \pm \frac{1}{i} \operatorname{sn} iy;$$

ou pourra d'ailleurs se borner au signe $+$, moyennant les transformations $z | z + 2K, f(z) | -f(z)$. Cela étant, posons $t = iy$; il viendra, d'après (2):

$$\begin{aligned} \mu &= - \int \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t} (\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t) \\ &= \operatorname{Log} \frac{\Theta(x) \Theta_1(x) \Theta(t) \Theta_1(t)}{H_1(x+t) H_1(x-t)} + \text{const. réelle,} \end{aligned}$$

les fonctions H, H_1, Θ, Θ_1 étant construites non pas avec des périodes de zéros $2K$ et $2iK'$, mais avec des périodes primitives de zéros $4K$ et $2iK'$. Moyennant cette notation, on a

$$\operatorname{sn}(x | K, iK') = \frac{H(x) H_1(x)}{\Theta(x) \Theta_1(x)} \times \text{const. réelle,}$$

et, par suite, on peut prendre

$$f(z) = \frac{H(x) H_1(x) \Theta(iy) \Theta_1(iy) + \Theta(x) \Theta_1(x) H(iy) H_1(iy)}{H_1(x+iy) H_1(x-iy)},$$

soit encore

$$f(z) = \frac{H(x+iy)}{H_1(x+iy)},$$

ce qui donne la solution

$$f(z) = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z}$$

et ses diverses transformées; actuellement, le module $\overline{k^2}$ des nouvelles fonctions $\operatorname{sn} z$ et $\operatorname{cn} z$ est encore réel et inférieur à 1. A titre de vérification, on trouve :

$$\frac{\operatorname{sn}(x+t)}{\operatorname{cn}(x+t)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} t + \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} x}{1 - \operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t + \overline{k^2} \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 t};$$

on peut donc prendre $X \equiv \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} = \operatorname{sn} \left(x \mid \frac{\bar{K}}{2}, i\bar{K}' \right)$, $2\bar{K}$ et $2i\bar{K}'$ étant les périodes de zéros des nouvelles fonctions $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$:

$$(II) \quad X'^2 = (1 + X^2)(1 - l^2 X^2), \quad Y'^2 = (1 - Y^2)(1 + l^2 Y^2).$$

On posera $l^2 X^2 = 1 - \xi^2$, ce qui donnera, par une transformation (S_2) , $X = \operatorname{cn} x$ (le module étant $\frac{1}{1+l^2}$) et l'on aura de même, moyennant (S_1) :

$$Y = \frac{t}{i} \operatorname{cn}(iy + b);$$

la constante réelle b doit d'ailleurs être choisie de manière que $Y(y)$ soit réelle; on prendra donc $b = K$, et en posant $t = iy + K$ on aura ⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned} \mu &= \int \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x - \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t}{\operatorname{cn}^2 x - \operatorname{cn}^2 t} (\operatorname{cn} x dx + \operatorname{cn} t dt) \\ &= \operatorname{Log} \frac{\Theta(x+K)\Theta_1(x+K)\Theta(t+K)\Theta_1(t+K)}{H(x+t)H_1(x-t)} + \frac{\pi i}{4} + \text{const. réelle,} \end{aligned}$$

les fonctions H , H_1 , Θ , Θ_1 étant construites avec les périodes primitives de zéros $4K$, $2K + 2iK'$; on aura ainsi ⁽²⁾ :

$$\operatorname{cn}(x \mid K, iK') = e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{H(x+K)H_1(x+K)}{\Theta(x+K)\Theta_1(x+K)} \times \text{const. réelle,}$$

et, comme tout à l'heure, on trouvera la fonction

$$f(z) = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z},$$

et ses transformées. Mais actuellement, les périodes primitives des zéros de $\operatorname{sn} z$ et $\operatorname{cn} z$ sont $4K$ et $2K + 2iK'$; le module k^2

⁽¹⁾ On observera que μ doit être réel pour $x = 0 = y$; or soit

$$H(K)H_1(K) = \lambda g^{\frac{1}{2}};$$

actuellement g^2 est un nombre négatif compris entre 0 et -1 ; on en déduit que λ est positif comme, d'ailleurs, $\Theta(K)$, $\Theta_1(K)$ et $\Theta(2K)\Theta_1(2K)$; l'argument du produit sous le signe Log est donc $-\frac{\pi}{4}$.

⁽²⁾ Voir la note précédente.

des deux fonctions précédentes est donc de la forme $(1) 1 + e^{\theta}$ (θ , angle réel).

On peut obtenir un résultat plus expressif en revenant aux modules réels (que nous avons abandonnés pour la commodité de l'intégration).

En effet, la fonction précédente $f(z)$, construite avec les périodes de zéros sus-indiquées, est encore égale à

$$\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z},$$

les fonctions H, H_1, Θ, Θ_1 correspondant aux nouvelles fonctions $\operatorname{sn} z$ et $\operatorname{dn} z$ admettant $4K$ et $4iK'$ comme périodes primitives de zéros, c'est-à-dire encore à

$$f(z) \equiv \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z},$$

les périodes primitives étant $4K$ et $4iK'$ pour les nouvelles fonctions : le module k^2 est devenu réel.

On vérifie d'ailleurs que l'on a actuellement :

$$f(a+b) = \frac{\operatorname{scd}(1-2k^2s_1^2+k^2s_1^4) + s_1c_1d_1(1-2k^2s^2+k^2s^4)}{(1-k^2s_1^2s_1^2)(1-s^2-s_1^2+k^2s^2s_1^2)}$$

avec

$$s \equiv \operatorname{sn} a, \quad c \equiv \operatorname{cn} a, \quad d \equiv \operatorname{dn} a; \quad s_1 \equiv \operatorname{sn} b, \quad c_1 \equiv \operatorname{cn} b, \quad d_1 \equiv \operatorname{dn} b.$$

On peut donc prendre

$$X(x) = \frac{2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1-2k^2 \operatorname{sn}^2 x + k^2 \operatorname{sn}^4 x} = \frac{\operatorname{sn} 2x}{\operatorname{dn} 2x} = \frac{1}{k'} \operatorname{cn}(2x - 2K),$$

ce qui est bien conforme au début du calcul.

$$(III) \quad X'^2 = (1+X^2)^2 - 4h^2 X^2, \quad Y'^2 = (1-Y^2)^2 + 4h^2 Y^2.$$

On pose $X = \frac{1-\xi}{1+\xi}$, ce qui donne

$$\xi'^2 = [1-h+(1+h)\xi^2][1+h+(1-h)\xi^2];$$

(1) Cf. APPELL et LACOUR, *op. cit.*, p. 446, exercice 12.

ainsi, C étant choisi de manière que X soit réel, on trouvera :

$$X = \frac{\operatorname{sn} \frac{iK'}{2} - \operatorname{sn} i(x + C)}{\operatorname{sn} \frac{iK'}{2} + \operatorname{sn} i(x + C)},$$

en se rappelant que $\operatorname{sn} \frac{iK'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}}$, et en adoptant le module

$$k^2 = \left(\frac{1-h}{1+h} \right)^2 < 1.$$

On pourra écrire encore :

$$X = \frac{\operatorname{dn} \left(i \frac{x + C}{2} - i \frac{K'}{4} \right)}{\operatorname{dn} \left(i \frac{x + C}{2} + i \frac{K'}{4} \right)},$$

la fonction $\operatorname{dn} u$ admettant les périodes primitives de zéros $2K$ et iK' . Moyennant des transformations (S_1) et (S_5) on pourra prendre $C = K'$ et, avec un nouveau module compris entre 0 et 1 :

$$X = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x},$$

d'où, en vertu de (S_3) et (S_5) : $Y = \pm i \frac{\operatorname{cn} iy}{\operatorname{sn} iy \operatorname{dn} iy}$; on peut d'ailleurs se borner au signe supérieur moyennant (S_6) . On trouve ainsi, en posant $iy = t$:

$$\frac{X' - Y'}{X^2 - Y^2} = \frac{\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{sn}^2 t - 2k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 t}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t},$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{i \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t}{k(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t)},$$

et par suite

$$f(z) = \operatorname{cn} z + iK'$$

et ses transformées.

Résultat définitif. — Les fonctions $f(z)$ répondant au problème sont donc les fonctions $\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z}$, $\frac{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z}$, $\operatorname{cn} z$ (construites avec un module k^2 réel), leurs dégénérescences (obtenues pour $k^2 = 0$ ou 1), ainsi que e^z , z , 1 et que toutes les fonctions qui s'en déduisent par les opérations (S_1) , \dots , (S_7) .

On vérifiera que parmi ces fonctions se trouvent les suivantes :

$$\begin{aligned} & \operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z, \\ \operatorname{ns} z \left(= \frac{1}{\operatorname{sn} z} \right), \operatorname{nc} z \left(= \frac{1}{\operatorname{cn} z} \right), \operatorname{nd} z \left(= \frac{1}{\operatorname{dn} z} \right), \\ \operatorname{cd} z \left(= \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z} \right), \operatorname{ds} z \left(= \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z} \right), \operatorname{sc} z \left(= \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z} \right), \\ \operatorname{dc} z \left(= \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z} \right), \operatorname{sd} z \left(= \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z} \right), \operatorname{cs} z \left(= \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{sn} z} \right)^{(1)}, \\ & \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z}, \frac{\operatorname{dn} z \operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z}, \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}, \\ & \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}, \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z \operatorname{sn} z}, \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z}, \\ \operatorname{sin} z, \operatorname{cos} z, \operatorname{tang} z, \operatorname{coséc} z, \operatorname{séc} z, \operatorname{cotg} z, \\ \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \operatorname{th} z, \operatorname{coséch} z, \operatorname{séch} z, \operatorname{coth} z, \\ e^z, z, \frac{1}{z} \text{ et } 1. \end{aligned}$$

CONCOURS NORMAL D'AGREGATION DE 1920.

Composition de calcul différentiel et intégral (Deuxième partie).

SOLUTION PAR M. C.-E. TRAYNARD.

Soient $f(x, y)$ une fonction développable en série de Taylor, au point (x_0, y_0) , Δf l'accroissement qu'elle prend quand x, y augmentent respectivement de $\Delta x, \Delta y$ à partir des valeurs x_0, y_0 et df sa différentielle

$$f'_{x_0} \Delta x + f'_{y_0} \Delta y$$

au point x_0, y_0 .

1° En supposant que f'_{x_0} et f'_{y_0} ne sont pas nuls, le rapport $\frac{\Delta f}{df}$ est en général déterminé. Montrer que sous des conditions très générales il tend vers l'unité quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro.

(1) Les notations abrégées pour les quotients sont dues à Glaisher.

2° Peut-il arriver cependant que $\frac{\Delta f}{df}$ ait une limite finie différente de l'unité quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro d'une façon spéciale?

3° Cette circonstance n'a-t-elle lieu que pour des fonctions $f(x, y)$ très particulières?

(On suppose, bien entendu, dans 1°, 2°, 3°, que $\Delta x, \Delta y$ convergent vers zéro de sorte que le dénominateur du rapport $\frac{\Delta f}{df}$ tende vers zéro par valeurs non nulles.)

Pour simplifier les écritures, j'emploierai les notations de Monge pour les dérivées. La fonction $f(x, y)$ étant développable en série de Taylor, j'ai

$$\Delta f = p \Delta x + q \Delta y + \frac{r \Delta x^2 + 2s \Delta x \Delta y + t \Delta y^2}{2} + \dots,$$

$$\frac{\Delta f}{df} = 1 + \frac{r \Delta x^2 + 2s \Delta x \Delta y + t \Delta y^2}{2(p \Delta x + q \Delta y)} + \dots$$

Il apparaît à première vue que le rapport

$$v = \frac{r \Delta x^2 + 2s \Delta x \Delta y + t \Delta y^2}{2(p \Delta x + q \Delta y)}$$

tend vers zéro dans les conditions de l'énoncé; les coefficients du numérateur en effet sont finis, ceux du dénominateur ne sont pas nuls, soit A un nombre positif supérieur aux premiers, α une borne inférieure, supposée non nulle, de $\frac{2|p \Delta x + q \Delta y|}{|\Delta x| + |\Delta y|}$, la valeur absolue de v est inférieure à $\frac{A}{\alpha} (|\Delta x| + |\Delta y|)$ quantité qui tend vers zéro en même temps que Δx et Δy .

A fortiori, l'ensemble des termes suivant v tend vers zéro et le rapport $\frac{\Delta f}{df}$ tend vers 1, sous la seule condition très générale d'existence de la borne inférieure non nulle α .

Pour aller plus loin, on peut faire le raisonnement suivant.

Je transforme l'expression de v en mettant Δx en facteur

$$v = \Delta x \frac{r + 2s \frac{\Delta y}{\Delta x} + t \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}{2 \left(p + q \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)}$$

et je pose $\frac{\Delta y}{\Delta x} = u$; d'où

$$\Delta x = \frac{2v(p + qu)}{r + 2su + tu^2}, \quad \Delta y = \frac{2uv(p + qu)}{r + 2su + tu^2}.$$

On voit sur ces expressions que Δx et Δy peuvent tendre vers zéro de deux façons : quand v tend vers zéro et quand $p + qu$ tend vers zéro.

Le cas de v tendant vers zéro est celui qui a été étudié plus haut; on voit qu'il n'exige aucune condition sur la façon dont Δx et Δy tendent vers zéro. Le cas de $p + qu$ tendant vers zéro a échappé à la précédente analyse; aucune condition n'est imposée à v qui peut tendre vers une limite arbitraire, ce qui s'explique aisément en remarquant que

$$p \Delta x + q \Delta y = \frac{2v(p + qu)^2}{r + 2su + tu^2},$$

c'est-à-dire, si je puis m'exprimer ainsi, que $p \Delta x + q \Delta y$ est plus nul lorsque $p + qu$ tend vers zéro que lorsque v tend vers zéro (1).

Géométriquement, le cas de v tendant vers zéro est celui du point $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ tendant vers le point x_0, y_0 sur un chemin quelconque; le cas de $p + qu$ tendant vers zéro correspond à un chemin tangent à la droite

$$Z = f(x_0, y_0), \quad p(X - x_0) + q(Y - y_0) = 0.$$

En résumé et pour répondre aux questions posées par l'énoncé :

1° En général et sous les seules conditions de l'énoncé, le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ tend vers 1 quand Δx et Δy tendent vers zéro.

2° Ce rapport tend vers toute limite $1 + k$ donnée à l'avance lorsque Δx et Δy tendent vers zéro, le point $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ suivant un certain chemin tangent à la droite

$$Z = f(x_0, y_0), \quad p(X - x_0) + q(Y - y_0) = 0$$

et qui dépend de la quantité k .

3° Ces circonstances se présentent pour toutes les fonctions $f(x, y)$.

(1) Il est facile de voir que les quantités qui suivent la fraction v ont toujours pour limite zéro.

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit la surface S , définie par l'équation

$$z = \frac{x^4 + 64y^2 - 8x^2}{y^3(y+1)}.$$

1° Trouver le lieu des asymptotes de ses sections par les plans parallèles au plan des xy . Montrer que ce lieu est un conoïde droit.

2° On considère, en particulier, la section C par xOy . On pose

$$\cos \varphi = 2\sqrt{2}\frac{y}{x}.$$

Calculer x et y en fonction de φ , ainsi que l'arc s de la courbe, son rayon de courbure et les coordonnées de son centre de courbure. Vérifier que le rayon de courbure et l'abscisse du centre de courbure s'expriment rationnellement en fonction de x . Vérifier également la relation

$$2y = \sin(s - y).$$

II. Déterminer toutes les courbes planes qui satisfont à la relation

$$(\rho + 1) \sin V = 1,$$

où ρ désigne le rayon vecteur et V l'angle de ce rayon vecteur avec la tangente. Construire l'une de ces courbes.

III. Un fil élastique, de longueur naturelle $2a$, est fixé par ses deux extrémités en deux points A et B d'un plan horizontal H . La distance $AB = 2a$. On coupe le fil en son milieu et l'on attache les deux bouts obtenus à un même point matériel M . Quand on amène M en A , la tension du fil BM égale le poids de M . En outre, le coefficient de frottement de M sur le plan H est $0,2$. Étudier le mouvement de M , abandonné en A , sans vitesse initiale. Construire le diagramme des espaces.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. LOUVET. — I. 1° La section par le plan $z = h$ a des directions asymptotiques données par $x^4 - hy^4 = 0$; aucune n'est réelle pour $h < 0$. Pour h positif on trouve les directions asymptotiques réelles $x \pm \sqrt[4]{h}y = 0$ et les asymptotes correspondantes, obtenues par les procédés ordinaires, sont

$$x \pm \sqrt[4]{h}\left(y + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Elles s'appuient sur la droite $x = 0$, $y = -\frac{1}{4}$ et engendrent donc un conoïde droit dont l'équation est évidemment

$$z = \frac{256x^4}{(4y+1)^4}.$$

2° On trouve

$$x = 2\sqrt{2} \sin \varphi, \quad y = \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$s = 2\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} = 2\varphi + y;$$

d'où immédiatement

$$\sin(s - y) = \sin 2\varphi = 2y.$$

Le rayon de courbure et l'abscisse du centre de courbure sont respectivement

$$\frac{(12 - x^2)^2}{16|x|} \quad \text{et} \quad \frac{48 + x^4}{16x}.$$

II. En remplaçant $\sin V$ par $\frac{|\rho|}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$, l'équation proposée donne

$$\rho'^2 = \rho^2(\rho^2 + 2\rho),$$

d'où

$$\pm d\omega = \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 + 2\rho}} = -d\sqrt{1 + \frac{2}{\rho}}$$

et enfin

$$\rho = \frac{2}{(\omega - \omega_0)^2 - 1};$$

toutes les courbes se déduisent de l'une d'elles, par simple rotation autour du pôle.

III. L'origine étant le milieu de AB, on a l'équation différentielle

$$x'' = -g \frac{x}{a} \mp \frac{g}{5},$$

où l'on doit prendre, devant le dernier terme, le signe opposé à celui de la vitesse. Le mouvement consiste donc en demi-oscillations sinusoidales, ayant pour centres les points $x = \pm \frac{a}{5}$ qui limitent la région d'équilibre. Dans le cas de l'énoncé, les élongations successives seront $-\alpha$ (point A), $\frac{3\alpha}{5}$, $-\frac{\alpha}{5}$ (où le mobile s'arrête).

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Construire la courbe Γ .

$$y = \frac{\text{sh } x}{x}.$$

2° Développer en série de puissances de x , l'aire ABCD = S, limitée par la courbe Γ , l'axe des x , et les parallèles AB et CD à Oy d'abscisses x et $-x$.

3° L'aire ABCD, en tournant autour de Ox, engendre un volume V que l'on développera de même en série.

4° Le volume précédent étant rempli d'une matière de densité UN, calculer au moyen d'une série, son moment d'inertie M, par rapport à Ox.

5° Dans le cas où $x = 1$, calculer S, V, M, à 10^{-3} près.

On donne

$$\pi = 3,141592653,$$

à 10^{-9} près par défaut.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. LOUVET. — On trouve :

$$S = 2 \left[\frac{x}{1.1!} + \frac{x^3}{3.3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \dots \right];$$

$$V = 2\pi \int_0^x y^2 dx;$$

$$y^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4x^2} = 2 \left[\frac{1}{2!} + \frac{2^2 x^2}{4!} + \dots \right];$$

$$V = 4\pi \left[\frac{x}{1.2!} + \frac{2^2 x^3}{3.4!} + \dots + \frac{2^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)!} + \dots \right];$$

$$M = 2\pi \left[\frac{2^2(2^2-1)}{1.4!} x + \frac{2^4(2^4-1)}{3.6!} x^3 + \dots + \frac{2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)}{(2n+1)(2n+4)!} x^{2n+1} + \dots \right].$$

Pour $x = 1$, on a :

a. En prenant quatre termes de la série,

$$S = 2,114,$$

à un demi-millième près par excès;

b. En prenant cinq termes de la série,

$$V = 7,040,$$

à un demi-millième près par défaut;

c. En prenant cinq termes de la série,

$$M = 3,891,$$

à un demi-millième près par défaut.

(Clermont, juin 1922.)

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Un solide de révolution homogène est suspendu par son centre de gravité et un point P, marqué sur son axe Gz, est repoussé proportionnellement à la distance par le plan fixe Gx₁ y₁.

1° Montrer que, parmi les mouvements du solide, il y en a certains (Dℳ) dans lesquels tout point de l'axe fixe Gz₁ a, pour un observateur attaché au solide, une vitesse constante. Quelles conditions doivent remplir les constantes d'intégration pour donner ces mouvements (Dℳ)?

2° Étudier complètement les mouvements (Dℳ) qui donnent une trajectoire sphérique de P passant par un point donné P₀. Il y a deux formes ℔, ℔' de trajectoires de P et, pour P₀, deux régions sphériques R et R', la région R ne donnant que des trajectoires ℔ et la région R' donnant à la fois des trajectoires ℔ et ℔'. Déterminer ces deux régions et montrer a priori que les trajectoires du genre ℔' ne sortent jamais de la région R'.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Les équations du mouvement général sont :

$$\begin{aligned} A \sin^2 \theta \theta'^2 &= (h + K^2 \cos^2 \theta) A \sin^2 \theta - (\lambda - C \mu \cos \theta)^2, \\ A \psi' \sin^2 \theta &= \lambda - C \mu \cos \theta, \\ \psi' \cos \theta + \varphi' &= \mu. \end{aligned}$$

La condition imposée s'écrit

$$\varphi'^2 \sin^2 \theta + \theta'^2 = \text{const.}$$

et, exprimée en θ , conduit à écrire qu'une certaine fonction de θ est constante. Comme $K \neq 0$, on obtient finalement

$$A - C \neq 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu^2 = \frac{K^2 A}{(A - C)^2}$$

et l'étude des mouvements Dℳ se fait sans difficulté, c'est la discussion d'un trinôme bicarré en $\cos \theta$. Elle donne :

Si $h > 0$, une trajectoire ℔ à boucles avec deux parallèles limites symétriques par rapport à l'équateur ;

Si $h < 0$, une trajectoire ℔' sinusoïdale avec deux parallèles limites d'un même côté de l'équateur.

L'inégalité fondamentale

$$(h + K^2 \cos^2 \theta_0) A \sin^2 \theta_0 - \frac{C^2 K^2 A}{(A - C)^2} \cos^2 \theta_0 \geq 0.$$

détermine le minimum $H(\theta_0)$ de h .

La région R est définie par

$$H(\theta_0) > 0,$$

et la région R' est le reste de la sphère.

Un point quelconque d'une trajectoire \mathcal{C}' quelconque peut être considéré comme point initial de cette trajectoire \mathcal{C}' ; il ne peut donc se trouver dans R, il est forcément dans R'.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On donne la position initiale ABCD, A'B'C'D' d'un parallélépipède rectangle solide, mais non homogène, dans lequel la densité en chaque point est égale à la distance de ce point au plan de la base ABCD.

On considère les deux droites fixes D et Δ avec lesquelles sont confondues, à l'instant initial, les deux droites AB et C'B' et le plan fixe P mené par la droite D perpendiculairement à la droite Δ .

Le solide est lancé, à partir de la position initiale considérée, de façon que A décrive la droite D, que C' décrive la droite Δ et que B reste dans le plan P.

On a

$$AB = 1, \quad AD = 2, \quad AA' = 3,$$

et la vitesse initiale de A est l'unité.

Calculer numériquement les éléments de réduction au centre de gravité de la quantité de mouvement du solide à l'instant initial.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — On prend comme axes ceux de la base ABCD et l'axe perpendiculaire et l'on détermine facilement le centre de gravité G et l'ellipsoïde d'inertie relatif à l'origine, duquel on déduit immédiatement l'ellipsoïde central rapporté aux axes parallèles menés par G, soit $F(x, y, z) = 1$.

Si $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ sont les éléments de réduction en G de la vitesse du solide, le point A donne trois conditions, le point C' deux et le point B une, de sorte que l'on a six équations qui déterminent $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$. Les éléments de réduction demandés sont alors :

$$M\xi, \quad M\eta, \quad M\zeta; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial r}.$$

(Bordeaux, juin 1924.)

C.7. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — Deux solides de révolution homogène pesants et identiques ont même axe de révolution et sont suspendus par un point O de cet axe commun Oz.

Par des liaisons convenables, les plans $z O x$, $z O x'$ des deux trièdres $Oxyz$, $Ox'y'z'$ attachés à ces deux solides sont assujettis à toujours être symétriques par rapport au plan de Oz avec la verticale descendante Oz_1 .

1° Discuter complètement le mouvement quand les deux centres de gravité G , G' sont symétriques par rapport à O .

2° Les deux points G , G' étant quelconques, sous la seule hypothèse que les distances OG , OG' sont très grandes, former les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les données initiales pour que, dans le mouvement, Oz dirigé vers le centre de gravité du système total tende asymptotiquement vers la verticale ascendante. Montrer que les conditions trouvées sont compatibles.

C.8. — ÉPREUVE PRATIQUE. — Un tétraèdre homogène, pesant $OABC$, a ses trois arêtes OA , OB , OC rectangulaires et égales à l'unité. Sa densité est égale à l'unité.

Le sommet O est fixe et le solide ne peut que tourner autour de la bissectrice intérieure de l'angle BOA , bissectrice qui est fixe faisant l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec la verticale descendante.

Calculer la durée des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

(Bordeaux, novembre 1924.)

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.9. — I. On désigne par a , b , c trois quantités réelles ($a < b < c$) et par α , β , γ trois quantités positives telles que

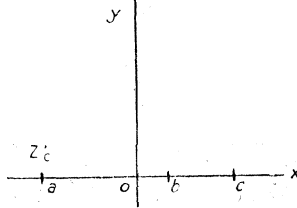
$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Soit encore z_0 une quantité complexe dans laquelle le coefficient de i est positif. On considère dans le plan de la variable complexe z le demi-plan situé au-dessus de Ox et l'on forme l'intégrale

$$Z = \int_{z_0}^z (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} (z-c)^{\gamma-1} dz.$$

L'intégration est faite en restant dans le demi-plan et, quand on intègre le long de l'axe réel, on évite les points a , b , c par des demi-

circonférences infiniment petites situées au-dessus de Ox . On demande de caractériser la portion du plan Z correspondant au demi-plan de la variable complexe z .



II. Étant considérée l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y) u = 0,$$

où $c(x, y)$ est une fonction réelle et holomorphe dans le voisinage de $x = 0, y = 0$, montrer qu'il existe des intégrales de cette équation susceptibles, dans le voisinage de l'origine, d'être mises sous la forme

$$\frac{P(x, y)}{x^2 + y^2} + Q(x, y) \log(x^2 + y^2),$$

où P et Q sont réelles et holomorphes autour de l'origine. Dans le développement de $P(x, y)$ qui est supposée s'annuler à l'origine,

$$P(x, y) = \alpha x + \beta y + \dots,$$

les coefficients α et β des termes du premier degré sont donnés, et la valeur de $Q(x, y)$ à l'origine, $Q(0, 0)$, a la valeur g , qui est également donnée.

III. Dans l'équation de Fredholm

$$\varphi(x, y) + \lambda \iint f(x, y; u, v) \varphi(u, v) du dv = \psi(x, y)$$

on suppose que le noyau $f(x, y; u, v)$ est égal à $\frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}}$.

On demande si le premier noyau itéré $f_1(x, y; u, v)$ devient encore infini, et, dans le cas de l'affirmative, à quelle fonction il est comparable.

IV. Démontrer que les valeurs singulières de λ relatives à une certaine aire et à l'équation

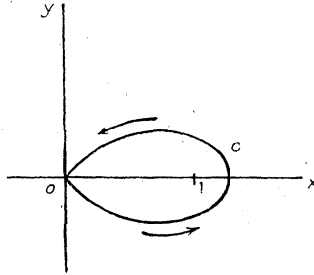
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda c(x, y) u,$$

où $c(x, y)$ est positive dans l'aire considérée, ne peuvent être que réelles et négatives.

C.10. — ÉPREUVE PRATIQUE. — Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{1-z^3}}$$

prise le long du contour c marqué sur la figure, partant de l'origine et entourant une fois le point critique $z = 1$ du radical cubique.



On partira de l'origine avec la valeur $+1$ du radical.

N. B. — On désignera dans le calcul par a la racine cubique imaginaire de l'unité, pour laquelle le coefficient de i est positif.

(Paris, juin, 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit, pour une équation de Fredholm $k(x, y)$ un noyau principal de la forme

$$k(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \dots + \varphi_m(x)\psi_m(y).$$

Expliquer la réduction de ce noyau à la forme canonique et montrer qu'il est la somme d'un certain nombre de noyaux canoniques orthogonaux deux à deux. (On admettra le théorème fondamental sur la réduction d'une substitution linéaire à la forme canonique.)

C.11. — II. Déterminer la fonction $f(x)$ satisfaisant à l'équation intégrale :

$$\int_0^y \frac{f(x) dx}{(y-x)^{\frac{1}{3}}} = \cos y.$$

C.12. — ÉPREUVE PRATIQUE. — L'élément linéaire d'une surface S est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{1+u^2}{u^2(1-u^2)^3} du^2 + \frac{2du dv}{u(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{dv^2}{1-u^2}.$$

Montrer que cette surface peut être appliquée sur une surface de révolution Σ engendrée par une chaînette tournant autour de sa base (c'est-à-dire sur une surface dont l'équation en coordonnées rectangulaires est de la forme $\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$).

Calculer la torsion en valeur absolue d'une ligne asymptotique de S en un point u, v .

(Bordeaux, 4 juin 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Théorie de l'équation intégrale de première espèce*

$$\int_0^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x),$$

donner un exemple.

II. — *Pour une surface (S), on a (notations classiques)*

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2.$$

Une courbe (C) est définie sur cette surface par les équations paramétriques

$$u = f(t), \quad v = \varphi(t).$$

Soient, en un point M de (C), R son rayon de courbure et θ l'angle de sa binormale avec la normale à la surface (S) au même point. Calculer le quotient

$$\frac{\cos \theta}{R}$$

à l'aide des fonctions E, F, G, $f(t)$, $\varphi(t)$ et de leurs dérivées en considérant ces fonctions comme données.

C. 13. — ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer les valeurs singulières de λ pour l'équation de Fredholm*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{3}{2} xy + \frac{5}{2} x^2 y^2 \right) \varphi(y) dy.$$

Dans le cas où $\lambda = 1$ et $f(x) = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tang} x}{x}$, résoudre l'équation.

(Bordeaux, novembre 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère une transformation de contact à une équation directrice :*

$$F(xyz, XYZ) = 0.$$

On supposera les espaces xyz , XYZ rapportés aux mêmes axes.

1° Établir les équations qui permettent de trouver l'élément de contact XYZ , PQ correspondant à un élément donné xyz , pq . Quelle est l'interprétation géométrique?

2° A quelle condition les normales aux éléments correspondants se rencontrent-elles? Montrer que la fonction F doit satisfaire à une certaine équation aux dérivées partielles. On pourra désigner dans cette équation par abc , ABC les dérivées de F par rapport à xyz , XYZ .

3° Former les équations différentielles des caractéristiques. Elles présentent de nombreuses combinaisons intégrables, les interpréter géométriquement. Montrer en particulier que les points abc , ABC décrivent deux cercles dont l'axe commun passe par l'origine.

Montrer qu'on peut achever l'intégration des équations différentielles en plaçant convenablement ces cercles par rapport aux axes. Interpréter le résultat obtenu, démontrer que pour une caractéristique donnée :

- a. Les points xyz , XYZ décrivent deux cercles de même axe ;
- b. Les directions abc , ABC passant par ces points se coupent en un point fixe de cet axe.

En déduire les équations finies des caractéristiques.

4° Comment alors peut-on intégrer l'équation aux dérivées partielles.

INDICATIONS. — 2° L'équation est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ X-x & Y-y & Z-z \end{vmatrix} = 0;$$

3°

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} b & c \\ Y-y & Z-z \end{vmatrix}} = \frac{dX}{-\begin{vmatrix} B & C \\ Y-y & Z-z \end{vmatrix}} = \frac{da}{-\begin{vmatrix} B & C \\ b & c \end{vmatrix}} = \frac{dA}{\begin{vmatrix} B & C \\ b & c \end{vmatrix}}.$$

On trouve que $A + a$, $B + b$, $C + c$, $A^2 + B^2 + C^2$, $a^2 + b^2 + c^2$ sont des constantes.

Le reste est indiqué dans l'énoncé. Il suffit de placer les cercles perpendiculaires à Oz .

4° Méthode classique de Cauchy.

(Nancy, octobre 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère un plan rapporté à deux coordonnées rectangulaires xy .

Un point P est placé au hasard dans ce plan, la probabilité pour qu'il tombe entre les abscisses x , $x + \Delta x$, entre les ordonnées y , $y + \Delta y$,

est

$$kk' e^{-k^2 x^2 - k'^2 y^2} \Delta x \Delta y.$$

1° Un rectangle compris entre les abscisses x_1, x_2 , entre les ordonnées y_1, y_2 étant donné, quelle est la probabilité pour que ce rectangle soit atteint par un point P, la probabilité pour qu'il soit atteint au moins une fois dans n épreuves successives?

2° Chaque point P est entouré d'un rectangle efficace, parallèle aux axes, de centre P, de longueur $2l$, de hauteur $2l'$. Probabilité pour que le rectangle de la première partie soit atteint par une portion du rectangle efficace.

3° On jette au hasard deux points P avec leurs rectangles. Quelle est la probabilité pour que ces rectangles soient extérieurs l'un à l'autre, la probabilité pour qu'ils se recouvrent partiellement?

On jette au hasard n points P. Quelle est la probabilité pour qu'ils soient tous extérieurs l'un à l'autre?

4° On jette au hasard deux points P avec leurs rectangles. Comment calculera-t-on la valeur probable de la surface recouverte?

INDICATIONS. — La probabilité $p = \iint kk' e^{-k^2 x^2 - k'^2 y^2} dx dy$ étendue au rectangle x_1, x_2, y_1, y_2 .

Elle se calcule à l'aide de la fonction bien connue θ .

L'autre probabilité est $1 - (1 - p)^n$.

2° Il suffit de border le rectangle de chaque côté de $2l$ en x , de $2l'$ en y .

3° Les centres étant $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$, la probabilité de recouvrement est

$$\iiint \int k^2 k'^2 e^{-k^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) - k'^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2)} d\xi_1 d\xi_2, d\eta_1 d\eta_2$$

étendue au domaine

$$|\xi_1 - \xi_2| < 2l, \quad |\eta_1 - \eta_2| < 2l'.$$

Elle se calcule à l'aide de la fonction θ .

4° Dans le cas de recouvrement, l'aire est $[2l - (\xi_1 - \xi_2)][2l' - (\eta_1 - \eta_2)]$.

Il suffit de multiplier par la probabilité et d'intégrer.

(Nancy, juin 1923.)

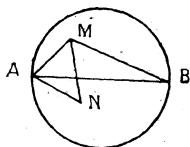
C. 14. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère dans un plan un cercle de rayon R. Un point M est pris au hasard dans le cercle. La probabilité pour qu'il soit dans une aire infiniment petite est proportionnelle à cette aire.

Définir et calculer les valeurs probables :

1° De l'aire du triangle AMB, AB étant un diamètre du cercle.

2° De l'aire du triangle AMN, A étant pris sur le cercle M et N étant pris au hasard (on pourra adopter des coordonnées polaires).

3° M étant supposé fixe, quelle est la probabilité pour que MN soit inférieure à une longueur donnée a ?



4° Quelle est cette probabilité quand MN sont quelconques dans le cercle ?

(Nancy, octobre 1923.)

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

EPREUVE THÉORIQUE. — 1° On considère un plan rapporté à deux coordonnées cartésiennes rectangulaires x_1, x_2 et un cercle quelconque, de centre x_1, x_2 de rayon x_3 . Montrer que l'angle $d\theta$ de deux cercles infiniment voisins est donné par la formule

$$d\theta^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2}{x_3^2}.$$

2° On associe à chaque cercle le point $x_1 x_2 x_3$ de l'espace non euclidien à trois dimensions dont la forme $d\theta^2$ est l'élément linéaire. Former les équations différentielles des géodésiques de cet espace, en prenant pour paramètre l'arc θ de la géodésique. Intégrer ces équations. Former les équations finies des géodésiques passant par un point donné $x_1^0 x_2^0 x_3^0$.

3° En déduire la distance géodésique θ de deux points donnés; montrer qu'elle est donnée par

$$4 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 - (x_3 - x_3^0)^2}{x_3 x_3^0}.$$

Quelle est la surface S engendrée par les géodésiques de longueur nulle passant en un point donné?

4° *Caractériser géométriquement la famille des cercles correspondant aux différents points d'une géodésique. Quelle est la signification pour les cercles correspondants de la distance géodésique de deux points, des points de la surface S, des points des régions séparées par la surface S?*

INDICATIONS. — 2° On a trois intégrales premières :

$$\frac{x'_1}{x_3} = C_1, \quad \frac{x'_2}{x_3} = C_2, \quad \frac{x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2}{x_3^2} = 1.$$

4° On trouve un faisceau linéaire de cercles. La distance géodésique est l'angle. Le reste s'ensuit.

(Nancy, octobre 1923.)

BIBLIOGRAPHIE.

CALCUL VECTORIEL : *Théorie, Applications géométriques et cinématiques*, destiné aux élèves des classes de Mathématiques spéciales et aux étudiants en Sciences mathématiques et physiques, par *A. Châtelet* et *J. Kampé de Fériet*. 1 vol, 24 × 16 de 426 pages. Gauthier-Villars, 1924. Prix 50^{fr}.

Si l'Analyse vectorielle a été longtemps négligée en France, il faut reconnaître qu'il s'est produit en sa faveur, ces dernières années, un revirement complet. Il n'est guère de Cours de Mécanique et de Physique où les méthodes vectorielles n'aient pris une place importante et elles apparaissent même, plus timidement sans doute, dans l'enseignement des Mathématiques spéciales. Les principes du Calcul, tels que les expose le premier Chapitre du présent Livre, figurent en effet, à peu de chose près, au programme d'admission des grandes écoles; mais on peut certainement désirer voir les élèves faire quelque usage d'un symbolisme dont ils possèdent en fait tous les éléments, dont les avantages ont été souvent signalés et qui aide singulièrement l'intuition géométrique.

L'Ouvrage de MM. Châtelet et Kampé de Fériet, « rédigé en pensant surtout aux classes de Mathématiques spéciales », et où les auteurs reprennent, du point de vue vectoriel, les principes de la Géométrie analytique, les éléments de la Géométrie différentielle, la Cinématique du point et du solide, ne peut manquer d'avoir, à cet égard, la plus heureuse influence. En retrouvant ici, très heureusement exposées dans le langage

vectorel, les principales questions du programme, le lecteur pourra faire une convaincante comparaison et il se familiarisera sans peine avec la technique vectorielle. L'expérience pédagogique des auteurs, la rare qualité de leur exposition, assure d'ailleurs la réalisation du désir qu'ils expriment dans la préface du Livre « convaincre examinateurs et professeurs que l'emploi des notations et des opérations vectorielles permet d'aborder avec aisance et élégance la majeure partie des théories et des problèmes que l'on peut demander aux examens d'entrée des grandes écoles ».

Dans l'ensemble, nous l'avons déjà dit, les théories développées appartiennent au programme de la classe de Spéciales. La cinématique du solide y est cependant étudiée plus complètement et, d'autre part, une importante Note est consacrée à la théorie des champs de scalaires et de vecteurs, à la définition des invariants différentiels. Les étudiants de Licence et d'Agrégation trouveront ainsi, dans ce Livre, un exposé très accessible, très bien gradué, des connaissances nécessaires pour la Physique et la Mécanique.

J. P.

NOTATIONS ET FORMULES VECTORIELLES, par *A. Lafay*. 1 vol.
23 × 14 de 36 pages. Gauthier-Villars, 1925. Prix 6^{fr}.

Ce petit volume réunit, sous une forme condensée mais toujours très claire, les notions fondamentales et l'ensemble des formules. Il permettra d'acquérir rapidement une connaissance du Calcul vectoriel suffisante pour n'être jamais embarrassé par son emploi, et restera toujours un très commode Ouvrage de référence.

S. F.

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

(Suite et fin.)

C.15. — Soit le champ vectoriel défini, en coordonnées rectangulaires par ses composantes $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$. Trouver le flux sortant de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + 2y + 3z.$$

Trouver la surface, passant par l'origine et orthogonale au champ en chacun de ses points. Montrer que les surfaces tangentes au champ en chacun de leurs points peuvent se déduire de cylindres par la trans-

formation

$$X = \frac{1}{x}, \quad Y = \frac{1}{y}, \quad Z = \frac{1}{z}.$$

C.16. — Faire la récapitulation de la théorie des courbes gauches sur l'exemple suivant :

$$x = \cos t - \frac{2}{3} \cos^3 t; \quad y = \frac{2}{3} \sin^3 t; \quad z = \sin t$$

(écrire explicitement les trois groupes de formules de Frenet). Construire les projections de la courbe sur les plans de coordonnées. Montrer que cette courbe est algébrique et trouver son degré (voir BOULIGAND, *Géométrie analytique*, n^{os} 91 et 96).

C.17. — Calculer explicitement les deux fonctions

$$x(t) = \int_0^t \frac{2t \, dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y(t) = \int_0^t \frac{1-t^2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt.$$

Soit $z(t)$ une troisième fonction de t qui s'annule pour $t = 0$. On considère la courbe, lieu du point de coordonnées $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, dans un système d'axes rectangulaires $Oxyz$. Comment faut-il choisir la fonction $z(t)$ pour que t soit précisément l'abscisse curviligne du point correspondant de cette courbe. Ce choix étant effectué, construire les projections de la courbe sur les plans de coordonnées. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.

C.18. — Les composantes d'un champ vectoriel sont de la forme

$$\begin{aligned} X &= \lambda(x, y, z) + x \mu(x, y, z); \\ Y &= \lambda(x, y, z) + y \mu(x, y, z); \\ Z &= \lambda(x, y, z) + z \mu(x, y, z). \end{aligned}$$

1^o Dédire de ces formules que le champ proposé est la somme géométrique de deux autres champs, dont l'un est formé de vecteurs parallèles à une même direction, l'autre de vecteurs concourants. En déduire que les courbes intégrales du système

$$(1) \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

sont contenues dans des plans passant par une même droite.

2^o On suppose que λ et μ soient exclusivement fonctions de $x + y + z$ et de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Montrer que les courbes intégrales du système (1) sont égales.

3° Appliquer ce qui précède au cas où l'on a

$$X = x^2 - yz; \quad Y = y^2 - zx; \quad Z = z^2 - xy$$

et trouver dans ce cas les surfaces normales en chacun de leurs points au champ proposé. Calculer le flux de ce champ à travers la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z.$$

C. 19. — Trouver les surfaces orthogonales aux surfaces de la famille

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3.$$

Existe-t-il parmi ces surfaces des surfaces du second degré?

C. 20. — Intégrer l'équation

$$(y + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + x) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$$

Comment sont engendrées les surfaces intégrales. Montrer que ces surfaces coupent à angle droit une famille de quadriques à un paramètre.

C. 21. — On considère une fonction de $x + y + z$ et de $x^2 + y^2 + z^2$. Soient P, Q, R les composantes de son gradient. Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R.$$

Application à la fonction

$$\frac{x + y + z}{\sqrt{3}} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

C. 22. — On considère le champ vectoriel

$$X = y + z - x; \quad Y = z + x - y; \quad Z = x + y - z.$$

Trouver le lieu des points M où le vecteur du champ est porté par la droite OM. Trouver les surfaces orthogonales au champ. Trouver le flux du champ émanant de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} = Z.$$

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2474.

(1924, p. 351.)

Étant donnée l'équation

$$x^n + x + 1 = 0$$

dans laquelle n est un entier plus grand que 2, la somme des $(n^2 + n - 1)$ èmes puissances des racines de cette équation est nulle.

L. TITS.

SOLUTION.

Par M. J. DE CAUMONT.

On a

$$x^{n^2+n-1} = \frac{(x^n)^{n+1}}{x},$$

et, en tenant compte de l'équation donnée,

$$\begin{aligned} (1) \quad x^{n^2+n-1} &= (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{x} \\ &= (-1)^{n+1} \left[x^n + (n+1)x^{n-1} + \dots + (n+1) + \frac{1}{x} \right]. \end{aligned}$$

Or les formules classiques qui donnent les sommes S_1, S_2, \dots des puissances d'exposants 1, 2, ... des racines d'une équation entière montrent qu'ici :

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 = \dots = S_{n-2} &= 0, \\ S_{n-1} &= -(n-1). \end{aligned}$$

La somme des inverses des racines de l'équation proposée est évidemment -1 ; enfin remplaçons dans le crochet de la formule (1) x^n par $-x-1$ et nous voyons que la somme des puissances d'exposants $n^2 + n - 1$ est

$$(-1)^{n+1} [-n - (n-1)(n+1) + n(n+1) - 1] = 0.$$

Autre solution par MM. R. MARCHAY, et G. MÉTROD.



**QUELQUES REMARQUES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE SUR LES CONIQUES
CONSIDÉRÉES COMME ENVELOPPES DE DROITES ;**

PAR ILIOVICI ET WEILL.

Nous nous proposons de démontrer par des procédés de géométrie élémentaire que la perspective d'une conique est une conique.

PROBLÈME PRÉLIMINAIRE. — *Construire le sommet A d'un triangle ABC connaissant le côté BC, la moyenne géométrique l des côtés AB et AC, et la direction de la bissectrice intérieure de l'angle A.*

Si par le milieu M de BC, on mène la parallèle à la bissectrice extérieure de l'angle A et qu'on y porte une longueur $MD = l$, les points A et D sont les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse de foyers B et C. Pour construire A, on connaît, dès lors, le côté BC, la direction de la bissectrice de l'angle A et la somme $AB + AC = DB + DC$ des deux autres côtés. Comme on a $DB + DC > BC$, on obtiendra dans tous les cas deux positions du point A symétriques par rapport au point M ⁽¹⁾.

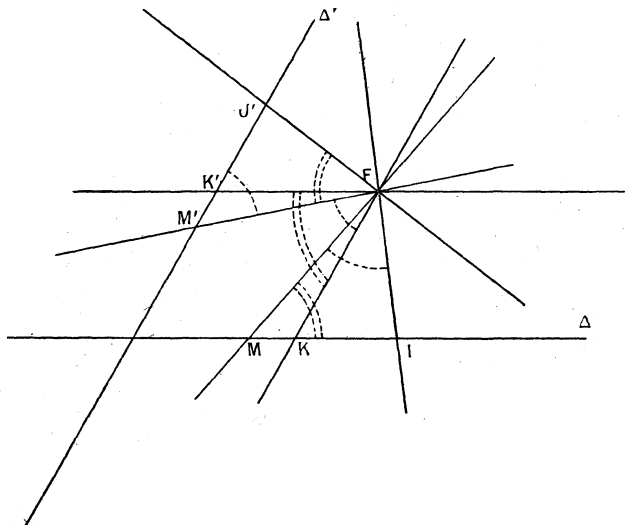
THÉORÈME I. — *Étant données deux divisions homographiques non semblables portées sur deux axes distincts, il existe toujours deux points réels d'où l'on voit sous un angle constant le segment qui joint les points homologues.*

On sait que les côtés d'un angle constant qui tournent autour du sommet F, déterminent sur deux droites D et D', deux divisions homographiques, que l'on peut aussi définir à l'aide de trois couples d'éléments homologues : 1° le point limite I sur D (auquel

⁽¹⁾ Le problème comporte quatre solutions mais deux sont toujours réelles et deux toujours imaginaires.

correspond le point à l'infini sur D'), 2° le point limite J' sur D' et 3° deux points homologues quelconques M et M' .

Si donc on mène par F (*fig.*) les deux parallèles FK et FK' à D et D' , les angles \widehat{IFK} , $\widehat{MFM'}$ et $\widehat{K'FJ'}$ sont égaux et orientés dans



le même sens. On en déduit que les bissectrices de l'angle IFJ' sont confondues avec celles de $\widehat{KFK'}$ (donc parallèles à celles de l'angle $\widehat{DD'}$), et que

$$FI \cdot FJ' = IM \cdot J'M'$$

(conséquence de la similitude des triangles IFM et $J'F'M'$).

Une correspondance homographique étant définie par les points limites I et J' et un couple de points homologues M et M' , pour déterminer le point F , on est ramené au problème préliminaire qui fournit toujours deux solutions réelles.

Remarque. — Si les divisions étaient semblables, les points I et J' seraient rejetés à l'infini, ainsi qu'un des points F , l'autre existerait toujours et serait facile à déterminer.

THÉORÈME II ⁽¹⁾. — *Lorsque les côtés d'un angle constant tournent autour du sommet F, la droite qui joint les points où chacun des côtés rencontre respectivement deux droites fixes D et D', enveloppe une conique de foyer F et tangente à D et D'.*

En effet, deux points correspondants M et M' sur les deux droites, définissent l'angle MFM'. Or il existe une conique et une seule, ayant pour foyer F, et tangente aux trois droites D, D' et MM'.

Le segment déterminé sur une tangente à cette conique, par les droites D et D' est vu du point F sous un angle constant qui est MFM', ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME III. — *La perspective d'une conique est une conique.*

Considérons une conique et deux tangentes fixes D et D'. Une tangente quelconque à cette conique coupe D et D' en M et M', qui se correspondent homographiquement, puisque le segment MM' est vu du foyer sous un angle constant.

Comme la correspondance homographique est projective, les projections μ et μ' des points M, M' se correspondent homographiquement sur Δ et Δ' (projection de D et D') et, d'après le théorème I, il existe un point φ d'où le segment $\mu\mu'$ est vu sous un angle constant. En vertu du théorème II, la droite $\mu\mu'$ enveloppe une conique, qui est évidemment la projection de la première.

Comme toute définition générale des coniques, la définition qui précède permet de mettre en évidence les propriétés qui caractérisent ces courbes. Donnons, à titre d'exemple, après M. Montel ⁽²⁾, la propriété énoncée par le second théorème de Poncelet.

La réciproque de ce théorème est une conséquence du théorème II.

Étant donnés dans un plan un point F et une courbe C, si la droite FT, qui joint le point F au point de rencontre des tangentes en deux points quelconques P et P' de la courbe, est bissectrice de l'angle PFP', cette courbe est une conique de foyer F.

(1) Réciproque du théorème classique : Le segment déterminé sur une tangente mobile, par deux tangentes fixes d'une conique, est vu de chacun des foyers sous un angle constant.

(2) P. MONTEL, *Sur une transformation géométrique* (*Revue de l'Enseignement des Sciences*, n^{os} 81-82, janvier-février 1915).

SUR UNE SÉRIE DE LAGRANGE;

PAR NIELS NIELSEN.

Soit r , plus grand que zéro, le rayon de convergence de la série de puissances

$$(1) \quad F(y) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \dots,$$

la frontière du domaine de convergence de la série de Lagrange

$$(2) \quad f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s [\log(1+x)]^s$$

est représentée par la courbe

$$(3) \quad |\log(1+x)| = r,$$

courbe que nous désignons, dans ce qui suit, par $C(r)$, tandis que le nombre positif r est désigné comme la constante de convergence de la série (2).

Posons maintenant

$$(4) \quad x = u + iv, \quad x + 1 = \rho e^{i\theta},$$

où u et v , ρ et θ sont des variables réelles, nous aurons

$$(5) \quad u + 1 = \rho \cos \theta, \quad v = \rho \sin \theta,$$

tandis que l'équation de $C(r)$ deviendra, en coordonnées polaires,

$$(6) \quad (\log \rho)^2 + \theta^2 = r^2.$$

Cela posé, il est évident que $C(r)$ est symétrique par rapport à l'axe réel, et que la valeur maximum de $|\log \rho|$ correspond à $\theta = 0$, de sorte que nous aurons

$$e^{-r} \leq \rho \leq e^r,$$

ce qui donnera, en vertu de (5),

$$(7) \quad e^{-r} - 1 \leq u \leq e^r - 1,$$

quel que soit θ .

Dans ce qui suit, nous désignons par A et B les deux points de l'axe réel, dont les abscisses sont les valeurs maximum et minimum de u .

De plus, il est évident que les deux lignes

$$\theta = \pm r$$

sont tangentes à $C(r)$, et que les deux points de contact sont situés sur le cercle $\rho = 1$, savoir, en coordonnées rectangulaires,

$$(8) \quad (u + 1)^2 + v^2 = 1.$$

Quant à ces deux points de contact, ils ont la même projection C sur l'axe réel, et ce point C a l'abscisse

$$\cos r - 1;$$

c'est-à-dire que C est situé entre A et B, pourvu que

$$\cos r > e^{-r}.$$

Or, l'équation transcendante

$$(9) \quad \varphi(x) = \cos x - e^{-x} = 0,$$

savoir

$$(10) \quad x - x^2 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{2x^6}{6!} + \dots = 0,$$

a, dans chacun des intervalles $(2p\pi, 2p\pi + 2\pi)$, deux racines simples α_p et β_p qui satisfont aux inégalités

$$(11) \quad \begin{cases} 2p\pi + \frac{\pi}{2} > \alpha_p > 2p\pi + \frac{\pi}{4}, \\ 2p\pi + 2\pi - \frac{\pi}{2} < \beta_p < 2p\pi + 2\pi - \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

car nous aurons

$$\varphi'(x) = e^{-x} - \sin x$$

de sorte qu'une racine multiple de (10) satisfait nécessairement aussi à l'équation

$$\cos x = \sin x,$$

ce qui est impossible parce qu'aucune racine de cette dernière équation ne satisfait aux conditions (11).

Étudions maintenant la courbe $C(r)$; cette courbe est, pour des valeurs suffisamment petites de r , un ovale qui entoure l'origine, mais, pour des valeurs plus grandes de r , la courbe susdite aura deux cornes qui se prolongent de plus en plus, selon que r se rapproche de la valeur π , et qui sont finalement, pour $r = \pi$, en contact dans le point $u = -2$, situé sur le cercle (8).

De plus, soit $r < \frac{\pi}{2}$, les deux cornes de $C(r)$ sont situées entre les tangentes $\theta = \pm r$, tangentes qui coïncident pour $r = \frac{\pi}{2}$; et, pour $r > \frac{\pi}{2}$, les deux tangentes sont situées entre les cornes.

Supposons ensuite $r > \pi$, la courbe $C(r)$ est toujours composée de plusieurs branches fermées.

Soit par exemple

$$\pi < r < 2\pi,$$

$C(r)$ est composée de deux branches différentes, savoir un ovale symétrique par rapport à l'axe réel et contenant les deux points de cet axe

$$u = e^r - 1, \quad u = e^{-\sqrt{r^2 - \pi^2}} - 1,$$

et une courbe fermée, analogue à $C(r)$ pour $r < \pi$, et contenant les deux autres points de l'axe réel

$$u = -e^{-r} - 1, \quad u = e^{\sqrt{r^2 - \pi^2}} - 1.$$

Soit donc $r > \pi$, il est toujours possible de tracer une courbe fermée entièrement située dans le domaine limité par $C(r)$ et entourant le point $x = -1$.

Désignons ensuite par

$$(12) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

une fonction holomorphe aux environs de l'origine, il existe toujours un développement de la forme (2), et les coefficients A_n sont à déterminer par les expressions

$$A_0 = a_0, \\ A_n = \frac{1}{n!} D_x^{n-1} \left[\left(\frac{x}{\log(1+x)} \right)^n f'(x) \right]_{x=0},$$

ce qui donnera, pour $n \geq 1$,

$$(13) \quad A_n = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{n-1}{s} \times (s+1)! a_{s+1} D_x^{n-s-1} \left[\left(\frac{x}{\log(1+x)} \right)^n \right]_{x=0}$$

Quant au coefficient général A_n , posons, dans (2),

$$x = e^y - 1,$$

il résulte, en vertu de (12),

$$(14) \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s (e^y - 1)^s = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s y^s.$$

Posons ensuite

$$(15) \quad K_{n+1}^r = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{n}{s} (n-s)^{n+r},$$

nous aurons la série de puissances, toujours convergente,

$$\frac{(e^y - 1)^s}{s!} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{K_{s+1}^m y^{m+s}}{(m+s)!},$$

ce qui donnera, en vertu de (14),

$$(16) \quad A_n = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{s=n-1} (s+1)! a_{s+1} K_{s+2}^{n-s-1}.$$

Or les coefficients a_s , étant quelconques, il résulte, en vertu de (13) et (14),

$$(17) \quad \binom{n-1}{s} D_x^{n-s-1} \left[\left(\frac{x}{\log(1+x)} \right)^n \right]_{x=0} = K_{s+2}^{n-s-1},$$

formule qui est parfaitement analogue à celle de Schlömilch

$$(18) \quad (-1)^s D_x^s \left[\left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^n \right]_{x=0} = C_n^s,$$

où les C_n^s sont les coefficients de factorielles, définis par l'identité

$$x(x+1)\dots(x+n-1) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} x.$$

Quant à la série (2), partons de la formule eulérienne

$$\frac{2}{e^x + 1} = 1 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (2^{2s} - 1) B_s}{(2s)!} x^{2s-1},$$

où il faut supposer $|x| < \pi$, tandis que les B_s sont les nombres de Bernoulli, il résulte la série de Lagrange

$$(19) \quad \frac{x}{x+2} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} (2^{2s} - 1) B_s}{(2s)!} [\log(1+x)]^s,$$

dont le domaine de convergence a la frontière $C(\pi)$.

De même, cette autre formule eulérienne

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} B_s}{(2s)!} x^{2s}$$

applicable, pourvu que $|x| < 2\pi$, conduira à la série de Lagrange

$$(20) \quad \frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{\log(1+x)}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} B_s}{(2s)!} [\log(1+x)]^{2s},$$

dont le domaine de convergence a la frontière $C(2\pi)$.

Remarquons, en passant, que la formule (20) donnera immédiatement cet autre développement

$$(21) \quad \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!} [\log(1+x)]^{2s-1}$$

qui a le même domaine de convergence que (20).

Quant à la série (2), supposons uniforme la fonction $f(x)$, puis supposons plus grande que π la constante de convergence de cette série, la fonction $F(y)$, définie par la formule (1), admet nécessairement la période $2\pi i$, savoir

$$(22) \quad F(y + 2\pi i) = F(y),$$

car il est possible de tracer, dans le domaine de convergence de la série (2), une courbe fermée qui entoure le point $x = -1$.

Cela posé, il est évident que la constante de convergence d'une série de la forme (2), qui représente une fonction uniforme, est généralement au plus égale à π , ce qui s'accorde bien avec notre remarque sur la série (19).

Mais il résulte de (20), que cette condition (22) n'est pas nécessaire, pourvu que $f(x)$ soit multiforme.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1925).

Mathématiques élémentaires.

Étant donnés quatre points quelconques A, B, C, D, nous désignons par (A), (B), (C), (D) les cercles supposés distincts, respectivement circonscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC, et nous appellerons bissecteurs de deux cercles sécants d'une même sphère (ou d'un même plan) S les deux cercles passant par les points communs aux cercles considérés, faisant avec eux des angles égaux, et situés sur la sphère (ou le plan) S. La notation (a, b) représentera, d'autre part, l'angle, non orienté, des arcs de cercle ACB et ADB, appartenant aux cercles (D) et (C).

- 1° Comparer les angles (a, b) et (c, d) .
- 2° Les points A, B, C restant fixes, sur quel lieu doit se déplacer D pour que les angles (d, a) , (d, b) , (d, c) restent invariables?
- 3° Ces angles étant supposés égaux aux angles A, B, C du triangle fixe ABC, quels sont les lieux des centres des cercles inscrits et exinscrits aux triangles DBC, DCA, DAB?
- 4° Montrer que les points I, J, K, L, communs aux bissecteurs de (A) et (B) et aux bissecteurs de (A) et (C), appartiennent à des bissecteurs convenablement choisis des quatre autres combinaisons des cercles (A), (B), (C), (D), associés deux à deux.

Si A, B, C, D sont les sommets d'un tétraèdre, il en est de même de I, J, K, L . Montrer que chaque arête de l'un de ces tétraèdres rencontre deux arêtes opposées de l'autre.

5° Construire les points A, B, C, D , connaissant les points I, J, K, L .

6° Montrer que les angles $(i, j), (i, k), (i, l), \dots$, qui correspondent au système des quatre points I, J, K, L , sont égaux aux angles $(a, b), (a, c), \dots$, qui correspondent aux points A, B, C, D .

7° Lieux des points I, J, K, L , quand A, B, C restent fixes, et les angles $(d, a), (d, b), (d, c)$ invariables.

8° Dans les mêmes conditions, enveloppe des plans JKL, IKL, IJL, IJK .

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

I. La figure proposée possède des propriétés remarquables : l'une des plus importantes, à savoir la *réciprocité intime* des deux tétraèdres $ABCD, IJKL$, est signalée implicitement; il importe de la signaler dès le début.

Si les points A, B, C, D se déplacent de façon à occuper des positions nouvelles A', B', C', D' , les points I, J, K, L prennent des positions nouvelles correspondantes I', J', K', L' : montrer que, l'ensemble A', B', C', D' coïncidant, dans un ordre quelconque, avec l'ensemble I, J, K, L , l'ensemble $I'J'K'L'$ coïncide avec $ABCD$, démontre la réciprocité, mais d'une façon incomplète : en effet on doit encore remarquer que les douze bissecteurs de $(A), (B), (C), (D)$ coïncident, dans leur ancienne position, avec les bissecteurs de $(I), (J), (K), (L)$. On a ainsi un système de douze cercles sur la sphère n'ayant qu'un total de huit points d'intersection deux à deux; en chaque point d'intersection passent six cercles répartis en trois couples de cercles orthogonaux; chaque cercle porte quatre points d'intersection; les douze cercles étant tracés, on sait, par des procédés réguliers, séparer les huit points communs en deux groupes $(ABCD), (IJKL)$.

Ici, comme dans le problème classique : cercle tangent à trois cercles donnés, on peut adopter bien des méthodes; celle qui doit

On a donc

$$(1) \quad (a, b) + (a, c) + (a, d) = \pi;$$

$$(2) \quad \begin{cases} (a, b) = (c, d) = \hat{B}_A = \hat{A}_B = \hat{D}_C = \hat{C}_D, \\ (a, c) = (d, b) = \hat{C}_A = \hat{D}_B = \hat{A}_C = \hat{B}_D, \\ (a, d) = (b, c) = \hat{D}_A = \hat{C}_B = \hat{B}_C = \hat{A}_D. \end{cases}$$

On retrouve ainsi une propriété classique : les triangles $B_A C_A D_A$, $A_B D_B C_B$, $D_C A_C B_C$, $C_D B_D A_D$ déduits du tétraèdre ABCD (accidentellement quadrilatère plan) par les inversions de pôle A, B, C, D sont semblables.

Écrivons, p_A étant la puissance d'inversion de pôle A,

$$(3) \quad \begin{cases} C_A D_A = \frac{p_A}{AB \cdot AC \cdot AD} (AB \cdot CD), \\ D_A B_A = \frac{p_A}{AB \cdot AC \cdot AD} (AC \cdot BD), \\ B_A C_A = \frac{p_A}{AB \cdot AC \cdot AD} (AD \cdot BC), \end{cases}$$

on aura

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\sin(a, b)}{AB \cdot CD} = \frac{\sin(a, c)}{AC \cdot D} = \frac{\sin(a, d)}{AD \cdot BC}, \\ (a, b) + (a, c) + (a, d) = \pi. \end{cases}$$

Chacun des produits $AB \cdot CD$, $AC \cdot BD$, $AD \cdot BC$ est inférieur à la somme des deux autres, supérieur à la valeur absolue de leur différence. L'une des égalités ne peut être remplacée par une égalité, ce qui se traduit par

$$AB \cdot CD \pm AC \cdot BD \pm AD \cdot BC = 0,$$

que si les quatre points A, B, C, D non seulement sont dans un même plan mais encore sur un même cercle : cette disposition particulière est exclue ici.

Les paramètres de grandeur d'un tétraèdre sont au nombre de six (arêtes par exemple), ceux de forme au nombre de cinq. Deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D' tels que l'on ait les deux relations de forme

$$(5) \quad \frac{A'D' \cdot B'C'}{AD \cdot BC} = \frac{B'D' \cdot C'A'}{BD \cdot CA} = \frac{C'D' \cdot A'B'}{CD \cdot AB},$$

peuvent être transformés l'un en l'autre, chaque lettre non accentuée correspondant à la même lettre accentuée, par deux inversions précédées ou suivies d'un déplacement; il suffit en effet de remarquer que les triangles $B_A C_A D_A$ et $B'_A C'_A D'_A$, pouvant être rendus égaux, on peut transformer ABCD en $B_A C_A D_A$, puis par une inversion convenablement choisie passer de $B_A C'_A D_A$ à un tétraèdre *égal* (et non symétrique) à $A' B' C' D'$. Un cas extrêmement intéressant, que nous utiliserons plus tard, est celui où les sommets A', B', C', D' ne sont autres que B, A, D, C respectivement, dans cet ordre, ou encore C, D, A, B , ou encore D, C, B, A .

II. La relation $\langle a, d \rangle + \langle b, d \rangle + \langle c, d \rangle = \pi$ prouve qu'il suffit que $\langle a, d \rangle$ et $\langle b, d \rangle$ restent constants, pour que $\langle c, d \rangle$ soit aussi constant. Faisons donc une inversion de pôle A : B_A et C_A en résultent, et D_A décrit un cercle Γ_A d'axe $B_A C_A$; le point D décrit le cercle Γ inverse de Γ_A .

Les cercles ABC et Γ offrent une configuration réciproque remarquable : appelons-les, au cours de cette solution, cercles *associés*. Deux cercles associés sont tels que chacun coupe orthogonalement toute sphère contenant l'autre : cette propriété, invariante par inversion, appartient au couple : droite $B_A C_A$ et cercle Γ_A . Le plan de chaque cercle est donc orthogonal à l'autre cercle : les plans des deux cercles sont rectangulaires et se coupent suivant la ligne des centres; la sphère décrite sur Γ comme cercle diamétral est donc coupée par le plan ABC suivant un cercle Γ' orthogonal au cercle ABC. La construction générale de deux cercles associés en résulte : deux cercles orthogonaux ABC, Γ' sont tracés dans un même plan et l'on fait tourner Γ' de $\frac{\pi}{2}$ autour de la ligne des centres. On remarquera encore que la ligne des centres perce les deux cercles associés en quatre points formant une division harmonique.

III. Si l'on suppose

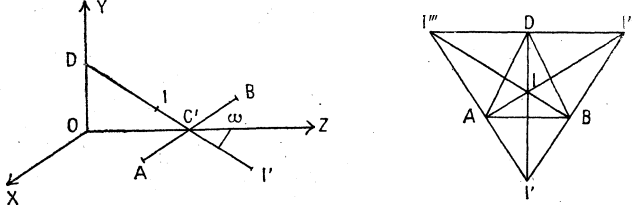
$$\langle a, d \rangle = \hat{A}, \quad \langle b, d \rangle = \langle a, c \rangle = \hat{B}, \quad \langle c, d \rangle = \langle a, b \rangle = \hat{C},$$

on peut remplacer les numérateurs des rapports (4) par AB, AC,

BC respectivement et l'on a $CD = BD = AD$ et réciproquement. Le lieu de D est donc l'axe du cercle ABC.

Soient O le centre du cercle ABC, C' le milieu de AB, OY l'axe du cercle ABC, OZ la droite OC' et OX la parallèle à AB menée par O; le triangle DAB est isocèle, les centres I et I' (fig. 2) situés

Fig. 2.



sur la bissectrice intérieure de \hat{D} décrivent un lieu plan dans le plan OYZ pris pour plan de la figure; les centres I'', I''' situés sur la bissectrice extérieure de \hat{D} décrivent un lieu plan dans OXY. Figurons, à côté de la figure perspective, le triangle DAB, en vraie grandeur, transporté dans le plan de la figure. C'est une propriété bien connue (nous la retrouverons au n^o IV dans le cas plus général d'un triangle non isocèle) que le cercle décrit sur II' comme diamètre passe en A et B, la tangente en A étant DA, et que $DA = DB = DI'' = DI'''$. L'axe du cercle AIBI' est la perpendiculaire élevée dans le plan de figure OYZ à II' en son milieu; elle coupe OC' en un point ω et l'on a

$$\omega A = \omega I = \omega I'.$$

On a donc

$$(6) \quad DA^2 = DI \cdot DI' = D\omega^2 - \omega I^2 = D\omega^2 - \omega A^2.$$

En retranchant DO^2 de DA^2 et de $D\omega^2$, on a donc

$$(7) \quad OA^2 = O\omega^2 - \omega A^2.$$

Ceci prouve que le triangle $OA\omega$ du plan OXZ est rectangle en A, $A\omega$ est donc la tangente en A au cercle ABC, et ω est le pôle de AB par rapport à ce cercle : ω est donc un point fixe et la longueur $\omega I = \omega A$ est constante. Le point I ou le point I' décrivent donc un cercle de centre ω et rayon $\sqrt{O\omega^2 - OA^2}$ dans le plan YOZ; ce cercle est associé au cercle ABC.

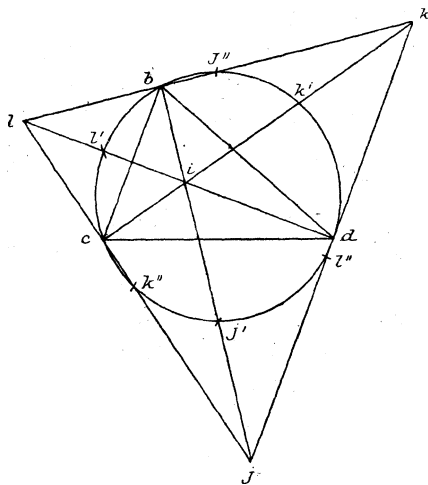
Puisque $DI'' = DI''' = DA$ et que $DA^2 = DO^2 + OA^2$, le lieu de I'' et I''' est dans le plan XOY l'hyperbole équilatère d'équation

$$(8) \quad x^2 - y^2 = OA^2.$$

Chaque plan DBC et DCA fournit un cercle ou une hyperbole équilatère analogues; les trois hyperboles sont égales, mais non les trois cercles.

IV, V, VI. Pour simplifier les notations, désignons les inverses, par rapport à A, de B, C, D respectivement par b, c, d . Figurons (*fig. 3*) les bissectrices intérieures et extérieures du triangle bcd ,

Fig. 3.



d'où les centres i, j, k, l des cercles inscrit ou exinscrits au triangle bcd ; ces six droites sont les transformées des bissecteurs des cercles (B), (C), (D); leur concourance, par groupes de trois, en chaque point i, j, k, l prouve déjà que les plans des bissecteurs de (B), (C), (D) se groupent par séries de trois plans ayant en commun une même droite : cette propriété, contenue dans celle de l'énoncé, nous servira plus loin dans l'autre méthode que nous amorcerons.

bij et bkl percent de nouveau le cercle bcd en des points j' et j'' : c'est une propriété bien connue que le cercle de centre j' et rayon $j'd$ passe en i, j, c, d et que le cercle de centre j'' et rayon $j''d$

passe en k, l, c, d ; les tangentes à ces cercles en d sont dj'' et dj' , de sorte que ces cercles sont les bissecteurs du cercle bcd et de la corde cd . Les cercles analogues de centre k', k'', l', l'' réunis aux deux précédents et aux six bissectrices nous fournissent l'ensemble des douze bissecteurs transformés; en chaque point i, j, k, l en passent six; en i , les trois bissectrices intérieures et les cercles de centre j', k', l' ; en j une bissectrice intérieure, deux extérieures, le cercle de centre j' et ceux de centre k'', l'' . Les points transformés I, J, K, L de i, j, k, l sont donc les points signalés par l'énoncé.

Il sera commode, pour ce qui suit, de regarder comme confondus en un seul point, transformé du pôle d'inversion, tous les points à l'infini du plan ou de l'espace. L'inversion de pôle A a donc transformé le tétraèdre ABCD en le quadrilatère ∞bcd ; on sait que $ib \cdot ij = ic \cdot ik = id \cdot il$; donc une seconde inversion de pôle i et puissance (négative) $ib \cdot ij$ transforme le quadrilatère ∞bcd en le quadrilatère $ijkl$; une troisième inversion de pôle A transforme le quadrilatère $ijkl$ en le tétraèdre IJKL. On a donc

$$(b, c) = (a, d) = (j, k) = (i, l),$$

$$(c, a) = (b, d) = (k, i) = (j, l),$$

$$(a, b) = (c, d) = (i, j) = (k, l).$$

Au lieu de deux inversions et un déplacement, nous avons même obtenu trois inversions consécutives dont la composition transforme ABCD en IJKL. D'autre part l'inversion intermédiaire transforme chaque bissectrice intérieure en elle-même, chaque cercle de centre j'', k'', l'' en lui-même, les cercles de centre j', k', l' en les bissectrices extérieures kl, lj, jk respectivement. Donc six cercles bissecteurs de (∞bcd) sont transformés chacun en lui-même (dans son ensemble, un point du cercle s'échangeant avec un autre point du même cercle) et les six autres se répartissent en trois couples de deux cercles s'échangeant mutuellement. Ceci constitue la réciprocity intime signalée au début : les bissecteurs de IJKL sont précisément ceux de ABCD. Les questions V et VI sont donc résolues.

On remarquera que, dans le système $ijkl$, les cercles jkl, ikl, ijl, ijk sont égaux entre eux et deux à deux symétriques par rapport à leur corde commune; chaque point i, j, k, l est orthocentre du triangle formé par les trois autres.

Si A, B, C, D sont dans un même plan, il est clair que I, J, K, L sont dans ce même plan; la réciprocity prouve que si I, J, K, L sont dans un même plan, A, B, C, D y sont aussi; de là résulte évidemment que si l'un ou l'autre des systèmes (A, B, C, D) ou (I, J, K, L) forme un véritable tétraèdre, l'autre en forme aussi un, inscrit dans la même sphère que l'autre.

La figure 3 peut être considérée comme perspective, sur le plan de cette figure, de la figure de l'espace. Le point b est à lui tout seul la perspective de AB; or b est situé au croisement de ij et lk , donc AB rencontre dans l'espace IJ et KL; AC, de même, IK et LJ; AD rencontre IL et JK; en vertu de la symétrie du rôle des six arêtes de ABCD, l'arête CD rencontre IJ et KL, l'arête BD rencontre IK et LJ, l'arête BC rencontre IL et JK [d'ailleurs il est très simple de remarquer que j''' désignant le point de rencontre de ij et cd , on a $j'''i \cdot j'''j = j'''c \cdot j'''d$ de sorte que les deux cercles de l'espace Acd et Aij se coupent en un même point situé sur le prolongement de Aj''' à la distance $\frac{j'''c \cdot j'''d}{j'''A}$ de j''' ; le transformé de ce point dans l'inversion de pôle A est le point commun à CD et IJ]. On remarquera que cd est partagée harmoniquement par ij et kl ; donc dans l'espace, les points où chaque arête de l'un des tétraèdres ABCD ou IJKL rencontrent deux arêtes de l'autre sont conjugués par rapport aux extrémités de cette arête (1).

Si nous formons le tableau

$$\begin{array}{cc} \text{AB} & \text{CD} \\ \text{A} & \text{DB} \\ \text{AD} & \text{BC} \end{array} \parallel \begin{array}{cc} \text{IJ} & \text{KL} \\ \text{IK} & \text{LJ} \\ \text{IL} & \text{JK} \end{array}$$

qui indique les deux arêtes de l'un des tétraèdres rencontrant une arête de l'autre, inscrite sur la même horizontale, on pourrait croire que ce tableau indique une correspondance unique (AI), (BJ), (CK), (DL) entre les sommets des deux tétraèdres; mais il suffit d'écrire à la place de la seconde colonne l'une quelconque

(1) On voit aisément, par des conservations de rapports anharmoniques, que IJ passe par le point, intérieur au segment CD, divisant le segment proportionnellement aux produits CA.CB et DA.DB.

des quatre suivantes,

$$\begin{array}{cccc} \text{IJ} & \text{KL} & \parallel & \text{JI} & \text{LK} & \parallel & \text{KL} & \text{IJ} & \parallel & \text{LK} & \text{JI} \\ \text{IK} & \text{LJ} & \parallel & \text{JL} & \text{KI} & \parallel & \text{KI} & \text{JL} & \parallel & \text{LJ} & \text{IK} \\ \text{IL} & \text{JK} & \parallel & \text{JK} & \text{IL} & \parallel & \text{KJ} & \text{LI} & \parallel & \text{LI} & \text{KJ} \end{array}$$

pour voir le résultat suivant, conforme à ce qui a déjà été remarqué à la fin du paragraphe I : les points A, B, C, D étant donnés, l'ensemble des quatre points (I, J, K, L) en résulte sans que les noms individuels I, J, K, L à attribuer aux points du groupe soient déterminés d'une façon unique; on a, comme on sait, 24 façons différentes de répartir les noms. Choisir les notations de façon que l'on ait $(a, b) = (i, j)$, $(a, c) = (i, k)$, $(a, d) = (i, l)$, ne laisse plus que quatre façons de répartir les noms : on choisit l'une des deux arêtes rencontrant AB et CD, ce sera l'arête IJ et sur cette arête il y a deux façons de disposer I et J aux extrémités; cela donne les dispositions (IJKL), (JILK), (KLIJ), (LKJI) correspondant à (ABCD).

Si l'ensemble des douze bissecteurs est tracé, sans que les huit points d'intersection aient été affectés d'un nom, prenons l'un deux et appelons-le A; en A choisissons l'un des trois couples orthogonaux qui s'y croisent et appelons B le nouveau point commun à ces deux cercles; C et D s'obtiennent ensuite par le même procédé appliqué aux deux autres couples. Les points restants sont I, J, K, L.

Nous avons indiqué plus haut trois inversions successives qui échangent (ABCD) avec (IJKL) ou inversement, et cela en *grandeur et position* : les deux inversions extrêmes ont pour pôle A; il existe huit façons d'échanger ainsi ABCD avec IJKL, en respectant l'ordre de correspondance AI, BJ, CK, DL, en faisant jouer à l'un des huit points A, B, C, D, I, J, K, L le rôle dévolu ici à A. D'autre part, au lieu d'échanger IJKL avec ABCD, on peut l'échanger avec BADC; commençons en effet comme précédemment par l'échange (IJKL), (*ijkl*) avec l'inversion de pôle A; prenons ensuite, non plus l'inversion de pôle *i*, mais celle de pôle *j* et puissance (positive) (*ji.jb*); (*ijkl*) devient ($b\infty dc$); la troisième inversion, de pôle A encore, donne (BADC). Ceci confirme les résultats indiqués plus haut sur les correspondances (ABCD), (IJKL) ou (BADC), (IJKL). En mettant bout à bout les deux systèmes de trois inversions chacun qui transforment (ABCD) en

(IJKL) puis (IJKL) en (BADC), on a un total de six inversions où les troisième et quatrième opérations se détruisent, de sorte qu'en *grandeur et position* on passe du tétraèdre (ABCD) au tétraèdre équivalent (BADC) par quatre inversions de pôle (A, i, j, A) successivement suivant le schéma

A	B	C	D	I	J	K	L
∞	b	c	d	i	j	k	l
i	j	k	l	∞	b	c	d
b	∞	d	c	j	i	l	k
B	A	D	C	J	I	L	K

Il est facile de déduire de là de nombreuses relations *métriques*. D'abord l'inversion de pôle A ayant donné b, c, d sans que les noms i, j, k, l aient été encore décernés aux centres des cercles inscrit ou exinscrits dans b, c, d , on peut placer i arbitrairement en l'un des quatre centres : pourvu que i et j soient toujours alignés avec b ; i, k avec c ; i, l avec d on aura toujours l'une des dispositions (IJKL), (JILK), (KLIJ), (LKJI) qui assurent la conservation des angles $(a, b) = (i, j), (a, c) = (i, k), (a, d) = (i, l)$. On peut, comme cela a été fait pour la figure 3, convenir de placer i au centre du cercle *inscrit*, ce qui fixe aussitôt j, k, l d'après le criterium indiqué à l'instant. Il est intéressant de montrer que, ce choix fait, si l'on fait une inversion de pôle B, ou C, ou D, ce sera la droite BJ ou CK ou DL qui donnera le centre du cercle *inscrit* au triangle $A_B C_B D_B$ ou $A_C B_C D_C$ ou $A_D B_D C_D$. Pour le voir clairement remarquons que nous pouvons disposer de la grandeur p_B , puissance d'inversion adoptée en B, de façon que le triangle $A_B D_B C_B$ soit égal au triangle bcd ; si nous transportons le solide constitué par ABCD et le triangle $A_B D_B C_B$ de façon que A_B recouvre b, D_B, c et C_B, d , les points B, A, D, C occupent des positions nouvelles que nous pouvons appeler A', B', C', D' , et regarder comme homologues de A, B, C, D; l'inversion de puissance p_B et de pôle A' transforme i, j, k, l en I', J', K', L' ; nous savons que le tétraèdre $A'B'C'D'$ (auquel sont supposés liés I', J', K', L') est égal au tétraèdre BADC (dont les sommets sont pris dans cet ordre), auquel sont supposés liés J, I, L, K. D'autre part on peut passer de $A'B'C'D'$ à BADC non plus par un déplacement, mais par une série d'inversions (de pôles successifs A', A pour obtenir

ABCD, puis de pôles A, i, j, A pour obtenir BADC; on peut donc garder seulement quatre inversions de pôle A', i, j, A); dans cette série d'inversions un élément quelconque lié à A'B'C'D' sur la sphère qui lui est circonscrite se trouve transporté finalement sur l'élément homologue de BADC; cette propriété, qui est vraie même pour tout l'espace supposé lié à A'B'C'D', se démontre aisément en remarquant que les deux sphères A'B'C'D' et BADC sont soumises à une correspondance ponctuelle biunivoque qui conserve à la fois les angles et les longueurs; donc J est l'homologue de I', I de J', L de K' et K de L'; BJ (ou ce qui revient au même A'I') passe bien par le centre du cercle *inscrit* à $A_B C D_B$. Écrivons les deux lignes

$$\begin{array}{cccccccc} A' & B' & C' & D' & I' & J' & K' & L' \\ B & A & D & C & J & I & L & K \end{array}$$

et voyons les égalités métriques obtenues par ce fait que les inversions (A, p_A) ou (A', p_B) effectuées sur $\infty bc dijkl$ donnent ABCDIJKL ou A'B'C'D'I'J'K'L'. On a

$$(9) \quad cd = CD \frac{p_A}{AC \cdot AD} = C'D' \frac{p_B}{A'C' \cdot A'D'} = CD \frac{p_B}{BD \cdot BC}.$$

On déduit de là les conditions

$$(10) \quad \frac{p_A}{AB \cdot AC \cdot AD} = \frac{p_B}{BA \cdot BC \cdot BD} = \frac{p_C}{CA \cdot CB \cdot CD} = \frac{p_D}{DA \cdot DB \cdot DC},$$

pour que les quatre triangles $B_A C_A D_A$, $A_B D_B C_B$, $D_C A_C B_C$, $C_D B_D A_D$ soient non seulement semblables mais tous égaux. Chacun des rapports (10) est égal à

$$(11) \quad \frac{bc}{BC \cdot AD} = \frac{bd}{BD \cdot AC} = \frac{cd}{CD \cdot AB}.$$

On a de même, en n'utilisant que les arêtes IJ et LK dont les longueurs restent inaltérées,

$$(12) \quad ij = IJ \frac{p_A}{AI \cdot AJ} = IJ \frac{p_B}{BI \cdot BJ}, \quad lk = LK \frac{p_A}{AL \cdot AK} = LK \frac{p_B}{BL \cdot BK}.$$

Des égalités (12) on déduit de nouvelles expressions des rapports $p_A : p_B : p_C : p_D$ et l'on a en particulier

$$(13) \quad \frac{p_A^2}{AI \cdot AJ \cdot AK \cdot AL} = \frac{p_B^2}{BI \cdot BJ \cdot BK \cdot BL} = \frac{p_C^2}{CI \cdot CJ \cdot CK \cdot CL} = \frac{p_D^2}{DI \cdot DJ \cdot DK \cdot DL}.$$

En comparant avec (10) on a les égalités remarquables

$$(14) \quad \frac{(AB.AC.AD)^2}{AI.AJ.AK.AL} = \frac{(BA.BC.BD)^2}{BI.BJ.BK.BL} = \frac{(CA.CB.CD)^2}{CI.CJ.CK.CL} = \frac{(DA.DB.DC)^2}{DI.DJ.DK.DL}.$$

En égalant diverses expressions du rapport $p_A : p_B$ déduites de (10) et (12) on a

$$(15) \quad \frac{AI.AJ}{BI.BJ} = \frac{AL.AK}{BL.BK} = \frac{AC.AD}{BC.BD},$$

qui font intervenir les distances des points A, B aux extrémités de l'arête opposée CD du tétraèdre ABCD et aux extrémités des arêtes IJ et LK qui rencontrent AB et CD. Les relations du type (15) entraînent immédiatement les relations (14). On peut écrire ensuite les relations analogues obtenues en permutant les rôles de A, B, C, D et I, J, K, L.

Chaque rapport (15) est égal au rapport dans lequel le segment AB est divisé par IJ ou KL.

Nous avons ainsi rattaché l'étude de la figure aux propriétés du groupe des inversions et déplacements. Les divers tétraèdres déduits de ABCD par les opérations de ce groupe offrent deux configurations *canoniques* : $bcd\infty$ obtenue par une inversion de pôle A, B, C ou D et $ijkl$ par une inversion de pôle I, J, K, L. Nous avons reconnu pour une configuration canonique telle que $\infty bcdijkl$ l'intérêt d'une inversion de pôle i, j, k, l ; à signaler qu'une inversion de pôle b par exemple et puissance $bi.bj$ remplace cette configuration (dans son ensemble) par la configuration symétrique relative à bij .

A signaler aussi que la construction de I, J, K, L quand A, B, C, D sont donnés (ou inversement de A, B, C, D quand I, J, K, L sont donnés) se fait beaucoup plus simplement par la construction de i, j, k, l que par des constructions directes dans l'espace; la solution présentée ici remplace elle aussi des théorèmes de l'espace par des théorèmes du plan.

VII. Cette partie se résout comme II : l'inversion de pôle A conduit à des points D_A, I_A, J_A, K_A, L_A engendrant chacun un cercle d'axe $B_A C_A$; chaque point D, I, J, K, L engendre un cercle associé au cercle ABC.

VIII. L'inversion de pôle A donne la figure $bcdijkl$ qui, dans les conditions de l'énoncé, pivote autour de bc ; donc les points où BC est coupée par IL ou JK sont fixes : en effet bc est une droite fixe du plan ABC et les perspectives sur cette droite fixe, à partir de A, des points en jeu sont fixes. Pour la même raison, A, B, C jouant le même rôle, CA est coupée en des points fixes par IK et LJ, et AB par IJ et KL; donc le plan JKL pivote autour de la droite fixe joignant les intersections de BC et JK d'une part, de CA et LJ d'une autre, AB et KL de l'autre. Le cercle JKL et le cercle ABC se coupent aussi en deux points fixes, ayant pour perspective les points fixes où bc est coupée par le cercle jkl ; on a ainsi deux nouveaux points de la droite autour de laquelle pivote le plan JKL. Mêmes résultats pour les autres plans IKL, IJL, IJK. Le raisonnement employé prouve aussi que les droites IJ, KL engendrent chacune un cône du second degré ayant son sommet sur AB et s'appuyant, le premier sur les cercles, associés au cercle ABC, lieux de I et J, le second sur les cercles analogues lieux de K et L. Mêmes résultats pour les droites IK, JL ou IL et JK.

Remarque. — Soient \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} les sphères orthogonales à la sphère ABCD le long des cercles (A), (B), (C), (D) respectivement; \bar{A} et \bar{B} passent toutes deux en C et D; soient (AB), (AB)' leurs centres de similitude directe ou inverse; les centres de \bar{A} et \bar{B} sont tous deux dans le plan tangent en C, ou en D, à la sphère ABCD, de sorte que la ligne des centres α , β de \bar{A} , \bar{B} est la droite conjuguée de CD; α est d'ailleurs pôle de BCD et β de ACD. L'inversion de pôle (AB) et puissance $(\overline{AB})C^2$ change la sphère ABCD en elle-même, échange \bar{A} et \bar{B} , donc les deux cercles (A) et (B) : mais alors le plan polaire de (AB) coupe la sphère ABCD suivant l'un des bissecteurs de (A) et (B). Propriétés analogues pour (AB)', la sphère de centre (AB)' et de rayon $(\overline{AB})'C$. Les propriétés établies dans cette solution prouvent que les quatre sphères \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , prises deux à deux, ont douze centres de similitude répartis, comme on sait, en huit plans par groupes de six : ces huit plans sont les plans tangents en A, B, C, D, I, J, K, L à sphère ABCD. Si l'on considère un groupe de trois sphères \bar{A} , \bar{B} , \bar{C}

par exemple, le plan de leurs centres est, d'après une remarque déjà faite, le plan tangent en D à ABCD; ce plan contient les quatre axes de similitude des trois sphères \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} ; le plan tangent, autre que le plan tangent en D, mené à la sphère ABCD par l'un de ces quatre axes est le plan tangent à la sphère ABCD en l'un des quatre points I, J, K, L. Les sphères \overline{I} , \overline{J} , \overline{K} , \overline{L} forment un système réciproque de \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} , \overline{D} . On aurait pu baser la solution sur l'étude directe des sphères \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} , \overline{D} ; mais les centres de similitudes ou axes de similitude ne sont pas des éléments invariants dans une inversion; c'est ce qui nous a fait préférer la méthode du texte.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2466.

(1924, p. 314.)

Soit, sur la sphère de rayon 1, la courbe de Viviani qui a pour équation

$$\omega = \theta,$$

ω et θ étant respectivement la longitude et la latitude d'un point M de cette courbe. Prouver que la sous-normale sphérique au point M (c'est-à-dire un arc d'équateur limité au méridien de M et au grand cercle normal en M à la courbe) est égale à ω .

G. DARD.

SOLUTION.

Par l'AUTEUR.

Menons le grand cercle normal Mi et le grand cercle tangent Mt à la courbe au point M (i et t sur l'équateur). Le triangle sphérique rectangle Mie dont le côté ie définit la sous-normale sphérique, donne

$$\text{tang } ie = \sin Me \cdot \widehat{\text{tang } iMe},$$

$$\text{tang (sous-normale)} = \sin \theta \cdot \text{tang } \varphi.$$

Or on a, φ étant l'angle de la courbe avec le parallèle de M,

$$\text{tang } \varphi = \frac{d\theta}{r d\omega} = \frac{d\theta}{\cos \theta d\omega}$$

(r , rayon du parallèle).

Appliquée à la courbe

$$\theta = \omega,$$

elle donne

$$\text{tang } \varphi = \frac{1}{\cos \theta}.$$

Donc

$$\text{tang}(\text{sous-normale}) = \text{tang } \theta = \text{tang } \omega,$$

$$\text{sous-normale} = \omega.$$

Remarque. — La courbe de Viviani possède, en outre, la propriété d'être également inclinée sur les parallèles et sur la ligne des pôles. Autrement dit, on a constamment

$$\varphi = \gamma,$$

γ étant l'angle de la tangente à la courbe avec la ligne des pôles prise pour axe Oz .

On part de

$$\cos \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Or

$$z = \sin \theta, \quad ds = \sqrt{d\theta^2 + d\omega^2 \cos^2 \theta}.$$

En tenant compte de l'expression de $\text{tang } \varphi$, on obtient

$$\cos \gamma = \cos \theta \sin \varphi.$$

Appliquée à la courbe de Viviani, elle donne

$$\cos \gamma = \frac{1}{\text{tang } \varphi} \sin \varphi = \cos \varphi,$$

$$\gamma = \varphi.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. ÉMILE BALLY.

Autrement dit :

Le plan normal en un point de la courbe est le symétrique, relatif au méridien de ce point, du plan du grand cercle qui passe en ce point et au point-origine (point double) de la courbe.

Si A est le point-origine sur le cercle équatorial de centre O , il résulte de la définition que les projections orthogonales du point-origine et d'un point arbitraire M de la courbe sur la trace équatoriale du méridien de ce point se confondent en un même point M' .

Le lieu des projections orthogonales de M sur le plan équatorial est donc le cercle (A) de ce plan décrit sur OA comme diamètre, et la courbe est l'intersection de la sphère avec le cylindre qui a pour section droite ce cercle (A) .

Le plan normal en M à la courbe passe au centre O de la sphère, et sa trace équatoriale, normale à la projection orthogonale de la tangente en M, est la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en M' au cercle (A) (parallèle à la médiane principale du triangle rectangle OM'A), c'est-à-dire la symétrique du rayon OA relative au rayon OM', trace équatoriale du méridien de M.

Autres solutions de MM. DE CAUMONT, G. ROY, R. SAGAZAN.

2490.

(1919, p. 279.)

On donne à un segment AB de longueur constante toutes les positions, dans un plan fixe, telles que les points A, B, et deux points fixes A₀ et B₀ du plan soient sur un cercle. Démontrer que l'on peut trouver, d'une infinité de manières, un couple de points M, N, invariablement liés au segment AB et un couple de points fixes M₀, N₀, tels que les points M, N, M₀, N₀ soient sur un cercle pour toutes les positions du segment AB satisfaisant à la condition indiquée.

Les points M, N sont répartis sur deux droites rectangulaires et de même les points M₀, N₀. R.-B.

SOLUTION.

Par l'AUTEUR.

Soient I, I₀ les milieux respectifs de AB et A₀B₀, P le point de rencontre de AB et A₀B₀. On a

$$PA \cdot PB = PA_0 \cdot PB_0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\overline{PI}^2 - \overline{IA}^2 = \overline{PI_0}^2 - \overline{I_0A_0}^2,$$

ou

$$\overline{PI}^2 - \overline{PI_0}^2 = \overline{IA}^2 - \overline{I_0A_0}^2$$

M, N étant deux points quelconques marqués sur AB et tels que I soit le milieu du segment MN, on peut leur faire correspondre deux points fixes M₀ et N₀, appartenant à A₀B₀ et tels que I₀ soit le milieu de M₀N₀, par la relation

$$\overline{IM}^2 - \overline{IM_0}^2 = \overline{IA}^2 - \overline{IA_0}^2.$$

On aura donc constamment

$$\overline{PI}^2 - \overline{PI_0}^2 = \overline{IM}^2 - \overline{IM_0}^2,$$

ce qui se ramène à

$$PM \cdot PN = PM_0 \cdot PN_0.$$

Les quatre points M, N, M₀, N₀ ne cessent donc pas d'être sur un cercle.

Soit ensuite ω le point de rencontre des médiatrices de AB et A₀B₀.

On a évidemment

$$\overline{\omega I}^2 - \overline{\omega I_0}^2 = \overline{PI_0}^2 - \overline{PI}^2 = \overline{I_0 A_0}^2 - \overline{IA}^2.$$

En répétant le raisonnement qui précède, on voit que si l'on marque sur ωI deux points M' , N' , tels que I soit le milieu de $M'N'$, on peut leur faire correspondre sur ωI_0 deux points fixes M'_0 et N'_0 tels que l'on ait

$$\omega M' \cdot \omega N' = \omega M'_0 \cdot \omega N'_0.$$

Les quatre points M' , N' , M'_0 , N'_0 sont donc encore sur un cercle.

Les droites rectangulaires dont il est question dans l'énoncé sont ainsi AB et sa médiatrice, $A_0 B_0$ et sa médiatrice.

On laisse au lecteur le soin de reconnaître qu'il n'existe pas d'autres moyens de déterminer des couples satisfaisants M , N et M_0 , N_0 .

2418.

(1919, p. 240.)

On sait que le lieu des pôles d'une droite l , par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel, est une droite l' . Démontrer que les couples de droites l , l' , qui sont perpendiculaires entre elles, enveloppent une courbe de la troisième classe.

En particulier, dans le cas des paraboles inscrites à un triangle, cette enveloppe est une hypocycloïde à trois rebroussements.

M.-F. EGAN.

SOLUTION.

Par M. H. DUMAS.

Les droites l , l' sont conjuguées par rapport à toutes les coniques du faisceau tangentiel; si elles sont perpendiculaires, elles sont conjuguées par rapport à la conique formée par les points cycliques I et J .

Si le faisceau donné n'est pas formé de coniques homofocales, ce faisceau détermine avec les points I et J un réseau tangentiel R . Les droites l et l' sont conjuguées par rapport à toutes les coniques de ce réseau; elles enveloppent donc sa cayleyenne (ou jacobienne tangentielle) qui est une courbe de troisième classe.

Si le faisceau est formé de paraboles, la droite de l'infini tangente à toutes ces paraboles et tangente double de la conique (IJ) est tangente à toutes les coniques du réseau; elle est donc tangente double de la cayleyenne et l'on sait que les deux points de contact sont les points formant la conique admettant cette droite pour bitangente, c'est-à-dire ici les points cycliques.

L'enveloppe est une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux deux points cycliques: c'est une hypocycloïde à trois rebroussements.

Autres solutions par l'Auteur et MM. FAUCHEUX, HARMIGNIES et G. ROY.

2483.

(1925-1926, p. 23.)

On pose

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Démontrer que

$$I_0 I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

A. LABROUSSE.

2485.

(1925-1926, p. 24.)

On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2k}}},$$

n et k étant des entiers. Mettre $I_0, I_1, \dots, I_{2k-1}$ sous forme de limites de produits et démontrer les relations

$$I_0 I_k = 2 I_1 I_{k+1} = 3 I_2 I_{k+2} = \dots = (k-1) I_{k-2} I_{2k-2} = \frac{\pi}{2k} \quad (1).$$

A. LABROUSSE.

SOLUTIONS

Par M. E. LAINÉ.

On peut supposer que k et n sont des nombres positifs quelconques ($2k > 0, n \geq 0$).

Posons

$$x = t^{\frac{1}{2k}};$$

on aura

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2k} \int_0^1 t^{\frac{n+1}{2k}-1} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2k} \frac{\Gamma \frac{n+1}{2k} \Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma \left(\frac{n+1}{2k} + \frac{1}{2} \right)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2k} \frac{\Gamma \frac{n+1}{2k}}{\Gamma \frac{n+1+k}{2k}}. \end{aligned}$$

De même

$$I_{n+k} = \frac{\sqrt{\pi}}{2k} \frac{\Gamma \frac{n+1+k}{2k}}{\Gamma \left(\frac{n+1}{2k} + 1 \right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{n+1} \frac{\Gamma \frac{n+k+1}{2k}}{\Gamma \frac{n+1}{2k}}.$$

On en tire

$$I_n I_{n+k} = \frac{\pi}{2k(n+1)}.$$

(1) Il faut rectifier ainsi l'énoncé publié précédemment.

Pour $k = 2$, $n = 0$, on a bien

$$I_0 I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

On voit aussi qu'il suffirait de supposer $n > -1$.

Remarque. — Les intégrales eulériennes se prêtent de la façon la plus naturelle à l'établissement de relations du genre indiqué dans les questions précédentes. Signalons, comme exemple, l'identité

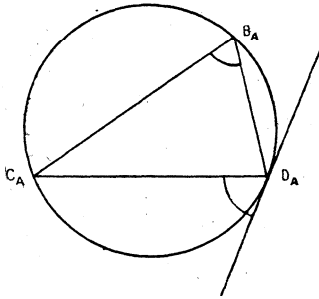
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \cos \frac{\pi}{n} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}},$$

où n désigne une constante quelconque supérieure à 2.

Autre solution par J. DE CAUMONT.

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. C.23. — Une circonférence (Γ) de rayon R tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un diamètre vertical fixe Ox ; un cerceau (C) (circonférence matérielle homogène) de masse M et de rayon r ($r < R$) est assujéti à rouler sans glisser à



l'intérieur de (Γ) en restant constamment dans le plan de (Γ); cette dernière liaison est réalisée sans frottement en matérialisant le plan de (Γ) par deux feuillets plans, infiniment rapprochés, entre lesquels le cerceau est inséré.

On pose $(\widehat{Ox, OJ}) = \theta, (\widehat{GJ, GA}) = \varphi$, G étant le centre du cerceau, J son point de contact avec (Γ) , A un point fixe du cerceau. On prendra comme paramètre θ .

1° Déterminer les positions d'équilibre relatif du cerceau en indiquant celles qui sont stables;

2° Calculer la force vive absolue $2T$ du cerceau en fonction de θ et de θ' ;

3° Écrire l'équation du mouvement du cerceau et en déterminer une intégrale première;

4° Écrire cette intégrale première en supposant que pour $t = 0$, $\theta_0 = 0$, θ'_0 étant donnée, poser $\cos \theta = u$ et montrer que u se détermine par une quadrature. Discuter l'allure du mouvement selon la valeur de θ'_0 , en préciser les diverses circonstances (le mouvement est-il périodique? le cerceau peut-il boucler la boucle? etc.);

5° Calculer en fonction de θ , θ' , θ'' :

α . La réaction que (Γ) exerce au point J sur le cerceau, en donnant sa composante normale (selon JO) et sa composante tangentielle (selon JT);

β . La résultante des réactions normales du plan de (Γ) sur le cerceau.

ÉPREUVE PRATIQUE. C. 24. — On considère deux sphères identiques, très petites, qu'on assimile à des points M et M_1 de même masse m ; ces sphères sont pesantes et sont soumises à la résistance de l'air, qu'on suppose proportionnelle à leur vitesse \vec{v} :

$$\vec{R} = -mg \frac{1}{k} \vec{v},$$

le coefficient positif k ayant la même valeur pour les deux sphères. Soit Ox une verticale descendante.

1° On abandonne en O l'une des sphères sans vitesse initiale; on constate, qu'au bout d'un temps assez long, sa vitesse tend vers une limite w ($w > 0$); calculer k en fonction de w .

2° A l'instant $t = 0$, on lance la sphère M , du point O avec une vitesse ascendante v_0 ($v_0 < 0$); puis à un instant $t = \tau$ ($\tau > 0$), on lance la sphère M_1 du même point O avec la même vitesse v_0 . Donner l'expression explicite des abscisses x , x_1 et des vitesses v , v_1 des sphères M et M_1 en fonction du temps;

3° A quelle condition doit satisfaire τ pour qu'il y ait un choc entre les deux sphères?

4° En supposant que τ est l'instant précis où la première sphère est parvenue à son maximum d'altitude, montrer qu'il y aura choc;

calculer l'instant θ du choc. En supposant les deux sphères parfaitement élastiques, calculer leurs vitesses v, v_1 et v', v'_1 immédiatement avant et immédiatement après le choc.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — 1° En supposant $w = 10$ m : sec, calculer k (en C. G. S.); en déduire la valeur de la résistance (en kilogrammes force) pour $v = 5$ m : sec, en supposant que $m = 200^5$; on prendra $g = 980$ C. G. S.

2° En supposant $v_0 = -5$ m : sec, calculer les quantités $\tau, \theta, v, v_1, v', v'_1$ définies au paragraphe 4.

On donnera trois chiffres exacts.

(Lille, juin 1925)

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. C. 25 — Intégrer le système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xz^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y}(1+z+zx^2).$$

Trouver l'expression la plus générale de la fonction $F(x, y, z)$ telle que la solution du système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xz^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = F(x, y, z)$$

dépende d'une constante arbitraire.

C. 26. — z désignant une variable complexe, déterminer les points singuliers de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z'-2)^2(z^2+z+1)}.$$

Calculer la valeur de l'intégrale $\int f(z) dz$ le long des cercles de centre O ne passant par aucun point singulier.

ÉPREUVE PRATIQUE. C. 27. — Déterminer les lignes de courbure de la surface représentée par les équations

$$x = (au + bv - 2a) \sqrt{u},$$

$$y = (au + bv - 2b) \sqrt{v},$$

$$z = (au + bv) \sqrt{1-u-v},$$

où a et b désignent deux constantes données.

C. 28. — On considère le quadrilatère curviligne A limité par les courbes

$$\begin{aligned} y &= ae^x, & y &= a'e^x, \\ y &= be^{-x}, & y &= b'e^{-x}. \end{aligned}$$

Indiquer un changement de variables permettant de simplifier le calcul de l'intégrale double I qui représente l'aire de A, et calculer I à l'aide de ce changement de variables. (Caen, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. I. — Déterminer la fonction z des deux variables x, y de manière que l'expression

$$\frac{z dx - dy}{zy - x}$$

soit une différentielle totale exacte. Donner l'expression de la fonction z qui se réduit pour $y = 0$ à $\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

II. — Quels sont les points singuliers de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} e^{\frac{1}{z}}$. Nature de ces points singuliers. Périodes de l'intégrale

$$\int_{M_0}^{M_1} f(z) dz,$$

le chemin d'intégration $M_0 M_1$ ne passant par aucun point singulier.

III. — En remarquant que $y = \tan x$ est une solution particulière de l'équation

$$y'' \cos^2 x - 2y = 0,$$

trouver l'intégrale générale de cette équation.

Intégrer l'équation

$$z' \cos x + z^2 + z \sin x - 2 = 0.$$

SOLUTION. I. — z doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 - 1 = 0,$$

dont la solution générale est donnée par la formule

$$\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} = (x+y)f(x^2-y^2),$$

où f est une fonction arbitraire.

La fonction z qui se réduit pour $y = 0$ à $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ est $\frac{1+(x-y)^2}{1-(x-y)^2}$.

II. — La fonction $f(z)$ admet $z = 0$ pour point singulier essentiel et

$z = 1$ pour *pôle double*. Les périodes relatives à ces points sont respectivement

$$2\pi ei, \quad -2\pi ei,$$

III. — La solution générale de l'équation $y'' \cos^2 x - 2y = 0$ est

$$y = a \operatorname{tang} x + b (1 + x \operatorname{tang} x),$$

où a et b sont deux constantes arbitraires. On en déduit la solution générale de l'équation

$$z' \cos x + z^2 + z \sin x - 2 = 0.$$

Cette solution est donnée par la formule

$$z = \frac{y'}{y} \cos x = \frac{1 + C (\sin x \cos x + x)}{\sin x + C (\cos x + x \sin x)}$$

où C est une constante arbitraire.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la surface définie par les expressions suivantes des coordonnées x, y, z en fonction de deux paramètres u, v :

$$x = \frac{v}{\operatorname{ch} u}, \quad y = \frac{uv}{\operatorname{ch} u}, \quad z = \operatorname{arc} \operatorname{tang} v.$$

1° Donner les expressions des dérivées partielles p, q de z par rapport à x, y en fonction des paramètres u, v .

2° Déterminer les lignes asymptotiques de la surface.

SOLUTION. — 1° En formant les expressions de $\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, dz$ et éliminant du, dv entre les trois équations obtenues, on obtient

$$dz = \frac{\operatorname{ch} u - u \operatorname{sh} u}{1 + v^2} dx + \frac{\operatorname{sh} u}{1 + v^2} dy,$$

ce qui met en évidence les expressions cherchées de p, q .

2° Les lignes asymptotiques sont données par l'équation différentielle

$$dp \, dx + dq \, dy = 0$$

qui se réduit à

$$du^2 - \frac{2}{1 + v^2} dv^2 = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle est donnée par la formule

$$v = \operatorname{sh} \left(\pm \frac{u}{\sqrt{2}} + C \right),$$

où C est une constante arbitraire.

(Caen, novembre 1925.)



SUR UN THÉORÈME DE M. MARCEL RIESZ ;

PAR A. STOYANOFF.

Le théorème dont nous donnons une démonstration ci-dessous est dû à M. Marcel Riesz. Il se propose de le publier plus tard avec d'autres théorèmes analogues. Comme la démonstration que M. Riesz a bien voulu nous communiquer diffère complètement par la marche suivie de la nôtre, nous croyons intéressant de la publier ici.

THÉORÈME. — *Étant donnée une équation algébrique $f(x) = 0$, dont les racines x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 3$) sont supposées réelles et distinctes; désignant par d la plus petite des différences*

$$d_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1);$$

par $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ les racines de l'équation $f'(x) = 0$ (lesquelles sont également, d'après le théorème de Rolle, toutes réelles et distinctes) et par Δ la plus petite des différences

$$\Delta_k = \xi_{k+1} - \xi_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-2),$$

on a

$$(1) \quad \boxed{\Delta > d}.$$

[Nous supposons, pour fixer les idées,

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \dots < x_k < \xi_k < x_{k+1} < \xi_{k+1} < x_{k+2} < \dots < \xi_{n-1} < x_n.]$$

Pour démontrer que $\Delta > d$, il suffit de démontrer que tous les Δ_k sont $> d$, c'est-à-dire que

$$(1') \quad \xi_{k+1} - \xi_k > d \quad \text{ou bien} \quad \xi_k + d < \xi_{k+1}.$$

Deux cas seulement sont à considérer : a. $\xi_k + d \leq x_{k+1}$ et b. $\xi_k + d > x_{k+1}$.

Dans le premier cas l'inégalité (1') est évidemment satisfaite, puisque $x_{k+1} < \xi_{k+1}$.

Dans le deuxième cas, $\xi_k + d$ et ξ_{k+1} sont tous deux compris entre x_{k+1} et x_{k+2} . Comme dans cet intervalle la fonction

$$F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}$$

décroit constamment depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$ (en s'annulant pour $x = \xi_{k+1}$), il s'ensuit que pour démontrer que $\xi_k + d < \xi_{k+1}$, il suffit de montrer que

$$(2) \quad F(\xi_k + d) > \mathcal{F}(\xi_{k+1}) = 0.$$

Démonstration. — On a

$$F(\xi_k + d) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_k + d - x_i}.$$

Nous avons aussi

$$0 = F(\xi_k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_k - x_i}.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\begin{aligned} F(\xi_k + d) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_k + d - x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_k - x_i} = \frac{1}{\xi_k + d - x_1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_k + d - x_{i+1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_k - x_i} - \frac{1}{\xi_k - x_n} \\ &= \frac{1}{\xi_k + d - x_1} + \frac{1}{x_n - \xi_k} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i - d}{(\xi_k - x_i)(\xi_k + d - x_{i+1})} \end{aligned}$$

qui est > 0 ,

puisque les deux premiers termes sont *toujours* positifs et que dans les $n - 1$ autres termes les numérateurs $x_{i+1} - x_i - d = d_i - d$ sont ≥ 0 par hypothèse, et les dénominateurs sont positifs (parce que les deux facteurs $\xi_k - x_i$ et $\xi_k + d - x_{i+1}$ ont les mêmes signes quel que soit i).

Comme l'inégalité (2) est démontrée, il en suit la vérité de (1') et, par conséquent, de (1).

DÉMONSTRATION DE M. M. RIESZ. — *Nous sommes heureux de pouvoir insérer ici cette démonstration, extraite d'une lettre de M. M. Riesz à M. Stoyanoff:*

Stockholm, le 8 mai 1924.

« Pour que $f(x)$ et $g(x)$ aient toutes leurs racines réelles et se séparant, il faut et il suffit que $kf(x) + lg(x)$ ait toutes ses racines réelles pour toutes les valeurs réelles des constantes k et l . Ce théorème important est bien connu. On en trouve une démonstration (due à M. Kakeya) dans un travail de M. Fujiwara (*Tôhoku Math. Journ.*, 9, 1916, p. 102). Voici une démonstration bien plus simple.

» Il faut seulement démontrer que la condition est suffisante. La condition étant remplie, $f(x)$ et $g(x)$ auront évidemment toutes leurs racines réelles; il faut encore démontrer que ces racines se séparent. Or, il est clair que $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ne pourra être réel ni dans le demi-plan supérieur ni dans le demi-plan inférieur. En effet, si $h(x)$ était réel et $= k$ pour une valeur x non réelle, la fonction $f(x) - kg(x)$ aurait une racine (non réelle) en x . Cela étant, la partie imaginaire de $h(x)$ devra être de signe constant dans les deux demi-plans. En s'approchant alors des pôles de $h(x)$, on voit que tous les résidus de $h(x)$ devront être de même signe. En désignant alors par a et b deux racines consécutives de $g(x)$, $h(a+t)$ et $h(b-t)$ seront pour des valeurs assez petites de t de signes opposés. C'est-à-dire que $f(x)$ change de signe entre deux racines consécutives de $g(x)$.

» Du théorème ci-dessus, on conclut immédiatement : Si $f(x)$ et $g(x)$ ont toutes leurs racines réelles et se séparant, il en sera de même de $f'(x)$ et $g'(x)$.

» En effet, $kf(x) + lg(x)$ ayant toutes ses racines réelles, il en sera de même de $kf'(x) + lg'(x)$.

» En désignant maintenant par d la plus petite différence entre deux racines consécutives de $f(x)$ pour que les racines de $f(x+h)$ et $f(x)$ se séparent, il faut et il suffit évidemment que le module de h soit inférieur à d . En combinant ceci avec le résultat précédent, le théorème en résulte.

» On démontre de la même façon le théorème pour $f(x) + kf'(x)$. En réalité, encore ce théorème est un cas très particulier d'un théorème très général dont l'exposition me prendrait trop de temps. Ce théorème rentre dans un corps de théorèmes que je publierai en collaboration avec M. Stridsberg. »

[I1]

SUR UN PROBLÈME RELATIF AUX NOMBRES INCOMMENSURABLES ;

PAR RAOUL BRICARD.

1. Dans la théorie qu'il a faite d'un certain jeu mathématique, W. A. Wythoff ⁽¹⁾ établit la curieuse proposition suivante, dont la démonstration est reproduite dans les *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* de W. Ahrens ⁽²⁾ :

Désignons par $[x]$, suivant la notation de Gauss, la partie entière d'un nombre non entier x , c'est-à-dire le nombre entier immédiatement inférieur à x . Posons

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}),$$

et formons les deux suites infinies

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} & [\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \dots, \\ \text{(B)} & [\beta], [2\beta], [3\beta], \dots \end{array}$$

Chaque nombre entier positif figure une fois et une fois seulement dans l'ensemble des suites (A) et (B).

2. Proposons-nous de trouver de la manière la plus générale un système de deux nombres positifs incommensurables α et β jouissant de la même propriété que les deux nombres particuliers indiqués ci-dessus.

Soit p un entier positif quelconque. Posons

$$m = [p\alpha],$$

de sorte qu'on a

$$\text{(1)} \quad m < p\alpha < m + 1.$$

⁽¹⁾ W. A. WYTHOFF, *A modification of the game of Nim*, 1906 (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, 2^e série, t. VII, 1907, p. 199-202).

⁽²⁾ Deuxième édition, p. 84-88.

Il existe un entier q tel qu'on ait

$$(2) \quad q\beta < m < (q+1)\beta.$$

Considérons alors les quatre suites, dont les deux premières sont finies et les deux dernières infinies,

$$(a) \quad [\alpha], [2\alpha], \dots, [p\alpha];$$

$$(b) \quad [\beta], [2\beta], \dots, [q\beta];$$

$$(a') \quad [(p+1)\alpha], [(p+2)\alpha], \dots,$$

$$(b') \quad [(q+1)\beta], [(q+2)\beta], \dots$$

Les (a) et les (b) sont au plus égaux à m , et l'on a en particulier $[p\alpha] = m$. Les (a') et (b') sont tous supérieurs à m . En effet, ils lui sont au moins égaux, et si α et β sont des nombres satisfaisants, l'égalité ne peut avoir lieu, puisque dans l'ensemble des nombres (A) et (B) on a déjà le terme $[p\alpha]$ qui est égal à m .

Par conséquent, tout entier $\leq m$ doit figurer une fois et une fois seulement dans les suites (a) et (b), et l'on a

$$(3) \quad p + q = m.$$

Cela posé, on tire de (1) et (2)

$$(4) \quad \frac{m}{\alpha} < p < \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{\alpha},$$

$$(5) \quad \frac{m}{\beta} - 1 < q < \frac{m}{\beta},$$

et en ajoutant, tenu compte de (3),

$$m \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) - 1 < m < m \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\alpha},$$

d'où

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{m} < 1 < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{am}.$$

Faisons maintenant croître indéfiniment le nombre p ; m tend aussi vers l'infini. Les membres extrêmes de la double inégalité précédente tendent tous deux vers $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$. Donc

$$(6) \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Telle est la condition nécessaire à laquelle doivent satisfaire les nombres incommensurables α et β . Je dis qu'elle est suffisante.

Montrons d'abord que les suites (A) et (B) ne peuvent avoir de terme commun. En effet, dans l'hypothèse contraire, il existerait des entiers m, p, q , tels que l'on eût

$$(7) \quad m + x = p\alpha,$$

$$(8) \quad m + y = q\beta,$$

avec

$$(9) \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

bornes exclues, α et β étant incommensurables.

Ajoutons (7) et (8) multipliées respectivement par $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$. Il vient, tenu compte de (6),

$$m + \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = p + q,$$

d'où

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = p + q - m.$$

Par conséquent $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}$ serait entier. Or, il résulte de l'égalité (6) et des inégalités (9) que la valeur de cette expression est comprise entre 0 et 1, bornes exclues. Il est donc établi que tous les nombres (A) et (B) sont distincts.

Cela vu, récrivons les égalités (1) et (2) et les (4) et (5) qui en résultent. On tire de ces dernières par addition, et tenu compte de (6),

$$m - 1 < p + q < m + \frac{1}{\alpha},$$

d'où

$$p + q = m.$$

Il en résulte que dans les suites (a) et (b) dont les termes, en nombre total $p + q$, sont tous différents, chacun des nombres 1, 2, ..., m se rencontre une fois et une seule, ce qui achève la démonstration, puisque m peut être pris aussi grand qu'on le veut.

On vérifie aisément que les nombres de M. Wythoff satisfont bien à la relation (6).

3. Ce qui précède constitue une extension facile du résultat de M. Wythoff. Mais je tiens à signaler un problème plus général, qui me paraît beaucoup plus ardu, et que voici : à quelles condi-

tions nécessaires et suffisantes doivent satisfaire les nombres incommensurables positifs α et β pour que les entiers (A) et (B) soient tous distincts (on n'exige plus qu'ils reproduisent la suite complète des nombres naturels).

On obtient un système satisfaisant en assujettissant α et β à la relation

$$(10) \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{k},$$

k étant un entier positif quelconque. La démonstration est une extension immédiate de celle qui a été donnée ci-dessus, pour $k = 1$: en effet, supposé que l'on ait les égalités (7) et (8) et les inégalités (9), on tire de (7), (8) et (10)

$$m \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = \frac{m}{k} + \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = p + q,$$

d'où

$$k \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} \right) = k(p + q) - m,$$

égalité impossible, car le second membre est entier et le premier compris entre 0 et 1.

Mais rien ne prouve que l'on ait ainsi la solution complète.

On peut encore se poser un problème plus général. Soient α et β deux nombres incommensurables positifs quelconques; m étant un entier positif quelconque, il existe deux entiers p_m et q_m tels que l'on ait

$$m + x_m = p_m \alpha,$$

$$m + y_m = q_m \beta,$$

avec

$$0 < x_m < \alpha, \quad 0 < y_m < \beta.$$

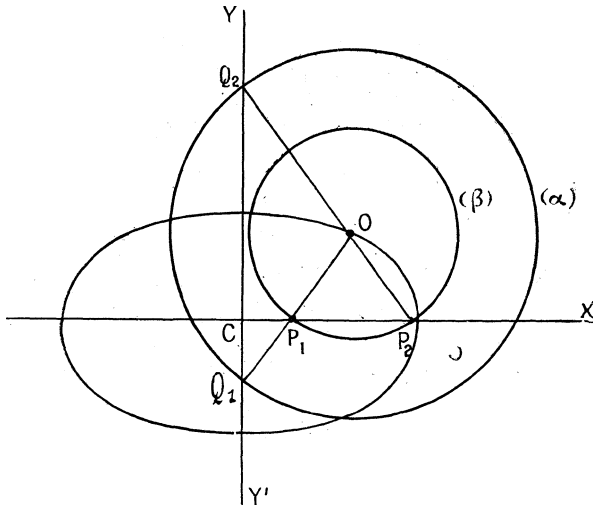
Ne conservons que les nombres m pour lesquels $x_m < 1$ (il faut bien entendu supposer $\alpha > 1$, sans quoi le problème ne se pose pas). *Quelle est alors la borne inférieure des nombres y_m ?* On vient de voir que si la relation (10) est satisfaite, cette borne inférieure est au moins égale à 1.

On pourrait aussi chercher la borne inférieure de $x_m + y_m$, m prenant cette fois toutes les valeurs entières, etc. Les problèmes ne manquent pas, mais il est plus facile d'en poser dix que d'en résoudre un seul.

DOUBLE GÉNÉRATION, POUR L'ELLIPSE ET POUR LES ÉPICYCLOÏDES ;

PAR GEORGES BOULIGAND.

Une ellipse peut être décrite de deux manières par un point O , marqué sur le bord d'une bande de papier, quand deux points P et Q , marqués aussi sur le bord de la bande, sont astreints à glisser sur les axes $X'X$ et $Y'Y$ de cette ellipse.



On a marqué sur la figure une position OP_1Q_1 de la bande dans le premier mode (OP_1 et OQ_1 de même sens) et la position correspondante P_2OQ_2 du second mode (OP_2 et OQ_2 de sens contraires).

Imaginons maintenant que l'ellipse se déplace, en conservant une grandeur constante, de manière que le point O , variable sur cette ellipse, soit fixe dans le plan de référence, de manière enfin que la vitesse du point C soit portée par l'un des axes. Les

points P_1 et P_2 se déplacent sur une circonférence (β) de centre O et de diamètre égal au petit axe, les points Q_1 et Q_2 sur une circonférence (α) de centre O et de diamètre égal au grand axe.

On aperçoit alors facilement les résultats suivants (1) :

Si la vitesse du point C est portée par le grand axe $X'X$, la trajectoire de ce point est une hypocycloïde, qu'on obtient indifféremment en faisant rouler sur le cercle (α) l'un des cercles γ_1 ou γ_2 dont deux diamètres respectifs sont P_1Q_1 et P_2Q_2 .

Si la vitesse du point C est portée par le petit axe $Y'Y$, la trajectoire de C est une épicycloïde obtenue en faisant rouler γ_1 ou γ_2 sur β .

On met par là en liaison la double génération de l'ellipse et celle des épicycloïdes.

CONCOURS D'AGREGATION DE 1925.

Problème de Mécanique rationnelle.

Deux pavés P et p homogènes, parallélépipédiques de masses respectives M et m sont assujettis à glisser sur deux plans inclinés des angles Δ et δ sur l'horizon. Ces plans sont limités à leur intersection. Un fil inextensible et sans masse est attaché par ses extrémités aux centres des faces supérieures des deux pavés. Ce fil passe dans un anneau très petit O absolument fixe situé à la distance h au-dessus de l'arête des deux plans inclinés. Les dimensions des pavés et cette hauteur h sont choisies de façon que les deux brins de fil soient parallèles aux deux plans inclinés.

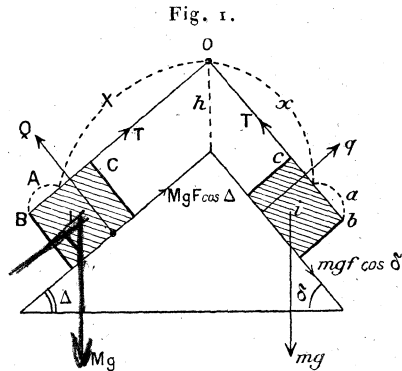
(1) En invoquant la propriété caractéristique de la tangente; ou encore en montrant que C reste invariablement lié à la circonférence γ_1 ou à la circonférence γ_2 lorsqu'on impose à l'une d'elles de rouler sans glisser sur l'une des circonférences de base.

Étudier l'équilibre et le mouvement du système formé par les deux pavés et dans l'hypothèse où le fil est tendu :

1° En supposant que les pavés ne frottent pas sur les plans inclinés;

2° En supposant que les pavés frottent sur les plans inclinés.

On désignera par F et f les coefficients de frottement respectifs.



N. B. — On n'étudiera que les positions des pavés pour lesquelles le système formé par les deux plans inclinés, les deux pavés et le fil admet un plan vertical de symétrie fixe.

SOLUTION PAR M. J. MARION,
Professeur au Lycée de Brest.

Les centres de gravité I et i des deux pavés se déplacent sur des parallèles aux lignes de plus grande pente des deux plans. Nous les prendrons comme axes des X et des x dirigés vers le bas. Le système est à liaisons complètes. Sa position dépend en effet des longueurs X et x des deux brins de fil lesquelles sont unies par la relation $X + x = l$, l étant la longueur totale du fil. La liaison des deux pavés par le fil inextensible s'exprime par la relation différentielle

$$dX + dx = 0.$$

Premier cas. — Il n'y a pas de frottement des pavés sur les plans inclinés. Les forces agissant sur le pavé P sont : le

poids Mg appliqué en I, la traction T exercée par le fil, la réaction Q du plan incliné. La force T est dirigée vers le point O , nous supposons $T > 0$. La force Q est dirigée de façon à soulever le pavé P de dessus le plan incliné.

Les forces agissant sur le pavé p sont : le poids mg appliqué en i , la traction T exercée par le fil et dirigée vers O , la réaction q du plan incliné dirigée de façon à soulever le pavé p de dessus le plan incliné.

Équilibre. — Sa recherche analytique revient à appliquer le principe des travaux virtuels. Les seules forces données sont les poids des deux pavés. La somme algébrique de leurs travaux virtuels est

$$T_e = (Mg \sin \Delta \delta X + mg \sin \delta \cdot \delta x).$$

Si le déplacement virtuel est compatible avec la liaison (inextensibilité du fil) on a $\delta X + \delta x = 0$, d'où

$$T_e = g [M \sin \Delta - m \sin \delta] \times \delta X.$$

Une condition nécessaire de l'équilibre est que T_e soit nul quel que soit le déplacement virtuel δX . Il vient donc

$$M \sin \Delta = m \sin \delta.$$

Mais cela ne suffit pas. Le pavé P peut être regardé comme libre sous l'action des trois forces Mg , T , Q . Or Q est appliquée en un point du polygone de sustentation. L'équilibre ne sera donc possible que si la force verticale Mg perce la face supérieure du pavé P . En d'autres termes, la verticale du point I doit traverser le segment BC , ce qui entraîne l'inégalité $A > \frac{h}{2} \sin \Delta$. Le même raisonnement s'applique au pavé p .

En résumé. — Le système reste en équilibre, quelles que soient les longueurs X, x des brins de fil, si on le dépose sans vitesse sur les plans inclinés lorsque $M \sin \Delta = m \sin \delta$, à la condition toutefois que les dimensions des pavés vérifient les inégalités

$$2A > h \sin \Delta; \quad 2a > h \sin \delta.$$

Si ces inégalités ne sont pas vérifiées les pavés ne restent pas en

contact avec les plans inclinés, mais basculent dès qu'ils sont abandonnés.

En projetant toutes les forces qui sollicitent chaque pavé sur la ligne de plus grande pente du plan incliné correspondant et sur la perpendiculaire à cette ligne de plus grande pente élevée dans le plan de la figure on trouve aisément la valeur des forces de liaison :

$$T = M g \sin \Delta = m g \sin \delta, \quad Q = M g \cos \Delta, \quad q = m g \cos \delta.$$

La force Q passe par le point où la verticale du point I coupe le côté BC . Q est ainsi définie en grandeur, direction, sens. Remarque semblable pour q .

Étude du mouvement. — Une équation suffira pour définir le mouvement. Elle sera fournie par le théorème des forces vives. La force vive du système est

$$2T = M \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (M + m) \left(\frac{dX}{dt} \right)^2$$

car $dX + dx = 0$ pendant tout le mouvement.

La somme des travaux élémentaires des poids est

$$g [M \sin \Delta - m \sin \delta] dX$$

de sorte que les forces données dérivent de la fonction des forces

$$g [M \sin \Delta - m \sin \delta] X;$$

d'où l'équation différentielle du mouvement

$$(M + m) \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 = 2g [M \sin \Delta - m \sin \delta] X + k,$$

où k est une constante. Dérivons par rapport au temps t

$$(1) \quad (M + m) \frac{d^2 X}{dt^2} = g [M \sin \Delta - m \sin \delta].$$

Le système va prendre un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est

$$\gamma = g \frac{M \sin \Delta - m \sin \delta}{M + m};$$

si, en particulier, $M \sin \Delta = m \sin \delta$, le système sera animé d'une vitesse constante.

Pour discuter plus complètement le mouvement il convient de calculer T et Q.

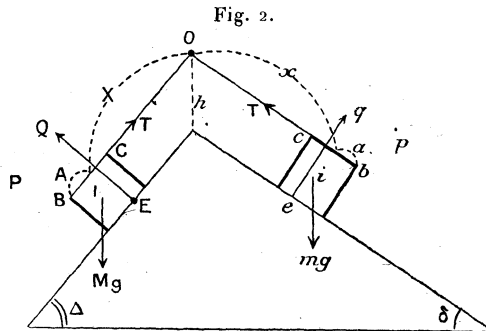
Calcul des liaisons. — Regardons le pavé P comme libre sous l'action des forces Mg , T et Q. Le théorème du mouvement du centre de gravité nous fournit les équations

$$\begin{aligned} Mg \sin \Delta - T &= M \frac{d^2 X}{dt^2} = Mg \frac{M \sin \Delta - m \sin \delta}{M + m}, \\ Q - Mg \cos \Delta &= 0; \\ T &= M m g \frac{\sin \Delta + \sin \delta}{M + m}, \\ Q &= Mg \cos \Delta. \end{aligned}$$

Le même calcul appliqué au pavé p donne pour T la même valeur et pour q la valeur $q = mg \cos \delta$.

Remarquons que la valeur trouvée pour T est essentiellement positive, ce qui nous montre que si le fil est tendu au début du mouvement il le restera pendant toute la durée du mouvement.

Les forces Q et q dont on vient de déterminer la grandeur et dont on connaît la direction ne seront définies que si l'on connaît un point de leur support. Le pavé P, par exemple, ne tourne pas autour de son centre de gravité I. Il en résulte que la somme des



moments des forces qui le sollicitent, par rapport au point I, sera nulle. Nous voyons déjà que la force Q doit être par rapport au point I située du même côté que le point C. Soit ρ la distance du point I au support de la force Q

$$\rho Q = \frac{h}{2} \cos \Delta T,$$

d'où

$$\rho = \frac{1}{2} mh \frac{\sin \Delta + \sin \delta}{M + m}.$$

Remarquons maintenant que la force Q est appliquée en un point intérieur au polygone de sustentation du pavé P , ce qui entraîne la condition $A > \rho$.

En résumé. — Pour que le mouvement soit possible il faut avant tout que les dimensions des deux pavés vérifient les inégalités

$$\begin{aligned} 2A &> mh \frac{\sin \Delta + \sin \delta}{M + m}, \\ 2a &> Mh \frac{\sin \Delta + \sin \delta}{M + m}; \end{aligned}$$

si ces dernières ne sont pas vérifiées les pavés basculent avant de se mettre en mouvement.

Discussion. — Supposons ces conditions remplies. Le mouvement du système est uniformément accéléré tant que les points E et e d'application des forces Q et q sont en contact avec les plans inclinés et tant qu'un des pavés n'est pas venu heurter l'anneau O . Lorsqu'une de ces circonstances se produit, un des pavés bascule ou subit un choc, et un nouveau problème se pose.

Pour fixer les idées supposons $\gamma > 0$, c'est-à-dire $M \sin \Delta > m \sin \delta$.

Premier cas. — Le pavé P est tiré vers le bas parallèlement à la ligne de plus grande pente ou abandonné sans vitesse initiale. Le pavé P descend, tandis que p s'élève. Le mouvement du système est accéléré, sa vitesse croît jusqu'au moment où le pavé p bascule ou frappe l'anneau disposé en O .

Deuxième cas. — Le pavé p est tiré vers le bas parallèlement à la ligne de plus grande pente du plan incliné sur lequel il repose $\left(\frac{dX}{dt}\right)_0 < 0$. Dans sa première phase le mouvement du système est retardé. Il sera aisé de calculer la limite supérieure à attribuer à $\left|\left(\frac{dX}{dt}\right)_0\right| = |V_0|$ pour que le point E reste en contact avec le plan incliné ou pour que le pavé ne heurte pas l'anneau. Si $|V_0|$ ne surpasse pas cette limite le pavé P va s'élever d'un mouvement

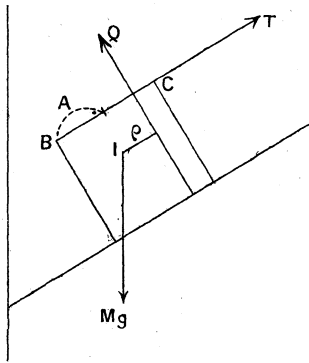
retardé et s'arrêter; puis, ensuite, il va redescendre d'un mouvement accéléré jusqu'au moment où p , arrivé au haut de sa course, basculera ou heurtera l'anneau O. La durée t de la première phase du mouvement est fournie par l'équation

$$g \frac{M \sin \Delta - m \sin \delta}{M + m} t + V_0 = 0 \quad \text{où} \quad V_0 < 0.$$

Remarque. — Le problème est en tous points analogue au mouvement d'un point pesant sur la ligne de plus grande pente d'un plan dès que les inégalités ci-dessus sont vérifiées.

Deuxième cas. — Cas du frottement. — Nous étudierons d'abord le cas du mouvement et la discussion nous indiquera très clairement les conditions de l'équilibre. Nous raisonnerons sur le pavé P. Pour fixer les idées supposons qu'au début du mouvement P descende sur son plan incliné, tandis que p monte sur le sien. Le pavé P est soumis aux mêmes forces que plus haut et à une

Fig. 3.



force de frottement dirigée en sens inverse du mouvement et égale à QF . Or le centre de gravité I de ce pavé reste à une distance constante de la ligne de plus grande pente du plan incliné. On a donc $Q = Mg \cos \Delta$, de sorte que la force de frottement est $Mg F \cos \Delta$. Le pavé p est soumis aux mêmes forces que plus haut et à une force de frottement dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan incliné sur lequel il repose et vers le bas, cette force ayant pour intensité $mgf \cos \delta$.

L'équation du mouvement sera encore fournie par le théorème des forces vives. La force vive du système est

$$2 T = (M + m) \left(\frac{dX}{dt} \right)^2.$$

La somme des travaux des deux forces T est $T(dx + dX) = \delta$, le travail élémentaire de chacune des forces Q et q est nul. La somme des travaux des forces données (poids des pavés, forces de frottement) est donc

$$(Mg \sin \Delta - Mg F \cos \Delta) dX + (mg \sin \delta + mg f \cos \delta) dx;$$

soit

$$[Mg(\sin \Delta - F \cos \Delta) - mg(\sin \delta + f \cos \delta)] dX$$

et le théorème des forces vives donne l'équation différentielle du mouvement

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = g \frac{M(\sin \Delta - F \cos \Delta) - m(\sin \delta + f \cos \delta)}{M + m}.$$

Le mouvement est encore ici uniformément varié.

Calcul des liaisons. — On opérera comme dans le cas du glissement sans frottement

$$Q = Mg \cos \Delta,$$

$$T = M m g \frac{\sin \Delta - F \cos \Delta + \sin \delta + f \cos \delta}{M + m},$$

$$q = m g \cos \delta.$$

Pour que le fil reste tendu pendant toute la durée du mouvement il faut que T soit positif, ce qui entraîne l'inégalité

$$\sin \Delta - F \cos \Delta + \sin \delta + f \cos \delta \geq 0;$$

si cette dernière n'est pas vérifiée, le fil cesse d'être tendu dès le début du mouvement.

Pour déterminer la ligne d'action des forces Q et q on appliquera au mouvement relatif autour des points I et i le théorème des moments des quantités de mouvement. Soient R et r les distances de I et i aux supports des forces Q et q, ces distances étant comptées algébriquement selon la position qu'occupent les forces Q

et q par rapport à I et i :

$$QR + (T - QF) \frac{h}{2} \cos \Delta = 0,$$

$$qr + (T + qf) \frac{h}{2} \cos \delta = 0.$$

De là on tirera R et r . Si nous remarquons que les forces Q et q doivent être appliquées en un point intérieur au polygone de sustentation des pavés on arrive aux conclusions suivantes :

Dans l'hypothèse où le pavé P descend au début du mouvement, ce dernier n'est possible que si les trois inégalités suivantes sont remplies :

$$\sin \Delta - F \cos \Delta + \sin \delta + f \cos \delta > 0,$$

$$A > |R|,$$

$$a > |r|.$$

Si la première condition n'est pas remplie le fil n'est pas tendu.

Si les deux autres conditions ne sont pas vérifiées un des pavés ou les deux pavés basculent dès l'instant initial.

Si ces conditions sont remplies le mouvement a lieu. Il est accéléré si

$$M [\sin \Delta - F \cos \Delta] - m (\sin \delta + f \cos \delta) > 0,$$

retardé si

$$M [\sin \Delta - F \cos \Delta] - m (\sin \delta + f \cos \delta) < 0.$$

Dans le premier cas même si le système est posé sans vitesse initiale sur le plan incliné, le pavé P descend sans cesse avec une vitesse *croissante* jusqu'au moment où le pavé p heurte l'anneau o ou jusqu'au moment où il perd contact avec son plan incliné.

Dans le deuxième cas le pavé P descend avec une vitesse qui tend vers 0, puis à un moment donné le pavé P s'arrête. Supposons qu'alors le pavé p ne soit pas venu heurter l'anneau ou qu'il n'ait pas basculé à l'extrémité du plan incliné. Que se passe-t-il ensuite? C'est ce que nous allons étudier.

Étude de l'équilibre. — Je dis tout d'abord que le pavé P ne peut pas descendre plus bas. En effet s'il reprenait sa marche vers le bas l'équation de son mouvement serait la même que plus haut.

On aurait $\frac{d^2X}{dt^2} < 0$, en d'autres termes $\frac{dX}{dt}$ devrait décroître en partant de la valeur zéro, c'est-à-dire prendre des valeurs négatives,

ce qui est incompatible avec le sens du mouvement du pavé P considéré.

Supposons donc qu'après s'être arrêté P se mette à remonter.

Mettant le problème en équation dans cette hypothèse, on trouve l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \frac{m(\sin\delta - f\cos\delta) - M(\sin\Delta + F\cos\Delta)}{M + m},$$

$\frac{dx}{dt}$ part de la valeur zéro et doit prendre des valeurs positives. Cela ne pourra pas se produire si

$$m(\sin\delta - f\cos\delta) - M(\sin\Delta + F\cos\Delta) < 0.$$

En résumé, l'équilibre du système se trouvera réalisé si les données du problème vérifient les deux inégalités simultanées

$$m(\sin\delta - f\cos\delta) - M(\sin\Delta + F\cos\Delta) \leq 0,$$

$$M(\sin\Delta - F\cos\Delta) - m(\sin\delta + f\cos\delta) \leq 0.$$

car dans ces conditions le système étant abandonné sans vitesse initiale ne pourra se mettre en mouvement ni dans un sens, ni dans l'autre. Ces conditions nécessaires sont insuffisantes car les pavés doivent rester en contact avec les plans inclinés et le fil être tendu. Cette dernière condition est remplie *a priori* dans le cas de l'équilibre. Les pavés basculeront au lieu de demeurer en équilibre si leurs dimensions A et α sont inférieures à certaines valeurs.

QUESTIONS PROPOSÉES.

2490.

Avec les neuf chiffres significatifs employés chacun une fois, on écrit deux nombres entiers (par exemple, 8712 et 95643). On les multiplie l'un par l'autre. Quels sont les deux facteurs ainsi obtenus dont le produit est maximum? R. B.

2491.

D'un point variable pris sur une hyperbole on mène des parallèles aux asymptotes.

Enveloppe des directrices des paraboles tangentes à ces deux droites et ayant pour foyer l'un des foyers de l'hyperbole. P. VINCENSINI.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.29. — 1° *Montrer qu'on peut écrire*

$$(1) \quad \frac{e^{xz}}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x) \frac{z^{m-1}}{m!},$$

la série étant convergente dans un domaine qu'on indiquera ; montrer que $\varphi_m(x)$ est un polynôme de degré m .

2° *En dérivant et intégrant les deux membres de (1), montrer que*

$$(2) \quad \varphi'_1(x) = 1,$$

$$(3) \quad \varphi'_m(x) = m\varphi_{m-1}(x) \quad (m = 2, 3, \dots, +\infty),$$

$$(4) \quad \int_0^1 \varphi_m(x) dx = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, +\infty).$$

3° *On considère la fonction*

$$(5) \quad \psi_1(x) = -2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(2p\pi x)}{2p\pi},$$

où x est réel. Décomposer chaque terme de la série en deux, en exprimant les sinus à l'aide de la fonction exponentielle, et se servir de cette décomposition pour prouver que, pour $0 < x < 1$,

$$(6) \quad \psi_1(x) = \frac{2x - 1}{2}.$$

(On aura à considérer deux séries de Taylor sur leurs cercles de convergence.)

4° *Si l'on pose*

$$(7) \quad \psi_m(x) = -2m! \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2p\pi x - \frac{m\pi}{2}\right)}{(2p\pi)^m} \quad (m = 2, 3, \dots, \infty),$$

montrer que ces fonctions sont continues quel que soit x , et que

$$(8) \quad \psi_m(x) = m\psi_{m-1}(x) \quad (m = 2, 3, \dots, \infty)$$

(sauf pour x entier, si $m = 2$), et que

$$(9) \quad \int_0^1 \psi_m(x) dx = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, \infty).$$

5° Conclure de là que

$$(10) \quad \psi_m(x) = \varphi_m(x) \quad (0 < x < 1; m = 1, 2, \dots, \infty),$$

la relation ayant lieu aussi pour $x = 0$ et pour $x = 1$ si $m > 1$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.30. — On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' + y = e^{-mx},$$

où y est la fonction inconnue de x et où m est une constante positive.

1° Déterminer la solution $y = u_m(x)$ de cette équation qui est positive quel que soit x réel.

2° Montrer que la série $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$ converge quel que soit $x \geq 0$ et qu'elle représente une solution de l'équation

$$(2) \quad y'' + y = \frac{1}{1 - e^{-x}};$$

en conclure que les solutions de cette équation restent finies quand x tend vers zéro par valeurs positives.

3° En remplaçant, dans (2), y par $z + \sin x \cdot \log x$, montrer que z est holomorphe pour $x = 0$.

4° Considérer la série $\sum_{m=1}^{\infty} \left[u'_m(x) - \frac{e^{-mx}}{m} \right]$; montrer qu'elle converge pour $x \geq 0$. En conclure la limite, pour $x = 0$, de la dérivée de

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) - \sin x \log x.$$

Calculer cette limite, à $\frac{1}{100}$ près. Calculer également, à $\frac{1}{100}$ près,

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(0).$$

(Clermont-Ferrand, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.31. — I. *Étant donné un système de trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz , à un point quelconque M de coordonnées (x, y, z) de l'espace on fait correspondre le plan P représenté par l'équation*

$$x(X-x) + y(Y-y) + e^{\lambda(x,y)}(Z-z) = 0;$$

X, Y, Z , désignant les coordonnées courantes, et $\lambda(x, y)$ étant une fonction des deux variables x et y indépendante de z . Soit Γ une courbe gauche, telle que le plan osculateur en un quelconque de ses points coïncide avec le plan P , correspondant à ce point.

1° *La fonction $\lambda(x, y)$ étant donnée, démontrer qu'il existe en général deux familles de courbes Γ , de telle sorte qu'il passe une courbe de chaque famille, et une seule, par un point quelconque de l'espace. Former l'équation différentielle qui détermine les projections de ces courbes sur le plan xOy .*

2° *Existe-t-il des surfaces dont toutes les lignes asymptotiques sont des courbes Γ , et quelle est la nature de ces surfaces?*

3° *Déterminer les fonctions $\lambda(x, y)$, pour lesquelles les deux familles de courbes Γ sont confondues.*

4° *Trouver l'expression générale des fonctions $\lambda(x, y)$ telles que les courbes Γ correspondantes se projettent sur le plan des xy suivant deux familles de courbes orthogonales. Inversement, étant données dans le plan xOy , deux familles de courbes orthogonales, sont-elles toujours les projections des deux familles de courbes Γ correspondant à une fonction $\lambda(x, y)$?*

Exemple. — *Déterminer la fonction $\lambda(x, y)$, de façon que les courbes Γ se projettent sur le plan xOy suivant les paraboles $y^2 = 2Cx$ (où C est une constante arbitraire), et leurs trajectoires orthogonales.*

C.32. — II. *Soient $P(x, y)$, $Q(x, y)$ deux fonctions rationnelles des variables x, y , satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Si, dans $P(x, y)$, on donne à y une valeur constante y_0 , on obtient une fonction rationnelle

$$\varphi(x) = P(x, y_0)$$

de la seule variable x . Démontrer, en s'appuyant sur les théorèmes classiques de Cauchy, que les résidus de cette fonction rationnelle $\varphi(x)$ sont indépendants de y_0 .

Quelle serait la proposition réciproque?

Application. — Soit $P(x, y)$ la fonction rationnelle

$$P(x, y) = \frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F}{x^2 - 2xy + 1};$$

on demande comment il faut prendre les coefficients constants A, B, C, D, E, F , pour qu'il existe une autre fonction rationnelle $Q(x, y)$ telle que

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

soit une différentielle exacte.

EPREUVE PRATIQUE. — C.33. — 1° Intégrer le système d'équations différentielles

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{-3x + 4y - z}{2}, \\ \frac{dy}{dt} = -x + z, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{3x - 12y + 9z}{2}. \end{cases}$$

En particulier, donner les expressions des inconnues x, y, z , en fonction de t et des valeurs x_0, y_0, z_0 de ces inconnues pour $t = 0$.

2° Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{-3x + 4y - z}{2} p + (-x + z) q = \frac{3x - 12y + 9z}{2},$$

où p et q sont les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la fonction inconnue $z(x, y)$.

Déterminer en particulier la surface intégrale de l'équation (E) qui contient l'axe Ox , c'est-à-dire pour laquelle $z(x, 0) \equiv 0$; donner l'équation cartésienne de cette surface intégrale.

3° Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{-3x + 4y - z}{2} \frac{df}{dx} + (-x + z) \frac{df}{dy} + \frac{3x - 12y + 9z}{2} \frac{df}{dz} = 0,$$

où $f(x, y, z)$ est la fonction inconnue à déterminer.

(Paris, juin 1923.)

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Moment d'inertie d'un solide donné par rapport à un axe passant par l'origine. Variation de ce moment quand l'axe tourne autour de l'origine. Ellipsoïde d'inertie.*

II. *On considère les coniques (C) qui admettent O pour foyer, Ox comme axe focal et qui ont une excentricité e donnée (le paramètre de ces coniques étant variable).*

Déterminer les trajectoires orthogonales (Γ) de cette famille de coniques. Prévoir a priori et vérifier que ce sont des courbes homothétiques.

Cas particuliers :

1° $e = \frac{1}{2}$. *Construire l'une des (Γ) et calculer l'aire des boucles;*

2° $e = 1$. *Que sont les (Γ)? Pouvait-on le prévoir géométriquement?*

3° $e = 2$. *Construire l'une des (Γ).*

N. B. — *Le problème peut être traité en coordonnées polaires.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Questions de cours.

II. On voit immédiatement que les coniques (C) forment une famille de courbes homothétiques par rapport à l'origine d'où résulte qu'il en est de même des (Γ).

De l'équation classique des (C) on déduit, pour les (Γ),

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta} = - \frac{1 + e \cos \theta}{e \sin \theta}, \quad \rho = \frac{q}{\sin \theta \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si $e = \frac{1}{2}$, la courbe présente une boucle parcourue quand θ va de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$. La surface est

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \rho^2 d\theta,$$

intégrale facile à calculer par les procédés classiques, on trouve $\frac{8q}{15}$.

Si $e = 1$, les (C) sont des paraboles. On voit géométriquement que par un point quelconque du plan passent deux (C) orthogonales, de sorte que les (Γ) ne sont autres que les (C). Les (C) dont l'axe est dirigé dans un sens ont pour (Γ) les (C) dont l'axe est dirigé dans l'autre sens. Le calcul conduit à

$$(C) \quad \rho = \frac{p}{1 + \cos \theta}, \quad (\Gamma) \quad \rho = \frac{q}{1 - \cos \theta}.$$

Si $e = 2$, la construction d'une (Γ) ne présente pas de difficultés.

EPREUVE PRATIQUE. — C. 34. — Calculer (en fractions décimales avec la précision des tables à cinq décimales) les intégrales définies suivantes :

$$1^{\circ} \quad \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{4 \cos^2 x + 9 \sin^2 x};$$

$$2^{\circ} \quad \int_0^1 \frac{x + \log(1-x)}{x^2} dx \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x + \log(1-x)}{x^2} dx;$$

$$3^{\circ} \quad \int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{\sqrt{1-x}};$$

$$4^{\circ} \quad \Gamma_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x e^x \cos x dx \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x e^x \sin x dx.$$

(Bordeaux, juin 1925.)

EPREUVE THÉORIQUE (Analyse). — C. 35. — I. α et β étant deux nombres réels indépendants de la variable x , soit y une fonction de x vérifiant l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\alpha \frac{dy}{dx} + (\alpha^2 + \beta) y = 0.$$

1° Donner l'expression de l'intégrale générale y sous forme réelle séparément dans chacun des cas $\beta < 0$, $\beta > 0$, $\beta = 0$.

2° Soit Γ une courbe intégrale de l'équation (1), c'est-à-dire la courbe décrite par le point (x, y) quand y est une fonction de x vérifiant l'équation (1). Trouver la condition que doit vérifier β pour que toute courbe intégrale Γ coupe une infinité de fois l'axe des x .

3° La dernière condition étant vérifiée, trouver β tel que la distance de deux points d'intersection consécutifs de Γ avec Ox soit π , rapport de la circonférence au diamètre. β gardera cette valeur dans tout ce qui suit.

4° La partie du plan comprise entre l'axe des x et la courbe Γ , et, d'autre part, limitée à gauche par Oy , à droite par une parallèle

à Oy ayant pour abscisse un nombre λ , possède une certaine aire dont on demande l'expression en fonction de λ , quand on convient de regarder comme négatives les parties de cette aire situées par rapport à Ox du côté des y négatifs.

5° A quelle condition doit satisfaire α pour que l'aire précédente tende vers une limite ω quand λ est infini positif? Trouver ω , au moyen de x et des constantes d'intégration définissant l'ordonnée $y(x)$ d'un point mobile de Γ .

6° Supposant α donné, déterminer la courbe Γ par les deux conditions que, d'une part, elle contienne le point $(0, 1)$; d'autre part, l'aire ω soit nulle;

7° Γ étant ainsi choisi, soit Γ_1 la courbe décrite par le point (x, y_1) , si y_1 est le produit de l'ordonnée y d'un point de Γ par son abscisse x . Exprimer y_1 au moyen de x . Soit ω_1 l'aire analogue à ω comprise entre Γ_1 et Ox et située à droite de Oy . Montrer que ω_1 existe si ω a une valeur et trouver la valeur de ω_1 . Prouver que ω_1 est toujours négatif et supérieur à -1 . Choisir α de façon que $\omega_1 = -\frac{1}{2}$.

II. On considère la fonction $f(x)$ égale à e^x pour $0 \leq x \leq \pi$, à e^{-x} pour $-\pi \leq x \leq 0$. Montrer que $f(x)$ est la somme d'une série trigonométrique de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx + \dots$$

Démontrer les formules

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^x dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos nx dx,$$

et en effectuer les calculs.

ÉPREUVE THÉORIQUE (Mécanique). — C.36. — Dans un plan vertical (Q) , un point matériel M , de masse m , est soumis à son poids \vec{MP} , dont la valeur est mg , et à une attraction centrale \vec{MF} émanant d'un point fixe O du plan et définie par l'égalité

$$\vec{MF} = -K m \vec{OM},$$

K étant une constante positive.

Le plan (Q) est orienté et rapporté à un système d'axes Ox, Oy . L'origine est au point O ; l'axe Ox est dirigé suivant la verticale descendante; l'angle (Ox, Oy) vaut $\frac{\pi}{2}$. On désigne par θ l'angle (Ox, OM) .

1° Montrer que le champ plan, défini par les deux forces \vec{MP}

et \vec{MF} appliquées à chaque point M, dérive d'une fonction de forces. Déterminer les lignes de niveau et les lignes de forces.

2° Le point M, étant soumis aux deux forces du champ, est assujéti à se déplacer sur un cercle fixe parfaitement poli, qu'il ne peut quitter. Le cercle, situé dans le plan (Q), a pour rayon a et son point le plus haut est O. Déterminer les positions d'équilibre du point M et étudier la stabilité de l'équilibre. Examiner en particulier l'hypothèse $a = \frac{g}{K}$.

3° Le point M est placé à l'instant zéro au point A, le plus bas du cercle; sa vitesse initiale, dirigée dans le sens d'orientation du plan, a pour valeur

$$v_0 = 2\sqrt{a(g - aK)}$$

(on supposera maintenant $a < \frac{g}{K}$). Évaluer la force vive de M et la vitesse de ce point en fonction de $\cos\theta$. Exprimer en fonction de θ le temps t employé par le mobile pour parcourir l'arc AM. Peut-il atteindre le point O? Le mouvement est-il accéléré ou retardé?

4° Exprimer la valeur R de la réaction du cercle sur le point M en fonction de $\cos\theta$. Indiquer le sens et la variation de cette réaction. Quelle condition doit remplir a pour que cette réaction puisse s'annuler?

N. B. — Dans tout le problème on négligera le frottement du point M sur le cercle.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Démontrer qu'il y a un angle α et un seul, compris entre 0 et 90° satisfaisant à l'équation

$$\sin^3 \alpha + 4 \sin \alpha - 1 = 0.$$

Le calculer en degrés, minutes et secondes à 1" près.

(Paris, juillet 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.37. — I. 1° Trouver toutes les fonctions x et y de la variable t vérifiant les équations simultanées

$$\frac{dx}{dt} + y - \sin t = 0, \quad \frac{dy}{dt} - x + \cos t = 0.$$

2° Déterminer les constantes arbitraires qui figurent dans les solutions générales trouvés par la condition que, pour $t = 0$, on ait $x = 1$, $y = 0$. Soient $x = f(t)$, $y = g(t)$ les fonctions ainsi obtenues. Tracer la courbe définie paramétriquement par les équations

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy . Indiquer sa nature

C.38. — II. On considère les deux surfaces (S) et (S') définies par les équations

$$(S) 4x^2 + y^2 - 8z = 0, \quad (S') x^2 + 4y^2 + 8z - 20 = 0.$$

1° Quelle est la nature de ces surfaces?

2° Calculer les coordonnées (x, y, z) d'un point quelconque M de leur courbe d'intersection C, en fonction de l'angle polaire φ de la projection m de M sur xOy . Construire les projections de la courbe sur les trois plans de coordonnées.

3° Vérifier que (S) et (S') se coupent orthogonalement en chaque point M de C.

4° Montrer que la normale en M à (S) enveloppe une certaine courbe (A) quand M décrit C et calculer les coordonnées du point de contact P en fonction des coordonnées x, y, z de M. Même question, en remplaçant (S) par (S'), ce qui donne l'enveloppe (A') et le point de contact P'. Démontrer géométriquement que la droite PP' est l'axe de courbure de C en M et indiquer comment on peut en déduire les coordonnées du centre de courbure. Faire ce calcul, en prenant M dans le plan zOx , du côté des x positifs.

EPREUVE PRATIQUE. — C.39. — Un anneau A pesant 2^{kg} peut glisser avec frottement le long d'une tige verticale Ox . Il est attiré par le point fixe P, situé au même niveau que le point O et à une distance $OP = 1^{\text{m}}$, suivant une force égale à $k \cdot AP$.

1° Sachant que ses positions d'équilibre sont les points du segment $A'A''$, situé tout entier au-dessous de O et tel que $OA' = 54^{\text{cm}}$ et $OA'' = 92^{\text{cm}}$, déterminer le coefficient k et le coefficient de frottement f de l'anneau sur la tige.

2° On abandonne A sans vitesse initiale à partir du point O. Décrire le mouvement qui prend naissance. Calculer sa durée totale. Construire le diagramme des espaces et le diagramme des vitesses. Calculer l'énergie totale absorbée par le frottement, en ergs, en joules et en kilogrammètres.

(Clermont-Ferrand, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.40. — I. Ox, Oy, Oz étant trois axes de coordonnées rectangulaires, on considère le volume V intérieur au cylindre

$$(C) \quad x^2 + y^2 - y = 0$$

limité inférieurement par le plan

$$(P) \quad z = 0,$$

et supérieurement par la surface

$$(\Sigma) \quad z = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

1° Indiquer, d'une façon précise, la nature de la courbe d'intersection de (C) et de (Σ).

2° Calculer la surface latérale S du cylindre (C) comprise entre le plan (P) et la surface (Σ).

3° Calculer le volume V.

4° Ce volume étant rempli d'une matière homogène de densité 1, calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz et le rayon de giration R correspondant.

C.41. — II. Un disque circulaire homogène, de centre O et de rayon R, peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal, perpendiculaire en O à son plan. Un point P de la circonférence de ce disque est attiré par un point fixe A, situé à la distance a au-dessous du point O et sur la verticale de ce point, suivant une force égale à k.PA.

1° Démontrer que le mouvement du disque est synchrone au mouvement d'un pendule simple de direction OP et dont on calculera la longueur λ .

2° On suppose que l'attraction subie par le point P, quand le rayon OP est horizontal, égale le poids du disque. Étudier, dans cette hypothèse, les variations de λ en fonction de a.

EPREUVE PRATIQUE. — Construire la courbe

$$x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2y = 0.$$

On déterminera, en particulier, les points de cette courbe où la tangente est parallèle à Ox, ainsi que les points d'intersection de ces tangentes avec la courbe. On calculera enfin, à 0,0001 près, l'abscisse du point de la courbe qui a pour ordonnée 2.

(Clermont-Ferrand, novembre 1925.)

EPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit C la courbe représentée par rapport aux axes rectangulaires Oxyz par

$$x = \frac{1}{2} \sin^2 t, \quad y = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}, \quad z = \sin t.$$

a. Projections de C sur les plans xOy et xOz. Allure générale de C.

b. Déterminer par leurs projections le vecteur unité de la tangente,

suivant les t croissants, et celui de la normale principale (vers la concavité).

c. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.

INDICATIONS. — a. Cycloïde et arc du parabole; b, c. t est l'abscisse curviligne, et l'on a

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 t}}$$

et les coordonnées du centre de courbure

$$X = x + \frac{\cos 2t}{1 + \sin^2 t}, \quad Y = y + \frac{\sin 2t}{1 + \sin^2 t}, \quad Z = z - \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t}.$$

C.42. — II. Soit le champ vectoriel défini, en coordonnées rectangulaires, par

$$X = 2x + y + z, \quad Y = x + 2y + z, \quad Z = x + y + 2z.$$

a'. Chercher les lignes de forces de ce champ par la méthode suivante : on exprimera les coordonnées d'un point d'une telle ligne, en fonction du paramètre $t = x + y + z$. On sera ramené à intégrer trois équations de la forme

$$\frac{dx}{dt} = K \frac{x+t}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = K \frac{y+t}{t}, \quad \frac{dz}{dt} = K \frac{z+t}{t},$$

où l'on précisera la valeur de t .

b'. Montrer qu'il existe une famille de surfaces de révolution qui sont orthogonales au champ en chacun de leurs points. Déterminer leurs méridiennes. En résolvant un problème plan de trajectoires orthogonales, remonter de ces méridiennes aux lignes de forces du champ et vérifier que les résultats obtenus s'accordent avec ceux de a'.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.43. — En désignant par n un entier positif, calculer l'intégrale double

$$I_n = \iint x^n e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

étendue à tout le plan, en passant aux coordonnées polaires.

(Poitiers, juin 1925.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.4.

[Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en octobre 1925, p. 31.]

SOLUTION
par J. DE CAUMONT.

1° Il s'agit d'obtenir le développement en série entière de

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{xt-t^3} dt.$$

En développant e^{xt} en série et en admettant qu'il soit permis d'intégrer terme à terme, on obtient

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^3} dt + \frac{x}{1!} \int_0^{\infty} t e^{-t^3} dt + \frac{x^2}{2!} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^3} dt + \dots,$$

ou, en posant $t^3 = u$,

$$3F(x) = \int_0^{+\infty} u^{-\frac{2}{3}} e^{-u} du + \frac{x}{1!} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{3}} e^{-u} du + \frac{x^2}{2!} \int_0^{+\infty} e^{-u} du + \dots$$

Les coefficients de $x^0, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots$ sont respectivement $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \Gamma\left(\frac{3}{3}\right), \dots$. Rappelons que

$$\Gamma\left(\frac{3p+1}{3}\right) = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3p-2)}{3^p} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$\Gamma\left(\frac{3p+2}{3}\right) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3p-1)}{3^p} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

D'où le développement

$$F(x) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{x}{1} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{3p}}{(3p)!} \frac{1 \cdot 4 \dots 3p-2}{3^p} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\ + \frac{x^{3p+1}}{(3p+1)!} \frac{2 \cdot 5 \dots 3p-1}{3^p} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{x^{3p+2}}{(3p+2)!} 1 \cdot 2 \dots p + \dots$$

La série du second membre a un rayon de convergence infini (rapport d'un terme au précédent). Elle représente bien $F(x)$. Soient, en effet, $S_n(x)$ et $R_n(x)$ la somme des n premiers termes et le reste correspondant, soit $r_n(x)$ le reste analogue dans la série e^{xt} ; on a

$$F(x) = S_n(x) + \int_0^\infty r_n(xt) e^{-t^3} dt$$

et il faut vérifier que l'intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Or, on augmente cette intégrale en remplaçant x par $|x|$ et, d'autre part, pour une limite supérieure finie, on obtient une valeur évidemment inférieure à $R_n(|x|)$. L'intégrale est donc inférieure ou égale à $R_n(|x|)$ qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

2° Pour développer en série les fonctions

$$\int_0^\infty \cos(\rho x - \rho^3) d\rho, \quad \int_0^\infty \sin(\rho x - \rho^3) d\rho,$$

nous calculerons l'intégrale

$$\int e^{wz-w^3} dw \quad \left(z = x e^{\frac{i\pi}{3}}; x \text{ réel} \right)$$

étendue au contour suivant du plan de la variable complexe w : a . la partie positive de l'axe des x ; b . un arc de cercle de centre O , de rayon infini, d'angle au centre $\frac{\pi}{6}$; c . la droite qui fait avec Ox l'angle $\frac{\pi}{6}$ décrite de l'infini à zéro. L'intégrale le long de ce contour est nulle; elle est nulle le long de l'arc de cercle, comme le montre un raisonnement classique; d'autre part, le long de la deuxième droite, on a

$$w = \rho e^{\frac{\pi i}{6}} \quad (\rho \text{ réel});$$

donc

$$e^{-\frac{i\pi}{6}} F\left(x e^{\frac{\pi i}{3}}\right) = \int_0^\infty e^{i(\rho x - \rho^3)} d\rho = \int_0^\infty \cos(\rho x - \rho^3) d\rho + i \int_0^\infty \sin(\rho x - \rho^3) d\rho.$$

La partie réelle, dans le développement de $e^{-\frac{i\pi}{6}} F\left(x e^{\frac{\pi i}{3}}\right)$ est

$$\int_0^\infty \cos(\rho x - \rho^3) d\rho$$

égale à

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{x}{1} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{x^3}{3!} \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{x^5}{4!} \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \dots \right].$$

Les termes du développement de $F(x)$ sont multipliés successivement par $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dots$

Le coefficient de i , $\int_0^\infty \sin(\rho x - \rho^3) d\rho$, s'obtiendra en multipliant les termes de $F(x)$ successivement par $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, \dots$

Question C. 2.

[*Calcul différentiel et intégral, épreuve pratique ; énoncé publié en octobre 1925, p. 31.*]

SOLUTION

par J. DE CAUMONT.

1° On trouvera

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2,622$$

avec trois décimales exactes ;

2° Il s'agit d'évaluer l'intégrale

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

prise le long d'un chemin complexe allant de -1 à $+1$ et coupant l'axe imaginaire en un seul point d'ordonnée plus grande que 1 . En complétant le chemin en question par le segment d'axe réel allant de $+1$ à -1 , on a un circuit équivalent au lacet qui part de 0 en suivant l'axe des y , entoure le point $z = i$ et revient en 0 en suivant l'axe des y . L'intégrale le long du lacet est

$$2 \int_0^i \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}},$$

c'est-à-dire ($z = \rho i$),

$$2i \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} = iI;$$

l'intégrale prise le long du segment $+1, -1$ d'axe réel est I , car il faut changer le signe du radical. Donc

$$J + I = iI;$$

$$J = I(i-1).$$



SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES COMPLEXES DE DROITES ;

PAR G. CERF.

Dans un intéressant article paru sous ce titre ⁽¹⁾, M. Lainé signale que Lie a cru, à tort, avoir démontré que les courbes d'un complexe de droites admettant un même élément linéaire de contact possèdent, au point commun, la même torsion; il cherche ensuite à déterminer les complexes qui jouissent de cette propriété. Il est possible d'indiquer une propriété générale des complexes de droites qu'on peut substituer à celle de Lie : *Pour toutes les courbes d'un complexe de droites admettant un même élément linéaire de contact (que nous appellerons famille F de courbes) il existe, en général, au point commun une même relation linéaire entre la courbure et la torsion.* Nous allons établir cette propriété ⁽²⁾, et, en application, résoudre le problème posé par M. Lainé.

Nous employons les notations de l'article cité; une droite quelconque a pour équations

$$\begin{aligned}x &= az + f, \\y &= bz + g,\end{aligned}$$

l'équation du complexe est prise sous la forme

$$g = \psi(a, b, f),$$

ψ étant supposée analytique dans le domaine du point $(0, 0, 0)$; considérons la famille F relative à l'élément linéaire porté par l'origine des coordonnées suivant Oz, cas auquel on peut, *en général*, ramener la question proposée et supposons que le plan

⁽¹⁾ *Nouvelles Annales*, 5^e série, t. III, 1925, p. 300.

⁽²⁾ Le même sujet a été traité récemment, de façon géométrique, par M. B. Gambier. Voir *C. R.*, t. 181, p. 18.

tangent au cône du complexe de sommet O le long de Oz soit pris comme plan des xz ; l'équation de ce cône étant

$$\psi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, o\right) = o,$$

la position spéciale des axes de coordonnées entraîne

$$\psi(o, o, o) = o \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial a}(o, o, o) = o,$$

c'est-à-dire que le développement de g est de la forme

$$g = hb + kf + la^2 + \dots,$$

h, k, l sont des constantes, les termes non écrits sont de degré au moins égal à 2 et inutiles à considérer pour la suite. Ce développement vaut aussi dans le cas où le cône du complexe comprend un plan contenant Oz , ce plan étant pris comme plan des xz . Nous supposons par la suite que h est différent de 0, c'est-à-dire que Oz n'est pas une génératrice multiple du cône complet; si k est différent de 0, le plan tangent aux cônes relatifs aux différents points de Oz , le long de Oz , tourne autour de Oz ; si k est nul, Oz est une droite singulière du complexe, et comme h est différent de 0 le point exceptionnel sur cette droite n'est pas l'origine.

Occupons-nous maintenant d'une courbe particulière quelconque C de la famille F ; sur cette courbe, nous choisissons z comme paramètre, les lettres accentuées désigneront les dérivées prises par rapport à z , l'indice 0 indiquera que les valeurs sont prises à l'origine; le sens positif sur la courbe est choisi pour que $s'_0 = +1$, s désignant l'arc. La courbe C est intégrale de l'équation de Monge

$$(1) \quad y - y'z = hy' + k(x - x'z) + lx'^2 + \dots;$$

pour $z = 0$, x, y, x', y' sont nuls sur C . Prenons la dérivée de (1) par rapport à z , x et y étant les fonctions de z qui définissent C ,

$$(2) \quad -zy'' = hy'' - kzx'' + 2lx'x'' + \dots,$$

tous les termes non écrits sont nuls à l'origine ainsi que leurs dérivées premières. On déduit de (2) que y''_0 est nul, ce qui concorde avec le fait que le plan des xz est osculateur à C en O .

Prenons la dérivée de (2)

$$(3) \quad -zy''' - z'y'' = hy''' - kzx''' - kx'' + 2lx''^2 + 2lx'x'' + \dots,$$

les termes non écrits sont nuls en O et l'on obtient la relation

$$(4) \quad hy_0''' - kx_0'' + 2lx_0''^2 = 0.$$

Désignons par R et T les rayons de courbure et de torsion de C en O; en observant que les dérivées qui figurent dans (4), qui sont prises par rapport à z, ont la même valeur en O que les dérivées du même nom prises par rapport à s, on constate que

$$\frac{1}{RT} = y_0''', \quad \frac{1}{R} = x_0'',$$

ce qui permet d'écrire (4) sous la forme

$$(5) \quad \frac{h}{T} + \frac{2l}{R} - k = 0$$

et démontre la propriété énoncée.

La signification du rapport $\frac{2l}{k}$ est simple; il représente évidemment le rayon de courbure de la courbe du complexe située dans le plan des xz, tangente à C en O, pourvu que l et k ne soient pas nuls simultanément.

Supposons k différent de 0, ce qui est le cas général. Pour que les courbes de la famille F possèdent en O la même torsion, il faut : ou bien qu'elles y possèdent la même courbure, ou bien que l soit nul.

La première hypothèse est à écarter car elle entraîne que x_0'' a la même valeur pour toutes les courbes F; comme y_0''' est nul, cela est en contradiction avec le théorème d'existence des intégrales de l'équation de Monge; la deuxième hypothèse exige que le cône du complexe relatif à O possède trois génératrices au moins dans le plan des xz.

Si maintenant la propriété doit être vraie en général, chacun des cônes du complexe doit se décomposer en plans (ou se réduire à un plan); on trouve alors immédiatement les complexes linéaires et les complexes spéciaux, qui sont formés des tangentes à une développable. En se servant de résultats démontrés par Lie (1) on constate que ce sont les seuls cas possibles.

(1) *Liniengeometrie u. Bhrstrf.* (Leipziger Berichte, t. 49, 1897, p. 688).

Il y aurait d'autres observations à présenter et quelques précisions à apporter aux indications qui précèdent; nous nous bornons à faire remarquer que les complexes spéciaux relatifs à une développable quelconque ont échappé à M. Lainé parce qu'ils correspondent d'après ses notations (page 305) au cas où $\theta(a)$ est identiquement nul alors que ses calculs supposent que cette expression est différente de 0.

**SUR LE CENTRE INSTANTANÉ DE MOUVEMENT
D'UNE FIGURE PLANE VARIABLE QUI RESTE SEMBLABLE A ELLE-MÊME;**

PAR N. ABRAMESCO.

Professeur à l'Université de Cluj (Roumanie).

On sait que, AB et $A'B'$ étant deux éléments linéaires des deux figures F et F' semblables et P le point d'intersection des droites AB et $A'B'$, le point double I des figures semblables F et F' est à l'intersection des cercles PAA' , PBB' ; de même, les angles $AIA' = BIB'$. On passe de la figure F à la figure F' par une rotation autour du point P et par une amplification des segments IA dans le rapport de similitude considéré.

Le mouvement continu de la figure F variable, qui reste semblable à elle-même est connu ⁽¹⁾ si l'on donne les courbes (A) et (B) décrites par deux points A et B de la figure F et la courbe (γ) enveloppe de la droite AB .

Soient AT et BS les tangentes en A et B aux courbes (A) et (B) et γ le point de contact de AB avec son enveloppe (γ) . AT et BS sont les limites des droites AA' et BB' et γ est la limite du point P . Donc, *le centre instantané de mouvement, I , au moment considéré, est le point de rencontre des cercles passant par γ et tangents respectivement en A et B aux droites AT et BS .*

⁽¹⁾ N. ABRAMESCO, *Sur le mouvement des figures planes variables avec conservation de similitude ou d'aire* (Société roumaine des Sciences, Bulletin des Sciences mathématiques pures et appliquées, vol. XXVI, janvier-juillet 1924).

Prenant un sens pour les tangentes AT et BS, on voit que les angles $I\gamma A = IAT = IBS$. M étant un point quelconque de la figure F en mouvement, qui reste semblable à elle-même, la tangente ⁽¹⁾ en M à la courbe décrite par M est la droite MR, telle que les angles

$$IMR = IAT = IBS.$$

De même, le point de contact, N, au moment considéré, d'une droite Δ de la figure F est tel que les angles

$$IN\Delta = IMR = IAT = IBS = I\gamma A.$$

Donc, dans le mouvement d'une figure plane, qui reste semblable à elle-même, les droites qui coupent, à un instant donné, sous un angle constant, convenablement choisi, les trajectoires des divers points de la figure en mouvement, concourent en un point I.

Comme application, considérons la normale en M à la courbe (M) qui coupe une courbe (N) au point N; on prend, dans le sens des arcs croissants de la courbe (M), sur la perpendiculaire en N sur MN, au vecteur $NM' = MN$. Pour trouver la tangente en M' à la courbe décrite par ce point, on observe que le triangle MNM' reste semblable à lui-même. En désignant par MT la tangente en M à la courbe (M) dans le sens des arcs croissants, par μ le centre de courbure en M à la courbe (M), par NS la tangente en N à la courbe (N), le centre instantané I de mouvement de la figure qui reste semblable à elle-même, est à l'intersection du cercle de diamètre $M\mu$ avec celui qui passe par μ et est tangent en N à la courbe (N). La tangente en M' à la courbe (M') est la droite M'R telle que les angles $TMI = INS = IM'R$.

⁽¹⁾ Voir, pour une autre méthode, MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 15; 1894.

PROPRIETES MECANIQUES DES FORMES QUADRATIQUES ;

PAR ÉT. DELASSUS.

1. La Mécanique introduit des formes quadratiques F non forcément homogènes, dont le type est la force vive, et qui possèdent toutes la propriété que leur portion homogène et du second degré F_2 est essentiellement positive et à discriminant non nul.

Les propriétés qu'on utilise en mécanique, qu'on démontre d'une façon indépendante et qui, d'ailleurs, se présentent sous des formes bien distinctes en apparence, peuvent aisément dériver d'une propriété générale assez simple, facile à démontrer et qui montre le rôle fondamental que joue dans l'étude d'une forme quadratique non homogène la *forme auxiliaire*

$$[F] = F_2 - F_0,$$

dont l'importance est déjà mise en évidence par l'intégrale généralisée des forces vives de M. Painlevé.

2. Considérons, relativement à notre forme $F(x)$ des variables x_1, x_2, \dots, x_n , l'identité aux ω

$$(1) \quad \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \omega_i + \sum_1^p z_j \alpha_j(\omega) \equiv \sum_1^m y_j \varphi_j(\omega),$$

accompagnée des équations

$$(2) \quad \alpha_1(x) = 0, \quad \dots, \quad \alpha_p(x) = 0,$$

en supposant

$$p + m \leq n,$$

et que les $\alpha(x)$ et $\varphi(x)$ soient des fonctions linéaires et homogènes distinctes.

Nous introduisons ainsi les deux fonctions bilinéaires

$$\begin{aligned} R &= \sum z \alpha(x) = \sum x \gamma(z), \\ S &= \sum y \varphi(x) = \sum x \psi(y), \end{aligned}$$

et, vu les hypothèses faites sur F ainsi que sur les fonctions α et φ , il résulte d'un théorème que j'ai démontré dans un article récent (1) que les deux formes quadratiques

$$\begin{aligned}\theta(x, z) &= F + R, \\ \theta(x, y, z) &= S - R - F\end{aligned}$$

ont toutes deux leur portion du second degré à discriminant non nul.

De la propriété de θ nous déduisons immédiatement que les $n + p$ équations (1) et (2) sont résolubles aux inconnues x et z et les fourniront comme fonctions linéaires des y .

3. Dans le cas général, nous n'avons pas, en passant des x aux y , un changement de variables puisque nous exprimons les x au moyen d'un nombre moindre de variables y . Néanmoins il est utile dans diverses questions, de voir en quoi se transforment ainsi les différentes fonctions de x qui ont figuré dans le calcul.

La question ne se pose évidemment pas pour les $\alpha(x)$ qui deviennent des fonctions des y identiquement nulles.

Cherchons ce que deviennent les $\varphi(x)$. A cet effet remarquons que les $n + p$ équations (1) et (2) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial x_1} &= 0, & \dots, & & \frac{\partial\theta}{\partial x_n} &= 0, \\ \frac{\partial\theta}{\partial z_1} &= 0, & \dots, & & \frac{\partial\theta}{\partial z_p} &= 0,\end{aligned}$$

de sorte que si nous désignons par $\Phi(y)$ la forme quadratique des y que devient θ quand on y remplace les x et les z par leurs expressions en fonction des y on aura, pour un y quelconque,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \sum \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \sum \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = \varphi(x).\end{aligned}$$

Ainsi les $\varphi(x)$ deviennent les dérivées partielles d'une même forme quadratique $\Phi(y)$.

(1) ET. DELASSUS, *Sur les équations de Lagrange du mouvement d'un système non holonome* (N. A., 5^e série, t. III, 1925, p. 191.

Remarquons en passant que si F renferme des variables auxiliaires u , ne figurant ni dans R ni dans S , on aura, par le même calcul,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial \Theta}{\partial u} = -\frac{\partial F}{\partial u}.$$

4. Des calculs précédents résultent aussi les formules

$$\begin{aligned} S &= \sum y \varphi(x) = \sum y \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2\Phi_2 + \Phi_1, \\ F &= S + R - \Phi = 2\Phi_2 + \Phi_1 - (\Phi_2 + \Phi_1 + \Phi_0) = [\Phi], \\ [F] &= \sum x \frac{\partial F}{\partial x} - F = (S - R) - F = 2\Phi_2 + \Phi_1 - [\Phi_2 - \Phi_0] = \Phi, \end{aligned}$$

qui nous donnent les transformées de S , F et $[F]$.

5. Cherchons à voir les propriétés de Φ_2 . Nous obtiendrons évidemment Φ_2 , en réduisant les expressions des x et z à leurs parties homogènes et du premier degré puis les portant dans la portion Θ_2 de Θ . Cela revient à faire tous les calculs qui précèdent en remplaçant F par F_2 ; on aura ainsi

$$F_2 = [\Phi_2] = \Phi_2,$$

d'où cette première propriété que Φ_2 est essentiellement positive. Voyons son discriminant. S'il était nul, on pourrait trouver des y non tous nuls annulant toutes les dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$; les valeurs correspondantes des x annuleraient donc les $\varphi(x)$, de sorte qu'il existerait des valeurs x , z et y , ces dernières non toutes nulles satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial F_2}{\partial x} \omega + \sum z \alpha(\omega) - \sum y \varphi(\omega) &\equiv 0, \\ \alpha_1(x) = 0, \quad \dots, \quad \alpha_p(x) &= 0, \\ \varphi_1(x) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_m(x) &= 0, \end{aligned}$$

et ce résultat est absurde, car de ce que le discriminant de Θ_2 n'est pas nul résulte que ces $n + p + m$ équations linéaires et homogènes à $n + p + m$ inconnues exigent que ces inconnues soient toutes nulles.

La forme quadratique Φ à laquelle on parvient et au moyen de

laquelle tout s'exprime après la transformation est donc une forme possédant les propriétés caractéristiques de la forme F dont on est parti.

6. Les propriétés des paragraphes précédents constituent le théorème général que nous avons en vue et qu'il serait puéril de chercher à formuler en un énoncé plus ou moins clair mais certainement fort long.

En supposant F homogène il trouve, sous cette forme générale, son application directe dans la théorie des liaisons finies unilatérales.

Dans le cas

$$p = 0, \quad m = n,$$

F étant quelconque, on a un véritable changement de variables défini par les formules

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \psi_1(y), \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = \psi_n(y),$$

et l'application du théorème montre que ces équations peuvent se mettre sous la seconde forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \varphi_1(x), \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \varphi_n(x),$$

les fonctions φ et ψ se correspondant par l'identité

$$S = \sum y \varphi(x) \equiv \sum x \psi(y).$$

On peut alors dire que les deux formes non homogènes F et Φ sont des formes adjointes relativement à la forme bilinéaire S .

Chacune d'elles n'est pas la transformée de l'autre, mais la transformée de sa forme auxiliaire.

Dans le cas particulier où l'on prend

$$S = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

on trouve la transformation d'Hamilton sous ses deux formes résolues

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= y_1, & \dots, & & \frac{\partial F}{\partial x_n} &= y_n. \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} &= x_1, & \dots, & & \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} &= x_n. \end{aligned}$$

Enfin si, plus particulièrement encore, on suppose F homogène, on retrouve la notion et les propriétés élémentaires des formes adjointes ordinaires. Les deux formes F, Φ sont alors transformées l'une de l'autre.

7. Dans certaines questions, on est amené à considérer des formes adjointes partielles.

Soit F forme quadratique de $x_1 \dots x_n z_1 \dots z_p$; continuons à désigner par $[F]$ sa forme auxiliaire et désignons par $[F]_x$ la forme auxiliaire obtenue en considérant F comme forme quadratique des x seuls, les z étant considérés comme des variables supplémentaires au même titre que les autres désignées par u .

Au moyen d'une forme bilinéaire $S(x, y)$ et de $[F]_x$ nous formerons la forme adjointe partielle Φ_x qui, comme on s'en assure aisément, sera une forme quadratique des y et des z ; cette transformation nous donnera les égalités

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \Psi(y), \\ \varphi(x) &= \frac{\partial \Phi_x}{\partial y}, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= -\frac{\partial \Phi_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial F}{\partial u} &= -\frac{\partial \Phi_x}{\partial u} \end{aligned}$$

et

$$\Phi_x = [F]_x = \Sigma x \frac{\partial F}{\partial x} - F.$$

Si, aux deux membres de cette dernière égalité nous ajoutons les quantités égales

$$-\Sigma z \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \Sigma z \frac{\partial F}{\partial z},$$

nous obtenons immédiatement l'égalité

$$-[\Phi_x]_z = [F].$$

Ces propriétés, dans le cas de $S = \Sigma xy$, trouvent leur application immédiate dans la réduction des systèmes de Lagrange à paramètres secondaires, la dernière fournissant la réduction de l'intégrale des forces vives.

AGREGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(CONCOURS DE 1924).

Mathématiques élémentaires.

Une sphère S et un point P étant donnés, nous désignerons par la lettre Σ (affectée ou non d'indices ou d'accents) une sphère passant par P et dont le centre est sur S .

1° Enveloppe du plan radical des sphères S et Σ quand le centre ω de Σ reste dans un plan Π .

2° Soient P' le second point commun à trois sphères Σ , Π le plan de leurs centres, K le centre radical de ces trois sphères et de la sphère S .

Trouver le lieu du point K et l'enveloppe du plan Π quand le rapport $\frac{KP'}{KP}$ a une valeur donnée m ; cas où $m = -1$.

Trouver l'enveloppe du plan Π quand le point K se déplace dans un plan donné.

3° On considère un plan Π passant par P , et qui n'est assujéti à aucune autre condition. Une sphère Σ_1 , qui a son centre ω_1 sur la circonférence Γ commune à S et Π , coupe Γ aux points A et B . Soient Σ_2 et Σ_3 celles des sphères Σ qui passent respectivement par A et B et ont leurs centres sur Γ . La circonférence commune à ces deux sphères coupe le plan Π au point P et en un second point C .

Trouver, pour toutes les positions possibles du plan Π et du point ω_1 , le lieu des centres des cercles tangents aux côtés du triangle ABC .

Quel est, pour un plan Π donné, le lieu du point de rencontre des hauteurs du triangle ABC ?

4° Deux sphères Σ et Σ' , de centre ω et ω' , étant orthogonales, l'axe radical de Σ , Σ' , S , coupe $\omega\omega'$ en un point M . Lieux de M et du milieu de $\omega\omega'$.

Enveloppe des plans $\omega\omega'\omega''$, qui contiennent les centres de trois sphères Σ orthogonales deux à deux. Lieu du second point commun à ces trois sphères, et lieu du centre de gravité du triangle $\omega\omega'\omega''$.

5° Dans le plan Π_1 des trois points $\omega, \omega', \omega''$, il existe une infinité de systèmes de trois centres $\omega_1, \omega'_1, \omega''_1$ de sphères Σ orthogonales deux à deux. Connaissant le rayon r du cercle circonscrit au triangle $\omega\omega'\omega''$ et la distance l du centre de ce cercle à l'orthocentre du même triangle, calculer les angles du triangle $\omega_1\omega'_1\omega''_1$ en fonction de l'un d'eux.

N. B. — On désignera par R le rayon de S et par d la distance de P au centre de S .

SOLUTION PAR C. CLAPIER ET J. DEBEY.

1° Soit P un point fixe que nous supposons extérieur à la sphère S de centre O ; prenons pour plan de la figure le plan $OP\omega$; le plan radical Δ des sphères S et Σ a pour trace la corde commune AB . Déterminons la distance ρ du point P à ce plan.

Cette distance est représentée sur la figure par

$$\overline{IQ} = \overline{OQ} - \overline{OI}.$$

Dans le triangle $O\omega P$ où $\omega P = \omega A$ nous avons

$$\overline{\omega A}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{O\omega}^2 - 2\overline{O\omega} \cdot \overline{OQ}.$$

Le triangle rectangle $\omega A E$ nous donne aussi

$$\overline{\omega A}^2 = 2R(R - OI), \quad \overline{O\omega} = R.$$

En égalant ces deux expressions, on déduit

$$2R(OQ - OI) = d^2 - R^2.$$

$$(1) \quad \rho = \frac{d^2 - R^2}{2R}.$$

Ainsi les plans radicaux Δ des sphères S et Σ sont tangents à une sphère C , de centre P , de rayon ρ .

Supposons que ω décrive le cercle d'intersection d'un plan fixe Π

de rayon ρ

$$\rho^2 = KO^2 - R^2.$$

Le plan Π' passant par P' et perpendiculaire à PP' est donc le plan polaire de P par rapport à cette sphère. Or on a

$$\rho^2 + R^2 = OK^2,$$

donc cette sphère est orthogonale à S et fait partie d'un réseau. Le plan Π' d'un point fixe P par rapport aux sphères du réseau passe par un point fixe, point diamétralement opposé à P dans la sphère du réseau conjugué qui passe par P . Le plan Π passe donc par un point fixe puisqu'il est l'homothétique de Π' (centre P , rapport $\frac{1}{2}$).

3° Figurons la circonférence Γ , commune à la sphère (S) et au plan Π ; supposons pour la facilité de la figure le point P à son intérieur.

Soient ω_2 et ω_3 les points où PA et PB prolongées rencontrent la circonférence Γ ; les angles $\widehat{P\omega_2\omega_1}$ et $\widehat{B\omega_2\omega_1}$ étant égaux et ω_1 étant équidistant de P et de B , il en est de même de ω_2 ; ce point est donc le centre de la sphère Σ_2 . De même ω_3 est le centre de la sphère Σ_3 . Ces deux sphères se coupent dans le plan Π en un point C situé sur le cercle Γ et sur le prolongement de $\omega_1 P$. Nous avons donc un triangle ABC , inscrit dans la circonférence Γ ; les points $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont les milieux des arcs tous tendus par les côtés; le point P est le point de concours des bissectrices. Si l'on prolonge la bissectrice $P\omega_1$ d'une longueur égale, on obtient le point I_1 sur la sphère Σ_1 ; ce point, tel que l'angle $\widehat{PAI_1}$ est droit, est le centre du cercle exinscrit au triangle ABC relativement à l'angle C .

Il en résulte que le lieu des centres des cercles exinscrits au triangle ABC est la sphère homothétique de S par rapport à P dans le rapport 2.

Supposons le plan Π , donc le cercle Γ fixe; P centre du cercle inscrit dans ABC est fixe ainsi que ce cercle. Or le cercle d'Euler de ABC lui étant tangent (Th. de Feuerbach) et ayant pour rayon $\frac{R'}{2}$ (R' rayon de Γ), le centre ω du cercle d'Euler de ABC décrit un cercle de centre P , et de rayon $r \pm \frac{R'}{2}$ (r rayon du

cerle inscrit). Dès lors, le lieu de H, orthocentre de ABC est le cercle homothétique de ce dernier dans le rapport 2 et par rapport à O' centre de Γ.

4° Le plan radical des deux sphères Σ et Σ' est perpendiculaire à ωω' et passe par le point P; ces sphères étant orthogonales l'angle ωPω' est droit et le point M est le pied de la perpendiculaire issue de P sur la corde ωω'.

Le lieu du point M est le même que celui du milieu μ de ωω'; c'est une sphère de centre I milieu de OP; on a, en effet, en remarquant que Oμ est dans un plan parallèle à PM,

$$IM = Iμ$$

et

$$(2) \quad \begin{aligned} Iμ^2 &= \frac{Oμ^2 + Pμ^2}{2} - \frac{d^2}{4}, & Pμ &= μω, \\ Iμ^2 &= \frac{R^2}{2} - \frac{d^2}{4}. \end{aligned}$$

Dans un plan II, passant par P; la droite ωω' enveloppe une ellipse de foyer P.

Les trois sphères Σ, orthogonales deux à deux, passant par le point P, le trièdre P.ωω'ω'' est un trièdre trirectangle; soit P₁ la projection de P sur le plan II; c'est le point de concours des hauteurs du triangle ωω'ω'' et en désignant par R₁ le rayon du cercle circonscrit et d₁ la distance du centre au point P₁ nous avons

$$\overline{PP_1}^2 = \frac{R_1^2 - d_1^2}{2}, \quad \overline{OO_1}^2 = R^2 - R_1^2,$$

et comme

$$\overline{P_1O}^2 = \overline{OO_1}^2 + d_1^2,$$

on a

$$(3) \quad 2\overline{P_1P}^2 + \overline{P_1O}^2 = R^2.$$

Le lieu de P₁ est une sphère ayant pour centre le point J situé au tiers de PO; et par suite l'enveloppe de II₁ est une quadrique de révolution de foyer P, de centre J.

Le second point commun aux trois sphères Σ est le point P₂ symétrique de P par rapport à P₁, il est donc situé sur une sphère homothétique de la précédente.

D'autre part le centre de gravité G_1 du triangle $\omega \omega' \omega''$ est au tiers de $O_1 P_1$; par suite le point J est équidistant de P_1 et G_1 . Le lieu du centre de gravité est la sphère principale de la quadrique enveloppe de Π_1 .

5° Le triangle $\omega_1 \omega'_1 \omega''_1$ est inscrit dans le cercle de rayon $R_1 = r$ et de centre O_1 . Son orthocentre P_1 est fixe

$$O_1 P_1 = d_1 = l.$$

La considération du triangle $O_1 \omega_1 P_1$ dans lequel

$$\widehat{O_1 \omega_1 P_1} = \omega'_1 - \omega''_1$$

nous donne

$$d_1^2 = R_1^2 + \overline{P_1 \omega_1^2} - 2R_1 \overline{P_1 \omega_1} \cos(\omega'_1 - \omega''_1);$$

or $P_1 \omega_1$ est le double de la distance du centre O_1 au côté $\omega'_1 \omega''_1$

$$P_1 \omega_1 = 2R_1 \cos \omega_1,$$

on en déduit, avec les notations de l'énoncé et en supprimant les indices,

$$r^2 - l^2 = 8r^2 \cos \omega \cos \omega' \cos \omega'',$$

s'il y a un angle obtus $r < l$. On voit en outre que r et l sont liés par la condition

$$l^2 < 9r^2 \quad (l < 3r).$$

Des relations

$$\cos(\omega' + \omega'') = -\cos \omega,$$

$$\text{tang}(\omega' + \omega'') = -\text{tang} \omega,$$

nous déduisons l'équation du deuxième degré qui admet pour racines

$$(4) \quad \begin{aligned} x' &= \text{tang} \omega', & x'' &= \text{tang} \omega'', \\ mx^2 - \sin \omega \cos \omega \cdot x + m + \cos^2 \omega &= 0, \\ m &= \frac{r^2 - l^2}{8r^2} \quad (|m| < 1); \end{aligned}$$

supposons par exemple ω aigu, on remarque en particulier que si

$$-\cos^2 \omega < m < 0,$$

l'équation a deux racines, l'une positive, l'autre négative, celle-ci correspondant à l'angle obtus.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. C. 44. — I. On considère la droite D qui a pour équation

$$u^3 x - 3uy - 1 = 0,$$

u , désigne un paramètre variable.

Déterminer et construire l'enveloppe de cette droite.

Soit A un point de cette enveloppe, d'ordonnée y_0 . Soit Δ celle des droites D qui est tangente en A à l'enveloppe. On considère l'aire limitée par la courbe enveloppe, la droite Δ et l'axe Oy . Déterminer le centre de gravité de cette aire.

C. 45. — II. Intégrer l'équation différentielle

$$x^2 y'^2 - 4xyy' + y^2 - x^2 = 0.$$

Par un point A au plan, il passe, en général, deux courbes intégrales. Où doit se trouver le point A pour que ces deux courbes fassent un angle donné, V (c'est-à-dire pour que les deux tangentes en A fassent l'angle V) ?

III. On donne la fonction

$$y = e^x \sin x$$

Étudier les variations de cette fonction. Construire la courbe représentative.

Calculer le rayon de courbure de la courbe à l'origine des coordonnées.

Développer la fonction en série entière.

IV. On considère les équations

$$x = 3u + v,$$

$$ly = u - v,$$

$$z = uv,$$

u et v désignent deux paramètres; x, y, z désignent les coordonnées d'un point.

Montrer que ces équations représentent une surface réglée.

On coupe la surface par la droite $x = y = z$. Former l'équation du plan tangent à la surface en chacun des deux points d'intersection.

Déterminer les plans tangents à la surface qui passent par la droite $x = y = z$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° En utilisant le développement en série entière de $\frac{1}{1+x^3}$, calculer à $\frac{1}{10^5}$ près la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1+x^3}.$$

2° Calculer la valeur de la même intégrale en utilisant l'expression, à l'aide de fonctions usuelles, d'une primitive de $\frac{1}{1+x^3}$ et une table de logarithmes à cinq décimales. Évaluer une limite supérieure de l'erreur commise.

(Caen, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. C. 46. — I. Soient deux axes rectangulaires Ox , Oy . On considère dans le plan xOy une courbe C passant par l'origine O , telle que le cosinus de l'angle avec Ox de la normale au point M d'abscisse x soit égal à

$$\frac{1-x}{1+x}.$$

Calculer en fonction de x la longueur de l'arc S compris entre O et M et donner en fonction de x l'expression du rayon de courbure en M . Quelle est l'équation de la courbe C ?

C. 47. — II. t représentant le temps, les coordonnées rectangulaires x , y , z d'un mobile sont données par les formules

$$x = t^2, \quad y = \frac{t^3}{3} - t, \quad z = \frac{t^3}{3} + t.$$

Montrer que le mouvement ainsi défini est celui que prend un mobile de masse 1 s'il est placé dans le champ de forces défini par

$$X = 2, \quad Y = z - y, \quad Z = z - y,$$

et si on l'abandonne, à l'origine des coordonnées, avec une vitesse convenable. Quelle est l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan des xy ?

III. Déterminer la solution y de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$$

qui s'annule ainsi que sa dérivée première pour $x = 0$. Quelle est la

partie principale de l'infiniment petit y , x étant l'infiniment petit principal ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — On donne l'équation

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Vérifier qu'elle a une racine double. Résoudre cette équation.
Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}.$$

INDICATIONS. — On met aisément le polynôme sous la forme $(x+1)^2(x^2+1)$ et le calcul des éléments simples $\frac{A}{(x+1)^2}, \frac{B}{x+1}, \frac{C}{x^2+1}$ ainsi que l'intégration ne présentent aucune difficulté.

(Caen, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° En désignant par a une constante, trouver l'intervalle de convergence de la série entière

$$(1) \quad y = x(1+a) + \frac{x^2}{2}(1+a^2) + \dots + \frac{x^n}{n}(1+a^n) + \dots$$

et sa somme dans cet intervalle.

2° Le développement en série de la fonction

$$(2) \quad y = L\left(\frac{1}{1-3x+2x^2}\right)$$

peut-il coïncider avec (1) ?

Pour quelle valeur de a en est-il ainsi ?

3° Construire, par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy , la courbe représentative de la fonction (2).

4° Calculer

$$\int_0^x L\left(\frac{1}{1-3y+2y^2}\right) dy,$$

x étant un nombre positif moindre que $\frac{1}{2}$. Limite du résultat, quand x tend vers $\frac{1}{2}$.

II. Soit C la courbe définie, par rapport au trièdre trirectangle $Oxyz$, par les équations

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t.$$

Trouver le cône engendré par les droites joignant l'origine à un point variable M de cette courbe; l'angle de la tangente en M , dans le sens des t croissants, d'une part avec la demi-droite OM , d'autre part avec la demi-droite Oz . Indiquer l'aspect de la courbe C . Calculer son rayon de courbure.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. 1° Le rayon de convergence est le plus petit des nombres 1, $1 : |\alpha|$.

2°

$$\alpha = 2.$$

$$3^\circ \quad I = \frac{1-2x}{2} \log(1-2x) + (1-x) \log(1-x) + 2x;$$

$$\lim = 1 - \frac{1}{2} \log 2.$$

II. 1°

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

2°

$$\cos V_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos V_2 = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

3° La courbe est une hélice tracée sur un cylindre dont la section droite est une spirale logarithmique (hélice cylindro-conique).

4°

$$R = \frac{3}{\sqrt{2}} e^t.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Trouver l'intégrale de l'équation différentielle

$$y'' + y = x^2(\cos x + \sin x)$$

telle que, pour $x = 0$, on ait $y = 0$ et $y' = 1$.

SOLUTION :

$$y = -\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 + x}{4}\right) \cos x + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 - x + 3}{4}\right) \sin x.$$

(Poitiers, novembre 1925.)

ÉPREUVE ÉCRITE (Analyse). — 1° Trouver, pour l'équation différentielle

$$(3x^2 - a^2)y + (3x^2 + a^2)xy' = 2ax^3,$$

la courbe intégrale (Γ) qui passe au point A de coordonnées $x = a$, $y = a$.

2° Montrer que l'équation de la courbe (Γ) peut s'écrire

$$\frac{y-a}{y+a} = \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^3;$$

étudier la forme de la courbe; déterminer ses points et tangentes remarquables. Pour le dessin, on prendra $a = 2^{\text{cm}}$.

3° Par le point A, on peut mener à (Γ) une seule tangente AB dont le point de contact B soit distinct de A. Calculer l'aire comprise entre le segment de droite BA et l'arc BA de la courbe (Γ) .

4° Calculer avec trois décimales exactes, en prenant $a = 1$, l'abscisse du point P de l'arc OA sur la courbe (Γ) , où la tangente a pour pente 1.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° L'équation de la courbe (Γ) s'obtient immédiatement sous la forme

$$y = \frac{x^3 + 3\frac{1}{2}a^2x}{3x^2 + a^2}.$$

2° La droite $y = \frac{x}{3}$ est asymptote, la droite $y = 3x$ tangente en O, l'origine centre de symétrie, le point A point d'inflexion à tangente parallèle à O x.

3° B a pour coordonnées $-\frac{a}{3}$ et $-\frac{7a}{9}$; l'aire vaut $\frac{4a^2}{9} \text{Log} 3$.

4° L'abscisse de P est 0,393.

ÉPREUVE THÉORIQUE (Mécanique). — Une barre homogène pesante, de longueur $2a$ et de poids P, s'appuie sur un sol horizontal par une de ses extrémités A; elle s'appuie en outre sans frottement sur un cylindre horizontal de section infiniment petite O, dont les génératrices sont normales à la barre et fixé à une hauteur h au-dessus du sol :

I. En désignant par f le coefficient de frottement de la barre sur le sol, former la condition à laquelle doit satisfaire l'angle α de la barre avec le sol pour que l'équilibre soit possible et calculer en fonction de α les valeurs correspondantes des réactions.

II. En supposant $h < a$, quelle serait la condition d'équilibre limite en supposant f très grand, c'est-à-dire théoriquement infini? Donner les expressions plus simples auxquelles se réduiraient alors les réactions et les représenter de façon vraisemblable, en même temps que le poids P, sur une figure spéciale.

SOLUTION I. — Les équations d'équilibre donnent, R étant la réaction en O, N et T les composantes normale et tangentielle de la réaction en A,

$$P = R \cos \alpha + N, \quad T = R \sin \alpha, \quad Pa \cos \alpha = R \frac{h}{\sin \alpha};$$

d'où

$$R = P \frac{a}{h} \sin \alpha \cos \alpha, \quad T = P \frac{a}{h} \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad N = P \left(1 - \frac{a}{h} \sin \alpha \cos^2 \alpha \right).$$

La condition $T \leq fN$ donne

$$\frac{\alpha}{h} \sin^2 \alpha \cos \alpha \leq \left(1 - \frac{\alpha}{h} \sin \alpha \cos^2 \alpha\right) f,$$

dont une solution évidente est $\cos \alpha = 0$.

II. Pour $f = \infty$, la condition d'équilibre limite est

$$\frac{h}{a} - \sin \alpha \cos^2 \alpha = 0$$

et alors

$$R = \frac{P}{\cos \alpha}, \quad T = P \tan \alpha, \quad N = 0.$$

(Toulouse, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Intégrer l'équation différentielle

$$y'' + 2h y' + 4y = 6 \sin x + 8x^2.$$

Diverses formes de l'intégrale générale suivant la valeur de la constante positive h .

2° Cas particulier où

$$h = 1, \quad h = 2, \quad h = 3.$$

3° Trouver dans le cas particulier où $h = 0$ une solution $y = f(x)$ telle que y et y' soient nuls pour $x = 0$ et déterminer l'ordre et la partie principale de $f(x)$ pour x infiniment petit.

II. Montrer qu'il existe une fonction $z = f(x, y)$ telle que l'on ait

$$dz = \frac{(y^2 - y + x) dx + (y - x^2 - x) dy}{(y - x)^2}$$

et déterminer cette fonction.

III. Les axes étant rectangulaires et a désignant une constante positive, on considère le solide limité par les plans $x = 0, y = 0, z = 0$, les surfaces

$$(S) \quad a^3 z = xy^3,$$

$$(C) \quad x^2 + y^2 = a^2$$

et situé dans le trièdre où x, y, z sont positifs.

Calculer le volume de ce solide et l'aire de la face située sur C.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. 1° et 2° Pour $h > 2$, on a

$$y = e^{-hx} \left(A e^{x\sqrt{h^2-4}} + B e^{-x\sqrt{h^2-4}} \right) + \frac{6(3 \sin x - 2h \cos x)}{9 + 4h^2} + 2x^2 - 2hx + h^2 - 1,$$

et l'on remplacera la première parenthèse par

$$A \sin(\sqrt{4 - h^2}x + \varphi) \quad \text{ou} \quad Ax + B,$$

suivant que h est plus petit ou égal à 2.

3° Pour $h = 0$, on a

$$y = \cos 2x - \sin 2x + 2 \sin x + \gamma x^2 - 1 \equiv x^3(1 - \varepsilon).$$

II.
$$z = \frac{xy}{y-x} + L|y-x| + C.$$

IV. 1° Aire égale à $\frac{a^2}{4}$; 2° volume égal à $\frac{a^3}{24}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. C. 48. — *L'axe Oy étant vertical et dirigé vers le bas, un point M de masse m et de poids mg est mobile sans frottement sur la courbe représentée par : $x = au^3$, $y = au^2$. A l'instant initial, M est placé au point le plus haut de la courbe et sa vitesse v_0 est donnée par $v_0^2 = 2\lambda ga$, λ et a sont des constantes positives.*

1° Former l'équation différentielle du mouvement;

2° Intégrer cette équation dans le cas où $\lambda = 0$;

3° Intégrer dans le cas de λ quelconque;

4° Loi du mouvement dans le cas où $\lambda = \frac{4}{9}$. Déterminer dans ce cas les composantes de la force qui, agissant sur le point M, supposé libre et non pesant, produirait ce mouvement.

II. Discuter l'équation

$$x - (1+x)L(1+x)^2 = 0.$$

et calculer ses racines à une unité près.

(Lyon, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit l'équation différentielle

$$x^2(x+1)y' = x(x+2)y - 3(x+1)^2.$$

1° L'intégrer. Constaté que l'une des courbes intégrales Γ est une conique (C), la construire.

2° C mise à part, les Γ ont trois asymptotes, deux sont fixes, la troisième passe par un point fixe.

3° Construire la courbe intégrale Γ_0 qui a une asymptote horizontale. Comment, C et Γ_0 étant supposées tracées, peut-on tracer la Γ qui passe par un point donné.

4° Les tangentes aux Γ en leurs points d'intersection avec une même parallèle Δ à Oy passent par un point fixe. Lieu de ce point quand Δ varie.

5° Lieu des points d'inflexion des Γ .

II. Définir le plan osculateur à une courbe. Former son équation en supposant les coordonnées d'un point de la courbe données en fonction d'un paramètre t .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. L'équation proposée linéaire du premier ordre avec second membre s'intègre par le procédé classique

$$y' = \frac{Cx^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x(x+1)}.$$

Ce sera une conique si $(x+1)$ est en facteur au numérateur, $C=1$, donc

$$(C) \quad y = \frac{(x+1)^2}{x}.$$

$y=Cx+3-C$ Les deux asymptotes fixes des Γ sont $x=0$ et $x=-1$, la troisième cherchée par les procédés classiques est $y-Cx=3$. Γ_0 est la Γ qui est donnée par $C=0$. La construction demandée d'une Γ résulte de la relation

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \text{const.}$$

qui existe entre les ordonnées de Γ , C , et Γ_0 pour la même valeur de x . Les tangentes aux diverses Γ aux points d'intersection avec Δ dépendent linéairement de C , donc passent par un point fixe dont on trouve facilement les coordonnées en fonction de x , puis le lieu géométrique.

Les points d'inflexion ont leurs x déterminés par l'équation $y''=0$; leur lieu s'obtient par l'élimination de C entre deux équations de premier degré.

II. Question de cours.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Établir les formules de récurrence pour les intégrales définies

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx, \quad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx \quad (n \text{ entier positif}).$$

Les calculer à 0,001 près pour $n=1, 2, 3, 4$.

II. Soit la courbe gauche Γ

$$y = \frac{1}{2}x^2 \cos x, \quad z = \frac{1}{2}x^2 \sin x.$$

Déterminer : 1° le rayon de courbure en un point quelconque; 2° la tangente, la normale principale et la binormale à l'origine.

III. La densité linéaire de Γ étant constante (égale à 1), calculer les coordonnées du centre de gravité de l'arc de Γ qui correspond aux valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (on les exprimera en fonction des A et B de la première partie et on les calculera à 0,001 près).

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — C'est une application numérique des formules du cours.

(Bordeaux, novembre 1925.)

CERTIFICAT DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

C. 49. — ÉPREUVE PRATIQUE. — Étudier le mouvement d'un point matériel pesant M, de masse 1, mobile dans un plan vertical et attiré par un point O de ce plan avec une force égale à $\frac{k}{r^2}$ (OM = r, k coefficient numérique positif).

On rapportera le mouvement à deux axes de coordonnées rectangulaires xOy, l'origine étant prise au centre attractif et l'axe Oy dirigé suivant la verticale ascendante. On déterminera la position du point M par les deux paramètres λ et μ (essentiellement positifs) définis par les relations

$$2\lambda = r + y,$$

$$2\mu = r - y$$

(indiquer d'un mot ce que sont les courbes $\lambda = \text{const.}$ et $\mu = \text{const.}$).

Former l'équation aux dérivées partielles de Jacobi et montrer que les variables se séparent. En déduire les équations finies du mouvement.

Application. — Étudier plus spécialement les deux cas suivants :

1° Le point M est lancé à partir d'une position initiale M_0 située sur Oy et d'ordonnée b ($b > 0$) avec une vitesse initiale parallèle à Ox de grandeur

$$v_0^2 = \frac{2}{b}(gb^2 + k).$$

Montrer que la trajectoire est alors une parabole de foyer O, décrite toujours dans le même sens.

2° Le point M est lancé à partir d'une position initiale M_0 située sur Oy et d'ordonnée $b \left(-\sqrt{\frac{k}{g}} < b < 0 \right)$ avec une vitesse initiale parallèle à Ox de grandeur

$$v_0^2 = \frac{2}{b} (gb^2 - k).$$

Montrer que la trajectoire est alors une portion de parabole de foyer O, décrite d'un mouvement oscillatoire.

Étudier la stabilité de ces deux mouvements particuliers.

(Strasbourg, octobre 1925).

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE APPROFONDIE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Détermination des coordonnées géographiques d'un lieu par les observations extramériidiennes.

II. Parallaxe (étoiles et astres du système solaire).

ÉPREUVE PRATIQUE. — Les éléments écliptiques de l'orbite de Mercure sont :

$$\log a = \bar{1},58782,$$

$$\log e = \bar{1},31363,$$

$$\varpi = 47^\circ 15' 47'',$$

$$i = 7^\circ 0' 11'',$$

$$\varpi = 76^\circ 3' 8''.$$

À la date 1910 juillet 15, calculer les coordonnées écliptiques de la planète et sa distance au Soleil, sachant que sa longitude dans l'orbite est $90^\circ 49' 12''$.

[Résultats : longitude, $90^\circ 36', 4$; latitude $+ 4^\circ 49', 2$; $\log r = \bar{1},49031$].

(Montpellier, juin 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. La réfraction.

II. Exposer sommairement la théorie de l'influence du Soleil sur le phénomène de la précession des équinoxes. Indiquer la forme des résultats.

C. 30. — ÉPREUVE PRATIQUE. — On observe, à une même hauteur h inconnue, trois étoiles :

Étoile.	Ascension	Déclinaison.	Heure indiquée
	droite.		par
	^h ^m ^s	^o	^h ^m ^s
1 ^{re}	6.19.25,9	-17.54.57"	4.15.41,8
2 ^e	3.59.12,8	+ 5.47. 3	5. 1.53,2
3 ^e	6.35.30,0	-43. 7.36	5.30.54,5

On demande la latitude du lieu, la correction du chronomètre pour avoir le temps sidéral local et la hauteur h .

(Clermont-Ferrand, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Établissement par le calcul des cadrans solaires à plan vertical.

II. Intégration, par la méthode de Jacobi, des équations différentielles du mouvement képlérien.

C. 51. — ÉPREUVE PRATIQUE. — En un lieu de latitude $\varphi = +40^{\circ}50'13''$, on a observé à l'ouest du méridien l'étoile α -Orion dont les coordonnées à la date de l'observation sont : $\alpha = 5^{\text{h}}51^{\text{m}}3^{\text{s}}$, $\delta = +7^{\circ}23'32''$. La hauteur, corrigée de la réfraction était $h = 43^{\circ}25'17''$; à ce moment le chronomètre indiquait $13^{\text{h}}20^{\text{m}}17^{\text{s}}$ (temps sidéral de Greenwich). Quelle est la longitude du lieu d'observation, et quel est l'azimut de l'étoile à l'instant de l'observation?

(Poitiers, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1^o Réfraction astronomique : formule générale et altération de la forme circulaire des astres.

2^o Formule d'interpolation de Newton. Application à la discussion de l'interpolation linéaire dans les tables de logarithmes.

C. 52. — ÉPREUVE PRATIQUE. — Le 1^{er} mars 1924, à midi (T. M. G.), les coordonnées héliocentriques de Mercure sont :

Longitude.....	284°24'22",4
Latitude.....	— 5°52'50",7
Log. rayon vecteur.....	$\bar{1},6557725$

A la même époque, les coordonnées du Soleil sont :

Longitude.....	340°38'51",96
Latitude.....	+ 0",62
Log. rayon vecteur.....	$\bar{1},9961564$

On demande de calculer les coordonnées géocentriques de Mercure à la même époque, avec l'approximation des tables à 5 décimales.

(Poitiers, novembre 1925.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Une demi-sphère creuse de poids négligeable et de rayon r est soudée à une demi-sphère pleine, homogène, de poids P et de même rayon. La sphère ainsi formée est mobile sans frottement sur un plan incliné faisant l'angle α avec l'horizon.

On supposera que la sphère est abandonnée sans vitesse et que, à l'instant initial, le centre de gravité G de la sphère est dans le plan vertical passant par son centre de figure O et normal au plan incliné.

On appellera θ l'angle que fait, à l'instant t , la droite OG avec la perpendiculaire abaissée de O sur le plan incliné.

Étudier le mouvement de la sphère. — On demande en particulier :

1° D'exprimer, en fonction de θ , la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$ et la réaction R de la sphère sur le plan.

2° De dire s'il est possible de choisir la valeur initiale de θ , θ_0 , de façon que, au début du mouvement, la sphère remonte le long du plan incliné.

3° D'examiner le cas où la valeur initiale de θ est très petite.

INDICATIONS. — La projection de G sur le plan incliné a un mouvement uniformément varié ; on a, d'autre part,

$$\theta^2(k^2 + a^2 \sin^2 \theta) = 2ga \cos \alpha (\cos \theta - \cos \theta_0).$$

On répondra à 2° en évaluant, à l'instant initial, l'accélération de O .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Deux points pesants A et B , de même poids P , sont mobiles sur une droite horizontale, l'un A avec frottement (le coefficient de frottement étant $\frac{1}{10}$), l'autre B sans frottement. Ils sont reliés par un fil élastique de masse négligeable et dont la tension est proportionnelle à l'allongement ; la longueur naturelle de ce fil (sa tension étant nulle) est 1^m ; pour un allongement de 1^m la tension prend la valeur $\frac{P}{5}$.

On supposera qu'à l'instant initial la tension du fil est nulle et que les deux points ont même vitesse : 2 m/sec dirigée dans le sens AB .

Étudier le mouvement des deux points jusqu'à l'instant t où la vitesse de A s'annule. Calculer cet instant t . Dire ce que sera le mouvement immédiatement après l'instant t .

On prendra l'accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m/sec}$.

INDICATIONS. — On trouve, pour les abscisses des deux points,

$$x_A + x_B = 1 + 4t - \frac{1}{2}t^2, \quad x_B - x_A = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t$$

et l'instant t , pour lequel A s'immobilise, est $3^s, 60$.

(Marseille, novembre 1922.)

C. 53. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une tige rectiligne AB, homogène et pesante, de masse m , de longueur $2l$, mobile dans l'espace, vient heurter, par son extrémité A, un plan horizontal fixe P.

A l'instant du choc la tige fait avec le plan P l'angle θ_0 donné, et tous les points de la tige ont la même vitesse donnée v_0 normale au plan. On suppose que le choc a lieu entre corps mous : le coefficient de restitution e sera donc pris égal à zéro :

1° On admet que le contact de la tige et du plan a lieu sans frottement.

Déterminer l'état des vitesses de la tige après le choc.

Discuter si, dans le mouvement qui suit immédiatement le choc, l'extrémité de la tige restera, ou non, en contact avec le plan P. Étudier sommairement, dans l'un ou l'autre cas, le mouvement de la tige jusqu'au moment où viendrait à se produire un nouveau choc.

2° Il y a frottement au contact de la tige et du plan, le coefficient de frottement étant f . Déterminer l'état des vitesses de la tige après le choc.

C. 54. — ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Condition d'équilibre d'un fil inextensible, de masse négligeable, qui porte à ses extrémités les points matériels pesants P et P₁, de masses m et m_1 , et qui repose avec frottement ($f = 0,25$) sur un cylindre circulaire fixe, d'axe horizontal, en touchant ce cylindre suivant la demi-section droite A₁BA.

2° Les masses m et m_1 étant égales, et le point P₁ restant immobile, on communique à P la vitesse v_0 normale à AP (dans le plan du fil).

a. On suppose d'abord que le fil ne peut glisser sur le cylindre. Évaluer, dans ces conditions, à un instant quelconque, la vitesse du point P et la tension du fil en P en fonction de l'angle θ du fil avec la verticale descendante.

b. Le coefficient de frottement au contact du fil et du cylindre étant toujours $0,25$; dire quelle condition doit remplir v_0 pour que, au moins au début, le mouvement précédent se produise effectivement sans qu'il y ait glissement du fil sur le cylindre.

On donne : r , rayon du cylindre; $AP = l = 1^m$.

(Marseille, juin 1924.)

EPREUVE THÉORIQUE. — Dans un plan vertical fixe P, on a une verticale fixe Oz₁ et un cercle fixe Γ.

1° Mouvement d'un solide homogène pesant et de révolution dont le centre de gravité décrit Oz et dont l'axe reste tangent à Γ.

2° Le plan P est animé d'une rotation uniforme de vitesse donnée ω autour de Oz₁. On se donne la valeur initiale θ₀ de l'angle de l'axe avec Oz₁; montrer qu'on peut déterminer la rotation initiale r₀ du solide autour de son axe de façon qu'en partant de θ₀ avec r₀ et θ'₀ = 0, le paramètre θ reste en équilibre. — Gardant r₀, on part de θ₀ avec une valeur très petite θ'₀; comment verra-t-on si, dans le mouvement, le paramètre θ restera ou non très voisin de θ₀. — Faire la distinction effective des valeurs de θ₀ d'après cette propriété dans le cas où le cercle Γ se réduit à un point ?

Indications sur la solution. — Les axes fixes et mobiles à choisir sont évidents. Pour la première partie, on a la liaison

$$a = b = 0, \quad c = -\frac{R + l \cos \theta}{\sin \theta}, \quad \psi' = 0,$$

c'est un problème dans le cas régulier d'intégration visible *a priori*, car il admet l'intégrale des forces vives et l'intégrale de rotation autour de l'axe de révolution. En formant 2G = 2T + 2U, écrivant les deux intégrales, on arrive pour θ à l'équation

$$[M(l + R \cos \theta)^2 + A \sin^4 \theta] \theta'^2 = [h \sin \theta - 2Mg(R + l \cos \theta)] \sin^3 \theta$$

dont la discussion ne présente aucune difficulté.

Pour la deuxième partie on a ψ' = ω. On est encore dans le cas régulier d'intégration, mais avec l'intégrale généralisée des forces vives de Painlevé. On arrive ainsi à

$$\begin{aligned} & [M(l + R \cos \theta)^2 + A \sin^4 \theta] \theta'^2 \\ &= [A \omega^2 \sin^3 \theta + 2C r_0 \omega \sin \theta \cos \theta \\ & \quad + (h - C r_0^2) \sin \theta - 2Mg(R + l \cos \theta)] \sin^3 \theta = F(\theta) \sin^3 \theta. \end{aligned}$$

Pour l'équilibre de θ, il faut.

$$F(\theta_0) = 0, \quad F'(\theta_0) = 0,$$

ces deux équations déterminent h et r₀. Pour ces valeurs de h et r₀, la fonction F à θ₀ comme racine double. Si l'on donne à θ'₀ une valeur qui n'est plus nulle, on augmente h, donc aussi la fonction F; il apparaîtra donc deux racines de part et d'autre de θ₀ si F était maxima pour θ₀, et il n'en apparaîtra aucune si F était minima, de sorte qu'il y a stabilité ou instabilité suivant le signe de F''(θ₀) pour les valeurs h, r₀ précédemment trouvées.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Ox et Oz étant deux axes rectangulaires, on considère l'aire limitée par les deux lignes

$$z = (x - 2)^2, \quad z = 1.$$

Cette aire en tournant autour de Oz engendre un solide de révolution qu'on suppose homogène et dont on demande le rayon de giration par rapport à la droite du plan zx ,

$$z = x - 2.$$

Indications sur la solution. — On calcule l'ellipsoïde d'inertie en O , on en déduit l'ellipsoïde central, d'où le moment d'inertie par rapport à la droite au moyen de ses cosinus directeurs et de sa distance au centre de gravité.

(Bordeaux, novembre 1923.)

Un parallélépipède rectangle homogène, de masse $M = 12$ et de côtés

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad c = \sqrt{\frac{5}{2}},$$

est mobile autour de son centre de gravité O et n'est soumis à aucune force.

1° Calculer les moments d'inertie A, B, C du solide, relatifs à ses axes de symétrie $Oxyz$ respectivement parallèles aux côtés a, b, c , ainsi que la vitesse angulaire initiale (p_0, q_0, r_0) résultant du couple de percussion $(\sqrt{2}, 3, 1)$ appliqué au solide en repos.

2° Former et intégrer les équations numériques déterminant les composantes p, q, r de la vitesse angulaire.

3° L'axe fixe Oz étant pris en coïncidence avec le moment résultant I des quantités de mouvement par rapport à O , calculer sans intégration les deux angles d'Euler θ et φ en fonction du temps, au moyen des valeurs de p, q, r précédemment calculées.

4° Calculer le troisième angle d'Euler ψ en fonction du temps.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. A. CABANTOUS. — 1° Les moments d'inertie sont :

$$A = 4, \quad B = 3, \quad C = 2,$$

et la rotation initiale a pour composantes

$$p_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad q_0 = 1, \quad r_0 = \frac{1}{2}.$$

2° Les équations classiques d'Euler se réduisent ici à

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{qr}{4}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{2rp}{3}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{pq}{2}.$$

On vérifie facilement que l'on se trouve dans le cas élémentaire où la polhodie est décomposée en deux coniques. Les équations précédentes donnent d'ailleurs

$$4p \frac{dp}{dt} = -\frac{3}{2} q \frac{dq}{dt} = 2r \frac{dr}{dt},$$

d'où en tenant compte des données initiales

$$2p^2 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}(q^2 - 1) = r^2 - \frac{1}{4},$$

et enfin

$$r = p\sqrt{2} = \sqrt{1 - \frac{3q^2}{4}};$$

en portant dans la seconde des équations (1), on a aisément

$$q = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{th} u, \quad r = p\sqrt{2} = \frac{1}{\operatorname{ch} u}$$

avec

$$u = \varepsilon - \frac{t}{\sqrt{6}} \quad (\varepsilon = \text{const.}).$$

3° et 4° Il est inutile d'insister sur la méthode qui permet de calculer les angles d'Euler (θ et φ sans intégration), on trouvera

$$\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\operatorname{sh} u}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{ch} u},$$

et

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{3} \frac{1 + \operatorname{th}^2 u}{2 + \operatorname{th}^2 u},$$

dont l'intégration est immédiate.

(Toulouse, juillet 1924.)

ERRATA.

Dans le numéro de décembre, la question résolue page 89 porte le n° 2420 et non 2490.

Il convient d'autre part d'échanger les figures des pages 75 et 92.

[D2a]

SUR LA THÉORIE DES SÉRIES ENTIÈRES ;

PAR J. HADAMARD.

La meilleure méthode pour montrer qu'une série entière est fonction continue de sa variable et peut être dérivée terme à terme, est incontestablement celle qui repose sur la notion de convergence uniforme, grâce à laquelle toutes les opérations d'intégration, puis de dérivation deviennent immédiatement intuitives. Mais l'introduction de cette notion dans l'enseignement des Mathématiques spéciales reste question controversée : d'aucuns la trouvent trop subtile pour le débutant, incapable, à leur avis, de bien saisir la distinction qu'elle implique. Aussi la plupart des cours obtiennent-ils la démonstration cherchée (ou plutôt l'obtenaient-ils, puisque à partir d'aujourd'hui cette démonstration devient facultative) par des calculs directs assez pénibles.

Or on peut éviter à la fois l'un et l'autre de ces deux écueils et obtenir une démonstration parfaitement intuitive, immédiatement déduite d'une idée directrice simple, sans que cette idée risque de dépasser le niveau intellectuel d'une classe de Mathématiques spéciales; on n'utilisera, en effet, que la notion de *série majorante*, nécessairement introduite par ailleurs dans la théorie des séries en général et des séries entières en particulier.

En désignant par

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots,$$

la série entière considérée de rayon de convergence R , on peut, si $|x|$ et $|x+h|$ sont plus petits que R , former la différence

$$(2) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= f(x+h) - f(x) \\ &= a_1 h + a_2 (2xh + h^2) + \dots + a_n (nhx^{n-1} + \dots) + \dots \end{aligned}$$

La série ainsi écrite, laquelle a, comme on le voit, pour termes des polynômes homogènes en x et h ne contenant aucun signe —,

est convergente comme différence de séries convergentes. Il s'agit, tout d'abord, de savoir si cette quantité tend vers zéro avec h .

En second lieu, h étant supposé différent de zéro, on peut diviser par h et écrire

$$(3) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a_1 + a_2(2x+h) + \dots + a_n(nx^{n-1} + \dots) + \dots$$

Nous avons à nous assurer que la série

$$(4) \quad a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

formée par les termes indépendants de h est convergente. S'il en est ainsi, soit $f_1(x)$ sa somme; il reste à montrer que la quantité

$$(5) \quad \delta_2 = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f_1(x) = a_2h + a_3(3hx + h^2) + \dots$$

tend vers zéro avec h .

Or on sait, par le théorème d'Abel, que la série donnée admet pour *majorante* la série

$$(I) \quad F(X) = A_0 + A_1X + \dots = M + \frac{M}{R}X + \dots + \frac{M}{R^n}X^n + \dots$$

(dans laquelle X représente la valeur absolue de x , pendant que R' a été pris inférieur d'aussi peu qu'on le veut à R — nous le supposons, en particulier, supérieur à X — la constante M étant choisie en conséquence) : c'est-à-dire que chaque terme de la série (I) est positif et supérieur en valeur absolue au terme correspondant de (1), soit

$$(A) \quad A_n = \frac{M}{R'^n} \geq |a_n|.$$

Recommençons sur la série (I) les opérations précédentes, en remplaçant x par sa valeur absolue X et également h par sa valeur absolue H , que nous assujettirons (comme nous le pouvons, puisqu'elle doit tendre vers zéro) aux inégalités

$$(B) \quad 0 < H < R' - X$$

(égalités exclues). Nous avons d'abord

$$(II) \quad A_1 = F(X+H) - F(X) = A_1H + A_2(2XH + H^2) + \dots$$

Chaque terme de cette nouvelle série est positif et supérieur en valeur absolue au terme correspondant de (2), puisqu'il en est ainsi pour chacun des monomes dont il se compose, et que ces monomes s'ajoutent tous entre eux, au lieu d'être (en général) de signes variables. Mais, la somme de (1) étant

$$(C) \quad F(X) = \frac{M}{1 - \frac{X}{R}},$$

celle de (II) est $\frac{MH}{R'} \frac{1}{\left(1 - \frac{X}{R'}\right)\left(1 - \frac{X+H}{R'}\right)}$; elle tend donc vers zéro

avec H et il en est de même *a fortiori* de (2); ce qui démontre le théorème de continuité.

Formons maintenant

$$(III) \quad \frac{F(X+H) - F(X)}{H} = A_1 + A_2(2X+H) + \dots + A_n(nX^{n-1} + \dots) + \dots$$

La série du second membre, laquelle est à termes tous positifs, est encore certainement convergente par construction, du moment que H est différent de zéro. Mais cette convergence entraîne, pour toute valeur de X positive et inférieure à R, celle de la série

$$(IV) \quad F_1(X) = A_1 + 2A_2X + \dots + nA_nX^{n-1} + \dots$$

formée par les parties indépendantes de H, laquelle a ses termes plus petits que ceux de la précédente. La convergence de (4) s'ensuit immédiatement (1), puisque cette dernière admet (IV) comme majorante.

De plus, on voit que la quantité (III) est plus grande que $F_1(X)$.

Par contre, elle est plus petite que $F_1(X+H)$; car on a, pour chaque terme, d'après la formule des accroissements finis

$$\frac{A_n(X+H)^n - A_nX^n}{H} = nA_n(X+\theta H)^{n-1} < nA_n(X+H)^{n-1}.$$

Or, lorsque H tend vers zéro, $F_1(X+H)$ tend vers $F_1(X)$ (en

(1) On voit que l'étude directe de la convergence de la série (IV), si simple qu'elle soit, est inutile, sinon comme exercice sur les règles de convergence.

vertu du théorème de continuité que nous venons de démontrer).
Donc il en est de même de l'expression (III).

Donc enfin la différence

$$(V) \quad \Delta_2 = \frac{F(X+H) - F(X)}{H} - F_1(X) = A_2 H + A_3(3HX + H^2) + \dots$$

tend vers zéro avec H; et, comme elle est supérieure à δ_2 , la démonstration est achevée.

En réalité, l'intervention même de la majorante (I) est inutile. Désignons par $F(X)$ une majorante *quelconque* de $f(x)$, ayant un rayon de convergence supérieur à la valeur considérée de $X = |x|$; par exemple, prenons pour les coefficients A_n les valeurs absolues mêmes des a_n , ce qui, on le sait, donne comme rayon de convergence $R' = R$.

L'accroissement positif H étant encore assujéti aux inégalités

$$0 < H < R - X,$$

la convergence des séries (II), (III) et (IV) apparaît comme précédemment. Il est clair, d'autre part, que le second membre de (III) décroît en même temps que le nombre H. Il reste donc borné quand H tend zéro; par exemple, s'il a la valeur D, pour $H = \frac{R-X}{2}$, il sera constamment [ainsi que (3)] inférieur à D, pour $0 < H \leq \frac{R-X}{2}$. Il en résulte bien que δ_1 tend vers zéro.

Le reste de la démonstration suit comme il a été dit ci-dessus, ou encore en raisonnant, en ce qui concerne les quotients $\frac{\delta_2}{h}$, $\frac{\Delta_2}{H}$, comme nous venons de le faire pour les expressions (3), (III).

La démonstration gagne ainsi en élégance; mais, au point de vue pédagogique, il ne me paraît pas douteux que la première forme ne doive être préférée et la théorie des séries entières tirée tout entière d'un même principe.

La locution de « majorante » dont je me suis servi, pourrait évidemment être évitée; mais je ne vois à cela aucune utilité. Son introduction dans toute la théorie des séries me semble s'imposer, immédiatement après la démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui ramènent la convergence d'une série à termes de signes quelconques à celle d'une série à termes positifs.

[O'8a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU MOUVEMENT DE LA HIRE ;

PAR PIERRE DANIEL,

Élève à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

1. Appelons *mouvement fermé* un mouvement qui ramène une figure à sa position initiale. Dans un mouvement fermé, les trajectoires des points de la figure mobile sont en général des courbes fermées, et chaque point ne passe qu'une seule fois par un point de sa trajectoire. Il peut y avoir exception pour certains points qui décrivent des arcs de courbe *ouverts*, parcourus une ou plusieurs fois dans chaque sens, si bien qu'un tel point passe deux ou plusieurs fois, pour des positions différentes de la figure mobile, par chaque point de sa trajectoire (les extrémités de celle-ci mises à part). Par exemple, si l'on définit un mouvement plan par la condition que deux points de la figure mobile restent chacun sur une courbe donnée, ces deux points ne pourront, en général, qu'osciller sur des arcs finis des courbes correspondantes, et la circonstance signalée se présentera pour eux.

Peut-elle se présenter pour plus de deux points? Oui, comme le montre l'exemple d'un mouvement bien connu, le *mouvement de La Hire*, engendré par le roulement d'un cercle à l'intérieur d'un cercle de rayon double. On sait que, dans ce mouvement, les points de la figure mobile décrivent des ellipses, sauf ceux du cercle roulant qui décrivent tous des diamètres du cercle de base. Chacun d'eux passe deux fois par chaque point de sa trajectoire (exception faite des extrémités de celle-ci).

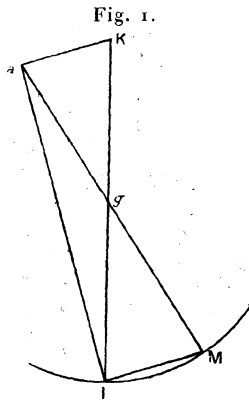
On peut se demander s'il existe d'autres mouvements fermés dans lesquels tous les points d'une courbe de la figure mobile ont des *trajectoires doubles*. L'étude de ce problème conduit, comme je vais le montrer, à une conclusion négative.

2. Soit M un point à trajectoire double. Quand M est en l'un des points d'arrêt de sa trajectoire, il est centre instantané de rota-

tion, puisque sa vitesse ne peut changer de signe sans s'annuler. Par conséquent, tous les points à trajectoire double sont sur la roulante. S'il existe dans la figure mobile une courbe dont tous les points aient des trajectoires doubles, ce ne peut être que la roulante.

En général, les trajectoires des points de la roulante ont des points de rebroussement sur la base. Pour que ces trajectoires soient doubles, il faut que ces points de rebroussement soient de deuxième espèce, c'est-à-dire aient la concavité de chacune de leurs branches dirigée dans le même sens. On verra plus loin dans quel cas cette condition est réalisée.

3. *Lemme.* — Soit g le centre de courbure en un point I d'une courbe C (fig. 1). Soit M un point voisin du point I sur cette

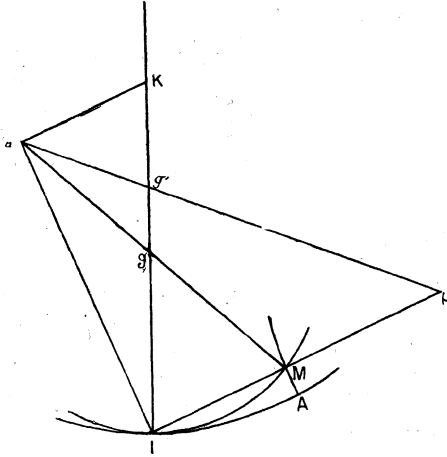


courbe. La perpendiculaire en I à IM rencontre gM en un point a , la parallèle à IM menée par a coupe Ig en K . Quand M tend vers I , K tend vers la position symétrique de I par rapport à g . En effet, soit e l'angle de IM avec la tangente en I , l'angle de cette tangente avec la tangente en M sera équivalent à $2e$. L'angle agK est donc équivalent au double de l'angle aIK , et ag est équivalent à gI , ce qui démontre la proposition.

4. La construction d'Euler-Savary permet de trouver le sens de la concavité de la trajectoire d'un point M de la roulante, au voisinage du point A où il atteint la base.

Soient g (*fig. 2*) le centre de courbure de la roulante, g' le centre de courbure de la base. Le centre de courbure μ en M de la trajectoire de ce point se trouve, en vertu de la construction pré-

Fig. 2.



citée, à l'intersection de IM et de ag' . Le point μ est intérieur ou extérieur au segment IM suivant l'ordre des points g' , I , g , K . Cet ordre subsiste en général de part et d'autre du point A considéré. Si donc on construit le centre de courbure de deux points voisins de A et sur chacune des branches de la trajectoire, on constate qu'en général le point de rebroussement est de première espèce. Le contraire ne peut avoir lieu que si, pour le point de contact considéré, g' vient se confondre avec I , g ou K . Alors le point de rebroussement pourra être de deuxième espèce.

Pour que les trajectoires de tous les points de la roulante aient des points de rebroussement de deuxième espèce, le point g' ne pouvant pas être constamment confondu avec I ou g , il faut que g' soit constamment confondu avec K , c'est-à-dire, d'après le lemme du n° 3, que le rayon de courbure de la roulante soit moitié de celui de la base au point correspondant de celle-ci.

5. On connaît le théorème : *Étant donné un mouvement plan fermé, le lieu des points du plan mobile qui décrivent des tra-*

jectoires limitant une aire donnée est un cercle (1). Or les points de la roulante décrivent des trajectoires qui, étant doubles, limitent des aires nulles. La roulante est donc un cercle, et, d'après le n° 4, la base est un cercle de rayon double.

Il n'y a donc pas d'autres mouvements que le mouvement de La Hire tels que tous les points d'une courbe de la figure mobile aient des trajectoires doubles.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1925).

Mathématiques Spéciales (2).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Établissons d'abord quelques lemmes, le lecteur étant prié de faire les figures d'ailleurs très simples.

a. Le lieu des centres des quadriques contenant les côtés d'un quadrilatère gauche ABCD est la droite joignant les milieux α, β des diagonales AC, BD.

Notations : D_{Δ} , plan mené par une droite D parallèlement à une autre Δ ; de même Δ_D ; (D, Δ) est le plan parallèle à D_{Δ} ou Δ_D et équidistant de chacun d'eux; AB, CD, côtés opposés, seront figurés par 1, 2; de même BC, DA par I, II.

La droite $\alpha\beta$ est manifestement contenue dans chaque plan (1, 2) ou (I, II); le paraboloidé, unique, qui contient les côtés de ABCD a son axe parallèle à $\alpha\beta$. Soient ω un point quelconque de $\alpha\beta$, et 1', 2', I', II' les symétriques, relativement à ω , de 1, 2, I, II. Écrivons le tableau

$$T \begin{cases} 1 & 2 & I' & II' \\ I & II & 1' & 2' \end{cases}$$

(1) Voir, par exemple, KÖNIGS, *Leçons de Cinématique*, p. 175.

(2) Pour l'énoncé de ce problème, le lecteur est prié de se reporter au numéro d'octobre 1925 des *Nouvelles Annales* (page 13), où il trouvera aussi une solution analytique de la question.

La droite $1'$ rencontre 1 à l'infini, 2 parce que $1'$ et 2 sont dans 2_1 , $1'$ au symétrique de B, $11'$ au symétrique de A. Le même procédé montre que chaque droite de T rencontre les 4 droites de l'autre ligne, de sorte que les 8 droites sont sur une même quadrique Q (suffisamment déterminée par 3 droites quelconques de l'une des lignes). Cette quadrique admet ω pour centre et la variation de ω sur $\alpha\beta$ livre les ∞^1 quadriques du faisceau (ponctuel ou tangentiel) défini par ABCD.

b. Soient deux droites arbitraires D et Oz, et O un point arbitraire de Oz; les droites D', D'' symétriques de D, l'une relativement à O, l'autre à Oz, se rencontrent.

La symétrie relative à Oz peut être décomposée en deux symétries, successives, planes, relatives à xOz , puis yOz ; la symétrie relative à O introduit une troisième symétrie relative à xOy , de sorte que D', D'' sont symétriques par rapport à xOy et se coupent en un point de ce plan.

c. Suivant que AB, CD ne sont pas isotropes ou le sont tous deux, il y a deux quadriques ou ∞^1 du faisceau précédent ayant un axe de symétrie dans le plan (1, 2).

AB et CD, isotropes ou non, ont une perpendiculaire commune, soit Oz, O étant pris dans le plan (1, 2). De O menons les parallèles à AB, CD et soit $O\omega$ l'une des deux bissectrices de ces parallèles, en supposant d'abord AB, CD non isotropes; si AB, CD sont isotropes (non parallèles, bien entendu, puisque le quadrilatère est gauche), les bissectrices sont indéterminées, et l'on prend pour $O\omega$ une droite *quelconque* du plan 1, 2. Soit ω le point où $O\omega$ perce $\alpha\beta$; la quadrique Q du faisceau, qui admet ω pour centre, est à elle-même sa symétrique relativement à $O\omega$, car cette symétrie permute 1 et 2; la droite I est remplacée par une droite I'' qui rencontre 1 et 2 aux symétriques de C et B; le lemme b prouve que I'' rencontre I', donc Q contient I'. Le même raisonnement s'appliquerait aux symétriques par rapport à $O\omega$ des diverses droites de T, de sorte que Q coïncide bien avec sa symétrique.

1° Cela posé, soient une droite réelle Oz, deux droites isotropes, horizontales et conjuguées, I et J rencontrant Oz en deux points imaginaires conjugués dont le milieu est appelé O. Il existe ∞^2

quadriques réelles contenant Oz , I, J. Elles forment un réseau linéaire, ponctuel ou tangentiel. Soit H l'une d'elles, prise une fois pour toutes : c'est une telle quadrique que l'énoncé fait intervenir. Les droites I, J déterminent un système linéaire ∞^3 de quadriques réelles (système ponctuel ou tangentiel); H est l'une d'elles. Deux quelconques se coupent suivant deux nouvelles droites coupant I et J. On en conclut immédiatement que les quadriques du système ∞^3 en jeu sont toutes les quadriques $H_{\lambda\mu}$ de l'énoncé, où on laisse λ et μ arbitraires. Une telle quadrique est parfaitement déterminée par un cercle horizontal de cote quelconque. Appelons h la section de H par le plan xOy et soit $h_{\lambda\mu}$ un cercle arbitraire du plan xOy qui définit complètement $H_{\lambda\mu}$; les quadriques H et $H_{\lambda\mu}$ ont toutes deux leur centre dans le plan xOy , ces centres sont donc ceux de h et $h_{\lambda\mu}$. Les génératrices communes à H et $H_{\lambda\mu}$ sont celles, de même système sur H que Oz , passant par les points communs à h et $h_{\lambda\mu}$; si donc on fixe λ, μ le cercle $h_{\lambda\mu}$ est seulement assujéti à passer par les traces horizontales g_λ, g_μ de G_λ, G_μ ; il engendre un faisceau; $H_{\lambda\mu}$ aussi, et le lieu des centres des quadriques est la droite perpendiculaire à $g_\lambda g_\mu$ en son milieu (lemme a). Le parabolôide du faisceau est défini par I, J et la droite $g_\lambda g_\mu$.

Si $h_{\lambda\mu}$ est concentrique à h , G_λ et G_μ deviennent les nouvelles génératrices isotropes horizontales de H; dans ce cas, le faisceau $H_{\lambda\mu}$ ($h_{\lambda\mu}$ conservant même centre que h avec un rayon variable) donne des quadriques ayant toutes même centre et même diamètre conjugué des plans horizontaux; le rapport des rayons des cercles obtenus par le même plan horizontal est constant; une quadrique exceptionnelle de ce faisceau se réduit aux deux plans horizontaux contenant l'un I, l'autre J.

2° Le contour apparent sur le plan horizontal de $H_{\lambda\mu}$ est l'enveloppe des projections horizontales des génératrices de $H_{\lambda\mu}$; or, I et J donnent les droites isotropes issues de O, donc on a une conique C ayant O pour foyer; si ω est le centre de $H_{\lambda\mu}$, le lemme (c) prouve que $O\omega$, axe focal de C, est axe de symétrie de $H_{\lambda\mu}$.

3° λ, μ étant donnés, remarquons que H ayant pour centre α (centre de h), le pied de la génératrice verticale autre que Oz est le point α' de h diamétralement opposé à O; la projection horizon-

tale de G_λ est la droite $g_\lambda \alpha'$, celle de G_μ la droite $g_\mu \alpha'$. La conique C est simplement assujettie à avoir O pour foyer et $g_\lambda \alpha'$, $g_\mu \alpha'$ pour tangentes; comme g_λ et g_μ , projections du foyer O sur ces tangentes, doivent être sur un cercle ayant ω pour centre, le centre ω de C ou $H_{\lambda\mu}$ est sur la perpendiculaire à $g_\lambda g_\mu$ en son milieu, ce qui fait retrouver autrement le lieu de ω ; le lieu du second foyer F est la hauteur, issue de α' , du triangle $g_\lambda g_\mu \alpha'$; si F décrit la demi-hauteur indéfinie, allant de α' vers $g_\lambda g_\mu$, C est une ellipse; la demi-hauteur opposée correspond aux hyperboles; la position α' pour F donnerait la quadrique H tout simplement et C se réduirait à une droite double.

L'axe non focal enveloppe la parabole de foyer O, admettant pour tangente au sommet la droite lieu de ω , pour directrice la droite lieu de F.

La directrice relative à O passe par un point fixe φ , car une transformation par polaires réciproques relativement à un cercle de centre O transforme le faisceau tangentiel C en le faisceau ponctuel des cercles γ ayant deux points fixes; or, le centre de γ , point transformé de la directrice, décrit une droite. Si l'on remarque que la seconde directrice est homothétique, relativement à φ , dans le rapport de 1 à 2, de l'axe non focal, on voit que cette directrice enveloppe une parabole.

Un cas exceptionnel est celui où λ devient infini, de sorte que G_λ est simplement O; g_λ coïncide avec O, le centre ω décrit la perpendiculaire au milieu de $O g_\mu$ et le contour apparent, singulier, se réduit à une droite double C pivotant autour de O; la quadrique $H_{\infty\mu}$ a une seconde génératrice verticale dont le pied est sur $\alpha' g_\mu$.

4° Nous avons déjà, λ, μ étant donnés, caractérisé $P_{\lambda\mu}$; la droite $g_\lambda g_\mu$ en est une génératrice principale et l'axe est la perpendiculaire abaissée de O sur $g_\lambda g_\mu$: σ , pied de cette perpendiculaire, est sommet de $P_{\lambda\mu}$ et la seconde génératrice principale est la droite, issue de σ , s'appuyant sur I, J. Pour la partie suivante, il est utile d'indiquer une propriété plus compliquée, qui permet de retrouver cette génératrice. Un plan horizontal, de cote arbitraire, coupe H suivant un cercle h' et G_λ, G_μ aux points g'_λ, g'_μ de ce cercle; la corde $g'_\lambda g'_\mu$ engendre $P_{\lambda\mu}$; G_λ et quatre de ces cordes déterminent quatre plans, tangents à $P_{\lambda\mu}$ aux points g'_λ correspon-

dants, et le rapport anharmonique de ces quatre plans est égal soit à celui des cotes, soit à celui des quatre cordes $g'_\lambda g'_\mu$ (transportées parallèlement en un même point). Soit O' le point où le plan horizontal utilisé pour h' , g'_λ , g'_μ coupe encore Oz ; de O' abaissons la perpendiculaire δ' sur $g'_\lambda g'_\mu$; δ' engendre un parabolöide, car elle reste parallèle au plan horizontal, s'appuie sur Oz ; de plus, quatre positions de δ' donnent avec Oz quatre plans dont le rapport anharmonique est égal à celui déjà obtenu pour les cotes ou les droites $g'_\lambda g'_\mu$ ou les droites δ' elles-mêmes, ce qui suffit pour établir qu'on a un parabolöide $P'_{\lambda\mu}$. Ce parabolöide $P'_{\lambda\mu}$ contient I et J, comme on le voit en prenant les plans horizontaux correspondants. Donc, $P_{\lambda\mu}$, $P'_{\lambda\mu}$ sont des quadriques particulières du système linéaire ∞^3 étudié au début; les deux parabolöides ont en commun I, J puis deux génératrices de système opposé à I ou J : l'une est K, droite à l'infini du plan horizontal, l'autre est précisément la génératrice principale non horizontale de $P_{\lambda\mu}$, car elle passe en σ .

Si maintenant on laisse λ, μ arbitraires, les parabolöides $P_{\lambda\mu}$ engendrent le système ∞^2 linéaire, pontuel ou tangentiel, déterminé par I, J et la droite à l'infini K du plan xOy . Imposer alors à tel parabolöide $P_{\lambda\mu}$ un point P lui impose tous les points de la droite Δ , issue de P et rencontrant I, J, sans compter tous les plans, pivotant autour de Δ , comme plans tangents; de même imposer à $P_{\lambda\mu}$ un plan tangent nouveau II revient à lui imposer, considérée comme enveloppe de plans tangents ou lieu de points, la droite Δ joignant les traces sur II de I et J, et l'on obtient ainsi un faisceau de parabolöides prélevé dans le réseau qui nous occupe : il n'y a donc qu'à donner immédiatement, non pas P ni II, mais une droite Δ rencontrant I et J; cette droite Δ sera d'ailleurs parfaitement connue si l'on donne sa projection horizontale δ . Dans ce cas, la conique C de contour apparent est une parabole de foyer O et tangente à δ : C engendre donc un faisceau *tangentiel*.

Si l'on appelle O_1 la projection de O sur δ , la tangente au sommet de C doit passer en δ , de sorte que le sommet σ de C, qui est, nous l'avons vu au 2^o, sommet de $P_{\lambda\mu}$, engendre un cercle S de diamètre OO_1 . La donnée de S, cercle arbitraire passant toutefois en O, donne O_1 , point diamétralement opposé à O, puis δ qui est la tangente à S en O_1 : on en déduit aussitôt Δ , lieu de P, enveloppe de II.

5° D'après ce qui précède, si μ tend vers λ , $P_{\lambda\mu}$ tend vers le parabolöide R_λ , lieu des tangentes à chaque cercle h' au pied g'_λ de G_λ sur h' et le parabolöide auxiliaire $P'_{\lambda\mu}$ du 4° vers le parabolöide R'_λ obtenu en abaissant de chaque point O' la perpendiculaire sur la tangente en g'_λ à h' ; l'intersection de R_λ et R'_λ est la génératrice principale Δ dont on cherche le lieu; l'introduction du parabolöide auxiliaire R'_λ montre clairement que la surface Σ lieu de Δ est coupée par chaque plan horizontal suivant la podaire du cercle h' relativement au point O' de ce cercle; c'est donc une cardioïde. La surface lieu de Δ est de degré 4.

6° R_λ et $R_{\lambda'}$ ont leurs axes rectangulaires quand les tangentes à h en g_λ et $g_{\lambda'}$ sont rectangulaires; R_λ et $R_{\lambda'}$ se coupent suivant I, J, K, plus une droite réelle γ rencontrant I et J; la trace horizontale de γ est l'intersection des tangentes à h en g_λ et $g_{\lambda'}$, c'est-à-dire un cercle concentrique à h , ayant son rayon égal à celui de h multiplié par $\sqrt{2}$; le lieu de γ est donc une quadrique Q contenant ce cercle et I et J; c'est l'une de ces quadriques signalées en fin de 1°, ayant même centre que H; même diamètre conjugué des plans horizontaux; on amplifie, dans le rapport $\sqrt{2}$ à partir de son centre, chaque cercle horizontal de H. De nouveau R_λ coupe Q suivant deux génératrices γ_1 et γ_2 ; cela tient à ce que, λ donné, on peut associer à λ deux valeurs λ'_1 et λ'_2 , car il y a deux tangentes de h perpendiculaires sur une tangente donnée. Le raisonnement employé subsisterait si l'angle des axes de R_λ et $R_{\lambda'}$ était égal à α , au lieu de $\frac{\pi}{2}$; on amplifierait chaque cercle de H dans le rapport $\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}$

(ou $\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$) pour déterminer la quadrique Q; seulement ici il y

aurait deux quadriques Q et Q', en raison de ce fait qu'on peut remplacer α par $\pi - \alpha$. Il est intéressant de signaler la propriété suivante : soit une quadrique réglée H, une série de sections circulaires par des plans parallèles, deux génératrices G_λ , G_μ d'un même système; h étant une section circulaire, α son centre, g_λ et g_μ les traces sur h de G_λ et G_μ , l'angle $g_\lambda \alpha g_\mu$ reste constant, quand le plan de h se déplace parallèlement à lui-même. Il suffit de mettre H en perspective à partir d'un point A de H, sur un plan parallèle à celui des sections circulaires; ces

sections se projettent suivant des cercles passant en deux points fixes B, C; G_λ, G_μ ont pour perspective deux droites $\gamma_\lambda, \gamma_\mu$ issues de B, l'angle $g_\lambda \alpha g_\mu$ reste inaltéré par la perspective et il est égal au double de l'angle $(\gamma_\lambda, \gamma_\mu)$.

Ceci explique comment, dans la question de ce paragraphe, on a dans chaque plan horizontal à chercher le lieu du point d'intersection de deux tangentes variables à un même cercle, quand leur angle reste constant.

CORRESPONDANCE.

M. R. Bouvaist. — *Au sujet de la question proposée 2418* (décembre 1925, p. 90).

En ce qui concerne sa seconde partie, cette question est un cas particulier de la suivante :

Étant donnée une droite Δ , tangente à une hypocycloïde à trois rebroussements inscrite dans un triangle ABC, toute droite Δ' isotomique ⁽¹⁾ de Δ par rapport à ABC et coupant Δ sous un angle constant enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements inscrite dans ABC et égale à la précédente.

En effet, le lieu des pôles de Δ par rapport aux paraboles conjuguées à ABC est une droite Δ' , isotomique de Δ par rapport à ABC. Δ et Δ' se correspondent dans une transformation quadratique involutive, ayant pour droites doubles la droite de l'infini et les côtés du triangle $A'B'C'$, formé par les droites joignant les milieux des côtés de ABC. Si Δ enveloppe une courbe de troisième classe H_1 , tangente à la droite de l'infini aux points cycliques I et J, et inscrite à ABC, Δ' enveloppera une courbe de troisième classe, inscrite dans ABC et tangente à la droite de l'infini en I et J, c'est-à-dire l'hypocycloïde à trois rebroussements H_2 .

⁽¹⁾ Rappelons que deux droites sont dites isotomiques par rapport à un triangle si elles coupent chacun des côtés en des points symétriques par rapport au milieu de ce côté.

H_1 coupe d'ailleurs BC en β et γ , à ses tangentes en ces points $\Delta\beta$ et $\Delta\gamma$ correspondent les tangentes $\Delta\beta'$, $\Delta\gamma'$ à H_2 aux points où cette courbe coupe BC; $\overline{\beta\gamma} = \overline{\beta'\gamma'}$; d'après la nature même de la transformation, ces deux courbes sont donc égales puisque le segment $\beta\gamma$ caractérise le seul paramètre de grandeur de H_1 .

Deux droites Δ et Δ' coupent la droite de l'infini en des points formant division homographique de points doubles I et J : elles se coupent sous un angle constant.

Dans le cas particulier de la question 2418, H_1 et H_2 sont confondues en une même hypocycloïde H (enveloppe des droites de Simson de ABC) qui est anallagmatique dans la transformation considérée.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2486.

(1925-1926, p. 24)

Si le triangle XYZ est circonscrit au triangle X'Y'Z' et lui est directement semblable :

1° *L'orthocentre de X'Y'Z' est le centre du cercle circonscrit à XYZ et les pieds des hauteurs de X'Y'Z' sont les traces de ses côtés sur ceux du triangle des milieux des côtés de XYZ.*

2° *Le centre du cercle circonscrit à X'Y'Z' est équidistant des orthocentres des deux triangles et ce cercle est bitangent à la conique inscrite à XYZ, qui a pour foyers les deux orthocentres et pour cercle directeur le cercle circonscrit à XYZ.*

E. BALLY.

SOLUTION.

Par MARCEL VASSEUR.

En menant par X'Y'Z' les parallèles aux côtés opposés du triangle X'Y'Z', on obtient un triangle $X_1Y_1Z_1$ directement semblable au triangle X'Y'Z' ainsi qu'au triangle XYZ considéré dans l'énoncé (ou confondu avec ce dernier).

Les côtés homologues des triangles XYZ et $X_1Y_1Z_1$ se coupent en X'Y'Z' et l'on sait que les quadrilatères $XX_1Y'Z'$, $YY_1X'Z'$, $ZZ_1X'Y'$ sont inscriptibles et que les 3 circonférences circonscrites passent par un même

point, pôle double des deux triangles envisagés et qui est son propre homologue dans chacun d'eux.

Soit H l'orthocentre du triangle $X'Y'Z'$, les 3 cercles envisagés plus haut ne sont autres que les cercles décrits sur HX_1 , HY_1 , HZ_1 comme diamètres ce qui démontre que H est le pôle double des 2 figures semblables formées par les triangles XYZ et $X_1Y_1Z_1$, donc ce point étant le centre du cercle circonscrit au triangle $X_1Y_1Z_1$ jouit également de cette propriété pour le triangle XYZ .

Il est, d'autre part, évident que les cercles décrits sur HX' , HY' , HZ' comme diamètres passent respectivement aux points d'intersection des côtés homologues $X'Y'$ et RS , $Y'Z'$ et ST , $X'Z'$ et RT ; R, S, T étant les milieux des côtés de XYZ (un quelconque de ces cercles passant même par deux de ces points), ce qui démontre que ces points d'intersection sont bien les pieds des hauteurs du triangle $X'Y'Z'$.

2°. Soient O_1 le centre du cercle circonscrit du triangle $X'Y'Z'$, et I_1 et I les orthocentres des triangles $X_1Y_1Z_1$ et XYZ , désignons encore par O le centre du cercle circonscrit au triangle RST ; on sait que O_1 est au milieu de HI_1 et O au milieu de HI et d'autre part le triangle HII_1 est rectangle en I (comme HX_1X est rectangle en X). Il s'ensuit que l'on a

$$O_1H = O_1I = O_1I_1,$$

ce qui démontre la propriété demandée.

Nous rappellerons maintenant le théorème suivant :

Dans toute conique à centre, le rayon d'un cercle bitangent dont le centre est sur l'axe non focal est proportionnel à la distance de son centre aux foyers.

Pour l'établir, considérons une conique ayant pour foyers 2 points H et I, M un point de cette conique; les points de rencontre de la tangente et de la normale en M à la conique considérée avec l'axe non focal sont sur le cercle circonscrit au triangle MHI, soient K et L ces points d'intersection (1). L'un d'eux K est tel que les segments MK et HI ont un point commun, l'autre L est tel que les segments HI et ML n'ont aucun point commun et les droites qui les portent se coupent sur leur prolongement.

Si la conique envisagée est une ellipse, ML est une tangente et K le centre d'un cercle bitangent en M et au point symétrique par rapport à LK; si c'est une hyperbole, le rôle des points L et K se permute.

En appliquant le théorème de Ptolémée, on a, en appelant $2c$ la distance focale et $2a$ l'axe focal :

$$(a) \quad MK \times HI = HK \times MI + KI \times MH = HK (MI + MH)$$

ou

$$\frac{HK}{MK} = \frac{c}{a} \text{ (excentricité),}$$

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

ce qui démontre le théorème dans le cas de l'ellipse.

$$(b) \quad LH \times MI = HI \times ML + MH \times LI$$

ou

$$HI \times ML = LH (MI - MH)$$

ou

$$\frac{HL}{ML} = \frac{c}{a} \text{ (excentricité),}$$

ce qui démontre le théorème dans le cas de l'hyperbole.

L'application de ce théorème donne immédiatement la solution de la question posée, car à cause de la similitude des triangles et du rôle de H, on a :

$$\frac{O_1 H |}{O_1 X'} = \frac{OH}{OR} = \text{excentricité de la conique}$$

et O_1 étant un point de l'axe non focal le théorème est démontré.

SOLUTION DE QUESTION DE LICENCE.

Question C.7.

(*Mécanique rationnelle, épreuve théorique; énoncé publié en novembre 1925, p. 52.*)

SOLUTION

par TH. BOZON.

Nous désignons par A et C les coefficients de l'ellipsoïde central pour l'un ou l'autre des deux solides, par l et l_1 les cotes des centres de gravité suivant l'axe commun Oz. Les positions des solides dépendent des angles d'Euler

$$\theta, \psi, \varphi; \quad \theta, \psi, \varphi_1,$$

avec la condition de liaison

$$\frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

La méthode de Lagrange conduit immédiatement aux équations sui-

vantes (où l'on a posé $\mathfrak{A} = A + M \frac{l^2 + l_1^2}{2}$):

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A} \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \theta'^2 = [Mg(l + l_1) \cos \theta + h][A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta] - \lambda^2 \\ \equiv F(\theta)$$

$$\mathfrak{A} \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta \psi' = \lambda$$

$$\varphi' = \mu.$$

1° Lorsque $l + l_1 = 0$ la discussion en θ est très simple puisque $F(\theta)$ est un polynôme du second degré par rapport à $\cos \theta$. Lorsque $\cos^2 \theta$ varie de 0 à 1 cette fonction varie, toujours dans le même sens entre $h\mathfrak{A} - \lambda^2$ et $hC - \lambda^2$. Donc θ' ne s'annulera jamais, θ variant donc toujours dans le même sens (mouvement révolatif) lorsque $\frac{\lambda^2}{h}$ sera inférieur à A et à C .

Si, au contraire, $\frac{\lambda^2}{h}$ est compris entre \mathfrak{A} et C [noter qu'il ne peut dépasser à la fois \mathfrak{A} et C parce que $F(\theta)$ serait alors toujours négatif], θ' s'annulera et θ aura une variation périodique. On voit immédiatement que les oscillations sont symétriques par rapport à l'une des droites $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$ suivant que C dépasse ou non \mathfrak{A} .

2° $l + l_1$ est positif et très grand. Pour avoir un mouvement dans lequel θ tend asymptotiquement vers π , il faut que π soit racine double de $F(\theta)$, c'est-à-dire que -1 soit racine simple de

$$g(u) \equiv [Mg(l + l_1)u + h][\mathfrak{A} + (C - \mathfrak{A})u^2] - \lambda^2 = 0$$

sans qu'il y ait d'autre racine entre u_0 (valeur initiale de $\cos \theta = u$) et -1 .

Ceci donne

$$(1) \quad \lambda^2 = [-Mg(l + l_1) + h]C$$

et la dérivée $\varphi'(-1)$, calculée dans cette hypothèse, peut s'écrire

$$g'(-1) = 2(\mathfrak{A} - C) \frac{\lambda^2}{C} + Mg(l + l_1)C,$$

évidemment positif parce que nous sommes dans le cas $\mathfrak{A} > C$. $\varphi(u)$ ayant les signes $+$ et $-$ pour u égal à $-\infty$ et $+\infty$, -1 est la seconde racine de ce polynôme. La troisième racine ne peut être qu'au delà de u_0 de sorte que (1) est la seule condition à satisfaire. Introduisons les valeurs initiales θ_0 et ψ_0 ; il vient d'abord, pour déterminer h , la condition

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{A} + (C - \mathfrak{A})u_0^2] \theta_0'^2 = [Mg(l + l_1)u_0 + h][\mathfrak{A} + (C - \mathfrak{A})u_0^2] \\ - C[h - Mg(l + l_1)];$$

θ_0' étant assez grand pour que la valeur de h ainsi obtenue dépasse $Mg(l + l_1)$, l'équation (1) déterminera λ , c'est-à-dire ψ_0' .

Autre solution par J. de Caumont.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1. Les axes $Oxyz$ étant rectangulaires, on projette chaque point M de l'espace en m sur le plan xOy , en μ sur Oz et l'on considère la droite μm .

Trouver les surfaces S telles que le plan tangent en un point quelconque M de cette surface soit parallèle à la droite $m\mu$ correspondante. Équation E de ces surfaces.

2. Former les équations des caractéristiques sans tenir compte de ce fait que l'équation E obtenue est linéaire; intégrer complètement le système différentiel obtenu.

Montrer qu'il existe des surfaces développables à deux paramètres, solutions de E , et les déterminer.

3. Déterminer directement la méridienne des surfaces de révolution, solutions de E (utiliser la propriété géométrique de définition, n° 1).

4. Soit une surface S quelconque solution de E ; on la fait tourner autour de Oz ; montrer qu'elle reste solution : que peut-on dire de la surface Σ enveloppe de S dans ce mouvement ?

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'équation E est

$$(1) \quad px + qy + z = 0,$$

admettant pour intégrale générale

$$(2) \quad zx = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Les ∞^1 hyperboles équilatères d'équation

$$(3) \quad zx = C,$$

dans le plan zOx , se transforment par une rotation autour de Oz en ∞^2 hyperboles, parmi lesquelles on prélève, suivant une loi arbitraire, une famille ∞^1 pour former la surface intégrale générale.

On obtient, en particulier, les surfaces de révolution

$$(4) \quad z\sqrt{x^2 + y^2} = C,$$

et les surfaces (cylindres hyperboliques)

$$(5) \quad z(ax + by) = 1,$$

qui sont les surfaces développables demandées par l'énoncé. D'ailleurs, si l'on exprime que les surfaces (2) sont développables on trouve la condition

$$ff'' - 2f'^2 = 0,$$

d'où les cylindres (5).

Le système complet des équations des caractéristiques

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z} = \frac{dp}{-2p} = \frac{dq}{-2q}$$

donne la combinaison intégrable

$$\frac{p}{q} = \text{const.},$$

qui conduit manifestement à une développable.

Toute surface intégrale reste évidemment surface intégrale par une rotation autour de Oz. C'est un résultat classique qu'une enveloppe d'intégrales est elle-même intégrale. L'enveloppe obtenue ici est manifestement de révolution.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Intégrer*

$$x^2(y' + y^2) + xy + 1 = 0.$$

Remarquer que l'équation admet des intégrales de la forme $\frac{A}{x}$ (A const.), ou poser

$$y = \frac{z'}{z}.$$

Exprimer l'intégrale réelle par formules débarrassées de tout symbole imaginaire.

II. *Chercher les asymptotiques de la surface*

$$x = 3u + 3v, \quad y = 3u^2 + 3v^2, \quad z = 2u^3 + 2v^3.$$

L'asymptotique $u = v$ est une hélice. La surface est réglée. Montrer que la surface est le lieu des milieux des sécantes doubles d'une asymptotique gauche quelconque.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. L'équation donnée admet évidemment $\frac{\pm i}{x}$ pour intégrales particulières. Les procédés réguliers, indiqués par l'énoncé, conduisent aisément au résultat, surtout le second, consistant à poser

$$y = \frac{z'}{z}.$$

Un autre procédé simple consiste à prendre pour inconnue

$$Y = xy,$$

de sorte que

$$Y = \pm i$$

est solution de l'équation de Riccati en Y . On trouve

$$xY' + Y^2 + 1 = 0,$$

qui s'intègre aussitôt en séparant les variables.

II. La surface proposée est la surface bien connue du troisième degré de Cayley, qui est surface de translation de ∞^1 modes différents. L'équation des asymptotiques est

$$du = \pm dv.$$

Les génératrices rectilignes sont les asymptotiques

$$u + v = \text{const.}$$

(Lille, novembre 1925.)

C. 55. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ tracées sur la surface (S) représentée par

$$x = v \cos u - a \sin u, \quad y = v \sin u + a \cos u, \quad z = a u,$$

a est une constante positive.

2° Asymptotiques de (S).

3° Montrer que les surfaces

$$(H) \quad 4x^2 + 4y^2 = (z + c)^2 + 4a^2,$$

où c est une constante arbitraire, coupent (S) suivant une famille d'asymptotiques.

4° Trouver les surfaces (Σ) qui coupent orthogonalement les surfaces (H).

5° Indiquer la forme des sections de (Σ) par le plan $y = 0$.

6° Montrer qu'il existe entre les rayons de courbure principaux en un point M de (S) une relation qui ne dépend pas des coordonnées de M.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer les rayons de courbure et de torsion, de la courbe gauche définie par les équations

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad z = ha \operatorname{sh} \frac{x}{a},$$

a et h désignant des constantes.

II. Calculer par la méthode des résidus l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx} dx}{(1+x^2)^3} \quad (i = \sqrt{-1}, m > 0)$$

prise le long de l'axe des quantités réelles.

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx dx}{(1+x^2)^3}.$$

III. Décomposer en éléments simples la fonction elliptique

$$f(u) = \frac{1}{p(2u) - pu},$$

pu étant la fonction elliptique de Weierstrass construite avec les périodes 2ω et $2\omega'$.

(Lyon, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On donne en coordonnées rectangulaires une surface réglée (S) engendrée par la droite (D) qui a pour équations

$$x = uz + U, \quad y = (au + b)z + U_1,$$

a et b étant des constantes, U et U_1 des fonctions du paramètre u.

1° Sur la projection orthogonale (Δ) de (D) sur le plan xOz on prend le point A de coordonnées

$$x = uf(u) + U, \quad y = 0, \quad z = f(u).$$

Déterminer la fonction $f(u)$ de façon que le point A décrive une trajectoire orthogonale de (Δ);

2° Déterminer les fonctions U et U_1 de façon que les lignes asymptotiques non rectilignes de (S) se projettent orthogonalement sur le plan xOz suivant les trajectoires orthogonales de (Δ). Quelle est alors la nature de la surface (S)? Que sont alors les trajectoires orthogonales de (Δ)?

II. Calculer l'intégrale

$$\int_c \frac{e^z(2-z)}{(z-1)^2} L(z^2-1) dz$$

prise le long d'une circonférence (C) ayant pour centre l'origine, un rayon égal à $\sqrt{2}$ et à partir du point $z = \sqrt{2}$ la détermination initiale de $L(z^2-1)$ étant zéro.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. 1° $f(u)$ doit vérifier l'équation

$$f'(u) + \frac{u}{u^2+1}f(u) + \frac{uU'}{u^2+1} = 0,$$

facile à intégrer explicitement.

2° Identifiant avec la précédente l'équation qui donne z en fonction de u pour les asymptotiques on obtient

$$U'' = 0, \quad U'_1 - aU' = \frac{\lambda}{u^2+1} \quad (\lambda \text{ const.}),$$

équations qui donnent U et U_1 ; par changement convenable d'origine on voit que S est un conoïde dont l'axe est perpendiculaire à xOz . De là résulte que les Δ sont concourantes et que les projections des lignes asymptotiques sont des cercles concentriques.

II. Une intégration par parties conduit à une nouvelle intégrale sans logarithme calculable par application régulière du théorème classique des résidus.

EPREUVE PRATIQUE. — On donne, en coordonnées rectangulaires, un point S de coordonnées $x = 0, y = 0, z = a$ et une parabole ayant pour équations

$$y^2 - 2ax = 0, \quad z = 0.$$

On considère le cône (C) qui a pour sommet S et pour directrice la parabole et d'autre part la sphère (Σ) ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - az = 0.$$

On demande de calculer : 1° l'aire de la surface du cône intérieure à la sphère; 2° l'aire de la surface de la sphère intérieure au cône.

Nota. — Pour la première partie on pourra exprimer les coordonnées d'un point du cône à l'aide des deux paramètres u, v définis par

$$x = u, \quad \frac{y}{x} = v.$$

Pour la deuxième partie, si P est un point de la sphère, la droite SP rencontre le plan xOy en un point de coordonnées $\xi, \eta, 0$ et l'on exprimera les coordonnées de P en fonction de ξ, η .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Le calcul des deux intégrales doubles par les procédés classiques ordinaires ne présente aucune difficulté et donne comme résultats

$$\frac{3\pi a^2 \sqrt{2}}{16}, \quad \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4}.$$

(Bordeaux, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On donne les équations paramétriques suivantes d'une surface (S)

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u, v).$$

1° Déterminer la fonction $f(u, v)$ de façon que les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ forment deux systèmes conjugués de la surface (S).

2° Déterminer la fonction $f(u, v)$ de telle sorte que le point P de rencontre avec Oz du plan tangent à la surface en un point $u = u_0$, $v = v_0$ reste le même si v_0 varie, u_0 restant fixe.

Expliquer géométriquement pourquoi dans ces deux cas on trouve la même expression pour $f(u, v)$.

3° Déterminer $f(u, v)$ de façon que les courbes $u = \text{const.}$ soient toutes des courbes planes conjuguées des courbes $v = \text{const.}$ Quelle est alors l'équation cartésienne de la surface (S)? Quelle définition géométrique peut-on en déduire pour cette surface en supposant les axes rectangulaires?

II. On considère la différentielle totale à trois variables indépendantes

$$(yz - y^3) dx + (xy^2 + zx) dy + \varphi(x, y) dz,$$

déterminer la fonction $\varphi(x, y)$ des deux variables x et y de façon que la différentielle totale précédente soit complètement intégrable.

La fonction $\varphi(x, y)$ étant ainsi choisie, intégrer l'équation obtenue en égalant à zéro la différentielle totale.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Les deux premières parties conduisent à la même équation

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} u = 0, \quad f = uV + U,$$

la coïncidence des deux résultats est une conséquence immédiate du théorème classique de M. Königs sur les lignes conjuguées.

Pour la troisième partie, f doit être de la forme précédente, V étant une fonction linéaire de $\sin v$ et $\cos v$. La surface est de la forme générale

$$x^2 + y^2 = F(P) \quad (P \text{ fonction linéaire de } x, y, z)$$

et elle est engendrée par l'ellipse variable

$$x^2 + y^2 = F(\lambda), \quad P = \lambda,$$

dont la loi de variation est évidente.

II. Par un groupement évident de termes on peut, en posant $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, écrire la différentielle totale considérée sous la forme

$$z du + u^2 dv + \varphi(u, v) dz,$$

la condition classique d'intégrabilité donne, puisque φ est indépendant de z ,

$$\varphi = Cu^2 - u;$$

l'équation aux différentielles totales à intégrer s'écrit alors

$$-\frac{u dz - z du}{u^2} + dv + C dz = 0.$$

et son intégration est immédiate, elle donne

$$-\frac{z}{xy} + \frac{y}{x} + Cz = C'.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer (en utilisant la théorie des intégrales d'une variable complexe) l'intégrale réelle

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^3(1-x)^4}}.$$

(Bordeaux, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — En un point M d'une surface rapportée à trois axes rectangulaires $Oxyz$, on considère le plan tangent et la normale.

Le plan tangent coupe Oz en T . Le point M se projette en H sur Oz .

La plus courte distance de Oz et de la normale est AB (A sur Oz , B sur la normale). On construit BC parallèle à Oz et égal à AB et, sur la normale, on prend D tel que CD soit parallèle au plan Oxy .

Étudier les surfaces telles que

$$(1) \quad \overline{TH} = \varphi(\overline{CD}),$$

φ étant une fonction arbitrairement donnée.

1° Écrire l'équation aux dérivées partielles (1) en coordonnées rectangulaires puis en coordonnées semi polaires.

2° En trouver, dans les deux systèmes de coordonnées, une intégrale complète. Intersections par des plans parallèles à Oxy des surfaces représentées par cette intégrale complète.

3° Toujours dans les deux systèmes de coordonnées, former l'équation aux dérivées partielles du second ordre des surfaces (1).

4° Déterminer complètement les surfaces telles que $\overline{TH} = \overline{CD}$.

SOLUTION. — 1° On a très aisément

$$(2) \quad \overline{TH} = px + qy, \quad \overline{CD} = qx - py,$$

et l'équation (1) est, par suite,

$$(3) \quad px + qy = \varphi(qx - py).$$

Les segments (2) sont susceptibles de signes mais ceci n'influe pas sur la structure générale de l'équation (3) tant que la fonction φ n'est pas déterminée. En coordonnées semi-polaires, (3) prend la forme

$$(4) \quad r \frac{\partial z}{\partial r} = \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right).$$

2° Il est évidemment indiqué de commencer l'intégration sur (4). En posant

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \alpha, \quad \text{on a} \quad r \frac{\partial z}{\partial r} = \varphi(\alpha),$$

d'où

$$z = \alpha \theta + \varphi(\alpha) \log r + c.$$

Ceci est une intégrale complète. Elle représente des hélicoïdes dont l'intersection par des plans de cote z constante dans des spirales logarithmiques.

3° L'équation (3) constitue une *intégrale intermédiaire* pour l'équation de Monge-Ampère

$$(x^2 + y^2)(rt - s^2) + (px - qy)(t - r) - 2(py + qx)s - p^2 - q^2 = 0.$$

De même (4) pour

$$r \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} \right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial z}{\partial r} + r \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right).$$

4° Ici il faut considérer la double équation

$$r \frac{\partial z}{\partial r} = \pm \frac{\partial z}{\partial \theta},$$

dont l'intégrale générale est

$$z = f(\theta \pm \log r).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le problème de l'épreuve théorique conduit à la considération des hélicoïdes*

$$z = a\theta + b \log r + c,$$

où a, b, c sont trois constantes et r, θ, z des coordonnées semi-polaires.

On demande les lignes asymptotiques de ces hélicoïdes.

SOLUTION. — La surface

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z(r, \theta)$$

a ses lignes asymptotiques définies par l'équation différentielle

$$r \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} dr^2 + 2 \left(r \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) dr d\theta + r \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial z}{\partial r} \right) d\theta^2 = 0.$$

Bien que ce ne soit pas indispensable pour le cas présent, c'est un excellent exercice que de former cette équation qui s'applique évidemment à une surface quelconque donnée en coordonnées semi-polaires. Pour les hélicoïdes indiqués elle se réduit à

$$br^2 d\theta^2 - 2ar dr d\theta - b dr^2 = 0.$$

Les variables sont immédiatement séparées et l'on a deux familles de spirales logarithmiques pour projection des asymptotiques sur le plan $z = 0$.

(Toulouse, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On donne l'équation aux dérivées partielles

$$x(cz - by)p + y(ax - cz)q = z(by - ax).$$

Déterminer :

1° L'intégrale générale;

2° L'intégrale qui passe par la droite

$$ax = by = cz;$$

3° Le plan tangent à cette dernière surface au point

$$x = \frac{k}{a}, \quad y = \frac{k}{b}, \quad z = \frac{k}{c}.$$

II. Trouver les trajectoires orthogonales des cercles

$$x = a + r \cos \theta, \quad y = b + r \sin \theta;$$

où a, b, r sont fonctions du paramètre u , en déterminant θ en fonction de u .

Application. — Trouver les trajectoires orthogonales des cercles normaux à l'axe Ox et à la parabole $y = x^2$ en un de leurs points d'intersection.

M étant ce point commun, on aura intérêt à employer comme paramètre u l'angle de la tangente en M à la parabole avec Ox .

ÉPREUVE PRATIQUE. — III. On donne l'équation

$$(x + 1)y'' - 2y' - (x - 1)y = 2xe^{-x}.$$

L'intégrer sachant que l'équation sans second membre admet une intégrale de la forme e^{rx} .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Le système associé donne les intégrales premières

$$ax + by + cz = \alpha, \quad xyz = \beta;$$

d'où l'intégrale générale

$$ax + by + cz = \varphi(xyz)$$

et l'intégrale particulière

$$(ax + by + cz)^3 = 27abcxyz.$$

C'est un cône, qui admet $ax = by = cz$ comme génératrice double.

II. La relation d'orthogonalité

$$\begin{aligned} \sin \theta \, dx - \cos \theta \, dy &= 0, \\ da \sin \theta - db \cos \theta - r \, d\theta &= 0 \end{aligned}$$

donne, en posant $\text{tang} \frac{\theta}{2} = v$,

$$a' \frac{2v}{1+v^2} - b' \frac{1-v^2}{1+v^2} - \frac{2r}{1+v^2} \frac{dv}{du} = 0,$$

c'est une équation de Riccati.

Dans le cas particulier et avec la notation indiquée,

$$a = \frac{x}{2}, \quad b = 0, \quad 2x = \text{tang} u, \quad r = \frac{x}{2 \cos u} = \frac{\text{tang} u}{4 \cos^2 u}$$

et l'équation devient

$$v - \text{tang} u \frac{dv}{du} = 0.$$

III. L'équation sans second membre admet l'intégrale

$$y = e^{+x}.$$

La substitution $y = ze^{+x}$ donne

$$(x+1)z' + 2xz' = 2xe^{-2x};$$

d'où l'intégrale générale demandée

$$y = e^{-x}(x+1) + C e^{-x} \left(x^2 + 3x + \frac{5}{2} \right).$$

(Besançon, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (x^2 - h)y = 0$$

ne change pas quand on pose

$$x = x_1 + k, \quad y = e^{kx} y_1 \quad (k \text{ const.}).$$

Si l'on connaît une solution $F(x)$, on peut d'après ce qui précède en écrire une autre.

Obtient-on l'intégrale générale en ajoutant ces solutions respectivement multipliées par des constantes ?

Quelle est l'intégrale générale ?

II. Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$z + xp - x^2 yq^2 - x^3 pq = 0.$$

Étudier la surface intégrale singulière.

ÉPREUVE PRATIQUE. — III. On donne la surface S ,

$$x = u^2 + v, \quad y = u^3 + uv, \quad z = u^4 + \frac{2}{3} u^2 v.$$

1° Déterminer le plan tangent.

2° Quelle relation existe entre le plan tangent au point M et le plan osculateur au même point M de la courbe $v = 0$?

3° Déterminer les lignes asymptotiques de S .

4° Construire les projections sur xOy des lignes asymptotiques passant par $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $z = \frac{4}{3}$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Par la substitution donnée, l'équation donnée ne change pas. Ainsi à la solution $y = F(x)$ correspond

$$y = e^{kx} F(x - k).$$

Ces deux intégrales ne sont pas indépendantes si

$$\begin{vmatrix} F(x) & e^{kx} F(x - k) \\ F'(x) & e^{kx} F'(x - k) + k e^{kx} F(x - k) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{F'(x - k)}{F(x - k)} - (x - k) = \frac{F'(x)}{F(x)} - x = C, \quad F(x) = e^{\frac{x^2}{2} + Cx}.$$

Des fonctions de cette forme satisfont à l'équation donnée

$$(G^2 + 1 - h = 0);$$

d'où l'intégrale générale

$$y = C_1 e^{\frac{x^2}{2} + \sqrt{h-1}x} + C_2 e^{\frac{x^2}{2} - \sqrt{h-1}x}.$$

II. Le système associé donne la combinaison

$$\frac{dx}{x} + \frac{dq}{q} = 0, \quad qx = a,$$

d'où l'intégrale complète

$$z = \frac{ay + b(ax - 1)}{x}$$

et l'intégrale singulière

$$z = \frac{y}{x^2}.$$

$$\text{III. } 1^\circ \quad 2u^2(3u^2 + v)(X - x)$$

$$- 4u(2u^2 + v)(Y - y) + 3(u^2 + v)(Z - z) = 0.$$

$$2^\circ \quad 6u^4(X - x) - 8u^3(Y - y) + 3u^2(Z - z) = 0,$$

identique au plan tangent pour $v = 0$.

$$3^\circ \quad (5u^2v + v^2) du^2 - 2u^3 du dv = 0;$$

$$v = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{C - \sqrt{u}}.$$

4° Ce sont la génératrice et la ligne asymptotique passant par

$$u = 1, \quad v = \frac{3}{2}.$$

(Besançon, octobre 1925.)

BIBLIOGRAPHIE.

Livres récents.

La chronique bibliographique des *Nouvelles Annales* est très loin d'être à jour et je ne pense rien apprendre à nos Lecteurs en l'avouant ici. Il faut bien dire que, dans notre Revue, c'est question un peu secondaire et que, lorsqu'en octobre 1922 les *Nouvelles Annales* reprirent leur publication,

le nombre d'articles et d'énoncés à publier imposait, à cet égard, quelques restrictions.

La situation actuelle m'amène à modifier légèrement la présentation de nos articles de Bibliographie. Dans une publication qui n'est pas spécialement bibliographique, il n'y a pas intérêt, me semble-t-il, à détacher l'analyse de chaque livre. On réalisera une notable économie de place, on pourra donc suivre plus vite et de plus près les dernières publications, en adoptant la forme plus souple, plus vivante aussi, d'une Revue périodique des Livres récents. C'est ce que nous ferons désormais, en rapprochant d'ailleurs, autant que possible, les Ouvrages qui traitent de sujets connexes.

Voici d'abord, parus l'an passé, deux volumes qui concernent les Mathématiques Générales : la seconde édition des *Leçons de M. G. de L. ZORETTI* (1); le Tome II du *Cours de M. G. de G. VERRIEST* (2). Le premier de ces livres est, on peut le dire sans exagération, universellement connu et a exercé, sur l'orientation *pratique* de l'enseignement des Mathématiques Générales, la plus heureuse influence; il suffira donc de vous indiquer ici que la deuxième édition comporte de nombreuses additions, relatives surtout aux méthodes graphiques en Analyse et en Statique. Quant à l'Ouvrage de M. Verriest, j'ai déjà eu l'occasion de vous signaler (3) sa principale originalité : l'heureux développement que donne l'Auteur à des applications empruntées à la Physique et à la Chimie physique. Le Tome II (Calcul intégral, Géométrie à 3 dimensions) est peut-être, à cet égard, le plus caractéristique et vous y trouverez ainsi, après le Chapitre sur les intégrales curvilignes, un substantiel exposé (que je vous avais annoncé par avance) des principes mathématiques de la thermodynamique.

Le Cours de M. Verriest s'adresse plus spécialement aux étudiants en Chimie et reproduit des Leçons faites à l'Université de Louvain, en vue de la préparation du Doctorat de Chimie. Dans nos Cours de Mathématiques générales, il est difficile, à cause de la diversité des élèves, de développer des applications qui, pourtant, relèvent essentiellement de l'enseignement mathématique : c'est à juste titre que M. Zoretti, comme il l'indique dans sa préface, les écarte d'un livre destiné à *tous les étudiants*. Mais vous concevez que les deux Ouvrages en question, dont l'un ou l'autre réalise très parfaitement la pensée de l'Auteur, soient bien loin de faire double emploi.

Les *Leçons de Cinématique* de R. BRICARD (4), publiées tout dernièrement, et qui développent un Cours professé par l'Auteur à l'École

(1) Gauthier-Villars et C^{ie}; 788 pages : 60^{fr}.

(2) Éditions Universitas (Louvain) et Gauthier-Villars et C^{ie}; 388 pages ; 38^{fr}.

(3) *N. A.*, 5^e série, t. II, 1923-1924, p. 186.

(4) Gauthier-Villars et C^{ie}, éditeurs. Tome I : *Cinématique théorique*; 337 pages; 45^{fr}.

Centrale, doivent, à tous égards, retenir l'attention. Dans l'enseignement de la Mécanique rationnelle la Cinématique apparaît forcément comme une introduction à la Dynamique, de sorte qu'il est difficile de donner à cette étude toute l'ampleur désirable et de mettre assez en relief l'efficacité des méthodes ainsi que leur importance pour la recherche géométrique. Je ne pense pas que cette importance, dont témoignent entre autres les travaux de Mannheim, de Darboux et de M. Kœnigs, risque d'être méconnue dans notre pays; mais le besoin se faisait pourtant sentir d'un nouvel exposé autonome de la Cinématique qui puisse compléter, pour les étudiants, les traités généraux de Mécanique. C'est cet exposé que nous donne M. Bricard et nul ne pouvait être mieux désigné pour le réaliser: il y fallait la souplesse et l'originalité de son esprit, l'élégance géométrique, une érudition sûre et toujours discrète; toutes qualités que les Lecteurs de cette Revue ont eu bien souvent l'occasion d'apprécier.

L'Ouvrage comporte trois parties dont la première expose quelques compléments géométriques (courbes gauches, surfaces réglées, éléments de la Géométrie réglée). La seconde partie (Déplacement et mouvement) débute par un Chapitre sur la théorie, fort importante et souvent négligée, des déplacements finis; la cinématique proprement dite y est ensuite développée très complètement et il faut noter ici, en particulier, l'étude approfondie, si élégante, des propriétés géométriques qui concernent le mouvement le plus général d'un solide. Enfin la troisième partie est consacrée à des applications très variées et vous y retrouverez notamment l'intéressante étude, publiée ici même, sur la configuration de Morlèy-Pétersen ⁽¹⁾. Un tome II, à paraître, complétera, en ce qui concerne les Mécanismes, cet Ouvrage vraiment fondamental.

Je ne veux pas terminer cet article sans vous signaler, en m'excusant de le faire aussi tardivement, les *Leçons de Mécanique rationnelle* de F. BOURN ⁽²⁾ (Cours de l'École des Mines de la Faculté technique de Mons). Le Tome premier de cette Oeuvre, excellent traité classique de Mécanique, comprend l'étude du calcul vectoriel (utilisé systématiquement par la suite), de la cinématique et de la statique, de la théorie du potentiel. Nos étudiants apprécieront ce Livre, où de très nombreux exercices, originaux et fort bien choisis, viennent compléter un exposé très clair.

J. P.

(1) N. A., 5^e série, t. II, 1923-1924, p. 41.

(2) Leich (à Mons) et Blanchard, éditeurs, Tome I, 600 pages; 50^{fr.}

**SUR UN SYSTÈME DE VECTEURS COMPLEXES ET SON APPLICATION
A L'ÉTUDE DE LA CONFIGURATION DE MORLEY-PETERSEN;**

PAR JOSEPH PÉRÈS.

1. Dans son *Introduction géométrique à la Mécanique rationnelle* ⁽¹⁾, Charles Cailler utilise, après Study ⁽²⁾ et plusieurs autres auteurs, des quantités complexes dans lesquelles l'unité complexe ε est définie par la condition

$$(1) \quad \varepsilon^2 = 0.$$

Il en tire, en particulier, une élégante identification de la Géométrie réglée et de la Géométrie ponctuelle sur une sphère.

En se plaçant à ce point de vue (qui est d'ailleurs celui de Petersen), on rattache à des propriétés plus simples l'intéressante configuration de Morley-Petersen, envisagée, ici même, par M. Bricard ⁽³⁾. En revenant ici sur ce sujet, nous aurons l'occasion de donner au lecteur une idée, sommaire bien que pratiquement suffisante, de l'emploi géométrique des nombres complexes du type en question : il faut surtout en retenir une extension du champ de la théorie des vecteurs, extension si évidente qu'il serait fastidieux d'en donner le développement systématique et qu'il suffit d'envisager quelques propriétés simples.

2. Notons d'abord que des quantités complexes de la forme

$$a + b\varepsilon,$$

où l'unité complexe vérifie la condition (1), obéissent aux règles du calcul algébrique en ce qui concerne les trois premières opérations. Tout se passe comme si ε était une variable petite, dont on négligerait le carré et l'on voit que l'introduction de telles quan-

⁽¹⁾ Publiée par H. Fehr et R. Wavre; Gauthier-Villars et Georg, éditeurs.

⁽²⁾ *Geometrie der dynamen*.

⁽³⁾ *N. A.*, 5^e série. t. II, 1923-24, p. 41.

Ann. de Mathémat., 6^e série, t. I. (Avril 1926.)

tités dans l'enseignement classique ne peut prêter à nulle objection.

Pour la division, il faut faire un peu attention : le résultat de l'opération n'est unique et bien déterminé que si le diviseur a sa partie réelle différente du zéro. C'est le seul cas qui ait quelque intérêt pour la suite et nous nous dispensons d'insister davantage sur des propriétés très évidentes.

3. Prenons des axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ et soit un torseur T , non réduit à un couple. Soient XYZ, LMN les composantes de la résultante et du moment à l'origine de ce torseur. Nous identifierons le torseur T avec un *vecteur-complexe* ayant pour composantes sur les axes les quantités complexes

$$\xi = X + \varepsilon L, \quad \eta = Y + \varepsilon M, \quad \zeta = Z + \varepsilon N.$$

Le torseur sera donc désigné par \vec{T} , avec la flèche qui distingue les vecteurs et, dans toute la suite, les termes de *torseur* et *vecteur-complexe* seront synonymes.

Tous les concepts fondamentaux de la théorie des vecteurs se généralisent immédiatement. Soit d'abord le torseur (ou vecteur-complexe) $\lambda \vec{T}$ déduit du premier en multipliant les composantes par le scalaire complexe $\lambda = l + m\varepsilon$; la direction de la résultante n'est pas modifiée et au moment multiplié par un scalaire vient s'ajouter un vecteur parallèle à cette résultante, de sorte que \vec{T} et $\lambda \vec{T}$ ont le même axe central. Si donc nous définissons une droite de l'espace par un torseur dont elle soit le support (ou axe central), ce torseur ne sera déterminé qu'à un facteur près (*scalaire complexe*). Pour définir ainsi une droite, on peut toujours choisir un torseur réduit à un vecteur unique; les composantes ξ, η, ζ condensent alors les coordonnées plückériennes de la droite. Ces composantes seront réelles dans le seul cas où la droite considérée passe par l'origine.

Le carré de la longueur de T sera

$$T^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\varepsilon(LX + MY + NZ),$$

d'où

$$|T| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + \varepsilon \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}},$$

où apparaît la longueur de la résultante et l'automoment.

En particulier le torseur $\frac{1}{|\vec{T}|} \vec{T}$ aura la longueur unité (il est réduit à un vecteur unique) et définira les cosinus directeurs de la droite-support. Les droites passant par l'origine auront des cosinus directeurs réels; pour les autres droites ils seront complexes.

4. Le produit géométrique $\vec{T} \times \vec{T}_1$ sera défini par

$$\begin{aligned} \vec{T} \times \vec{T}_1 &= \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 \\ &= \text{XX}_1 + \text{YY}_1 + \text{ZZ}_1 + \varepsilon(\text{XL}_1 + \text{YM}_1 + \text{ZN}_1 + \text{X}_1\text{L} + \text{Y}_1\text{M} + \text{Z}_1\text{N}) \end{aligned}$$

invariant où figure (coefficient de ε) le moment relatif des deux torseurs. Il est immédiat que ce produit s'annule dans le seul cas où les supports des deux torseurs sont *concourants et rectangulaires*.

Notons enfin que, λ et λ_1 étant deux scalaires complexes,

$$\vec{T}' = \lambda \vec{T} + \lambda_1 \vec{T}_1$$

représente n'importe quel torseur dont l'axe rencontre, à angle droit, les axes de \vec{T} et \vec{T}_1 . On s'en rend compte en remarquant que tout torseur $\vec{\mathcal{C}}$, porté par la perpendiculaire commune aux axes de \vec{T} et \vec{T}_1 , donne un produit géométrique nul avec \vec{T} et \vec{T}_1 , donc aussi avec \vec{T}' .

5. Les remarques précédentes permettent d'étendre à la géométrie réglée générale tous résultats concernant des droites concourantes en un point O. Celles-ci étant définies par des vecteurs réels, les autres par des vecteurs complexes, les calculs faits dans le premier cas s'appliquent immédiatement au second. Pour généraliser les résultats, il suffit de noter qu'aux droites passant par O et situées dans un plan correspondent des droites qui ont une même perpendiculaire commune. A la perpendiculaire commune à deux droites passant par O correspond la perpendiculaire commune à deux droites quelconques.

Ceci posé, soit un trièdre formé par les trois droites A, B, C. Il est élémentaire que les trois plans passant par chacune des arêtes et normaux au plan des deux autres, se coupent suivant une

même droite. Cet énoncé se généralisera évidemment au cas de trois droites non concourantes quelconques A, B, C , et l'on retrouve précisément la configuration de Morley-Petersen. On est en effet conduit à l'énoncé suivant :

Soient A', B', C' les perpendiculaires communes aux droites A, B, C prises deux à deux et enfin A'', B'', C'' les perpendiculaires communes aux couples AA', BB', CC' : ces trois dernières droites coupent à angle droit une même droite D .

Voici d'ailleurs une démonstration rapide qui, n'utilisant que la notion de produit géométrique, s'applique sans modification aussi bien au cas de A, B, C concourantes qu'au cas général.

Nous déterminons les droites par des torseurs (ou vecteurs-complexes) \vec{A} pour la droite A , etc. Il suffit d'établir une relation linéaire et homogène, à coefficients complexes entre \vec{A}'', \vec{B}'' et \vec{C}'' . Or A'' rencontre à angle droit la perpendiculaire commune A' à B et C ; donc

$$\vec{A}'' = \lambda \vec{B} + \mu \vec{C}.$$

De plus $\vec{A}'' \times \vec{A}$ doit être nul, ce que l'on vérifie en prenant

$$\lambda = \vec{A} \times \vec{C}, \quad \mu = -\vec{A} \times \vec{B}.$$

Donc

$$\vec{A}'' = \vec{B} (\vec{A} \times \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \times \vec{B}),$$

$$\vec{B}'' = \vec{C} (\vec{B} \times \vec{A}) - \vec{A} (\vec{B} \times \vec{C}),$$

$$\vec{C}'' = \vec{A} (\vec{C} \times \vec{B}) - \vec{B} (\vec{C} \times \vec{A}),$$

et il en résulte

$$\vec{A}'' + \vec{B}'' + \vec{C}'' = 0,$$

ce qui établit l'existence de la configuration de Morley-Petersen.

6. On rattachera aussi à des propriétés connues du trièdre les résultats sur les *bissectrices* de trois droites orientées quelconques qu'utilise M. Bricard dans son élégante démonstration du Théorème de Morley-Petersen.

On constate d'abord que, dans l'ordre d'idées qui nous occupe, il faut définir les bissectrices de deux droites orientées quelconques comme le fait M. Bricard. A et B étant ces deux droites on

mène les parallèles (de même orientation) par le milieu i de leur perpendiculaire commune et les bissectrices, au sens ordinaire du mot, intérieures ou extérieures des deux droites seront encore dites bissectrices de A et B.

Nous pouvons nous borner à rappeler les énoncés de M. Bricard : A, B, C étant trois droites orientées quelconques, LMN, L'M'N' les bissectrices, intérieures ou extérieures, de ces droites prises deux à deux; L', M', N' ont une même perpendiculaire commune. De même L', M, N, etc. On peut d'ailleurs ajouter la propriété suivante : les perpendiculaires communes aux couples AL, BM, CN coupent à angle droit une même droite; de même en remplaçant LMN par L'M'N', etc.

7. Sans insister sur d'autres applications des considérations précédentes (¹), nous dirons quelques mots de l'interprétation géométrique d'une substitution orthogonale à coefficients complexes.

Soient $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les torseurs unitaires (simples vecteurs) portés par les axes Ox, Oy, Oz respectivement. On a évidemment

$$T = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}.$$

Prenons de nouveaux axes rectangulaires O'x'y'z' définis par $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$; on aura pour les composantes complexes ξ', η', ζ' de \vec{T} sur ces axes

$$\vec{T} = \xi' \vec{i}' + \eta' \vec{j}' + \zeta' \vec{k}'.$$

Or les composantes de $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ sur les premiers axes sont les cosinus directeurs, en général complexes, des arêtes du nouveau trièdre par rapport à Oxyz. On passera donc des $\xi\eta\zeta$ aux $\xi'\eta'\zeta'$ par une substitution orthogonale à coefficients complexes. Ainsi une telle substitution, effectuée sur les composantes complexes des torseurs équivaut à un changement (d'ailleurs quelconque) du système de référence rectangulaire.

Ce résultat peut aussi se déduire du fait que T² (cf. n° 5) a une signification indépendante des axes choisis.

(¹) Cf., *Comptes rendus*, 15 mars 1926, p. 680.

[R1b α]

SUR LE CENTRE INSTANTANÉ DE MOUVEMENT
D'UNE FIGURE PLANE VARIABLE AVEC CONSERVATION D'AIRE;

PAR N. ABRAMESCO.

1. Étant donnés deux segments AB et $A'B'$, les points I , tels que les aires $AIB = A'IB'$, sont sur une droite Δ_c qui passe par l'intersection R des droites AB et $A'B'$, et qui est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances aux droites AB et $A'B'$ soit égal à $A'B' : AB$.

Étant donnés deux triangles ABC et $A'B'C'$, de même aire, il existe dans leur plan un point I , tel que les aires $AIB = A'IB'$, $BIC = B'IC'$, $CIA = C'IA'$; ce point est à l'intersection des droites $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ correspondant aux égalités des aires $BIC = B'IC'$, $CIA = C'IA'$, $AIB = A'IB'$. A', B', C' étant des homologues des points A, B, C , le point I est son propre homologue dans les triangles $ABC, A'B'C'$.

Étant données deux figures F et F' , de même aire, telles que les triangles $ABC, A'B'C'$ soient homologues dans les figures F et F' , on sait ⁽¹⁾ qu'il existe un point I qui est son propre homologue dans les figures F et F' .

Considérons une figure plane F variable qui a une déformation homogène avec conservation d'aire. Soit ABC un triangle de la figure F . Le mouvement de cette figure est connu si l'on donne les courbes (A) et (B) décrites par les points A et B , les enveloppes (γ) et (β) des côtés AB et AC et l'aire du triangle ABC . Soit F' la position infiniment voisine de la figure F et $A'B'C'$ l'homologue du triangle ABC dans la figure F' . Si $A'B'$ tend vers AB , le point R de rencontre de AB et $A'B'$ tend vers le point γ de con-

⁽¹⁾ N. ABRAMESCO, *Sur le mouvement des figures planes variables avec conservation de similitude ou d'aire* (Société Roumaine des Sciences, Bulletin des Sciences mathématiques pures et appliquées, XXVI, janvier-juillet 1924).

tact de AB avec son enveloppe (γ), et le point I est sur une droite qui passe par γ et comme $A'B' : AB \rightarrow I$, le lieu des points I est sur la bissectrice extérieure de l'angle des droites, AB et A'B', c'est-à-dire tend vers la normale en γ à la courbe (γ).

De même, le point I est sur la normale en β à la courbe (β). Donc le point de contact α de BC avec son enveloppe (α) est le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur BC.

Donc, dans la déformation homogène d'une figure plane variable avec conservation d'aire, les normales aux enveloppes des droites de la figure concourent, à un instant donné, en un point I. Ce point I est un centre instantané de mouvement, analogue au centre instantané de rotation dans le cas d'une figure de forme invariable.

Pour trouver la tangente en C à la courbe décrite par le point C de la figure F, on voit que, dans la déformation du triangle variable ABC, on connaît cinq normales, aux sommets A et B, aux enveloppes des côtés AB, BC, CA, et donc on peut employer la méthode de Mannheim ⁽¹⁾ pour trouver la sixième normale, en C, et donc la tangente en C.

2. On peut étendre les mêmes considérations pour une figure variable qui a une déformation homogène avec conservation de volume. On voit premièrement, qu'étant donnés deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D', de même volume, il existe un point I, tel que les volumes

$$IABC = IA'B'C', \quad IBCD = IB'C'D', \quad ICDA = IC'D'A',$$

et donc

$$IBDA = IB'D'A'.$$

On en déduit facilement que (P) étant un plan de la figure en mouvement, les plans menés par les caractéristiques des plans (P), perpendiculairement aux plans (P), concourent en un même point I.

⁽¹⁾ MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 49; M. D'OCAGNE, *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I, p. 126.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(SESSION DE 1925).

Problème de Calcul différentiel et intégral.

On désigne par k une constante positive, par $f(x)$ une fonction positive et continue pour toutes les valeurs positives de x , ayant une dérivée première continue; $f(x)$ peut d'ailleurs être discontinue pour $x = 0$. On considère alors l'intégrale de l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + f(x) = 0,$$

définie par les valeurs initiales x_0 et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = x'_0$, pour
 $t = t_0$ ($x_0 > 0$).

1° Montrer qu'il existe un nombre positif T , fini ou infini, tel que l'intégrale $x(t)$ soit définie et positive à l'intérieur de l'intervalle $(t_0, t_0 + T)$, et tende vers zéro quand t tend vers $t_0 + T$.

Indiquer comment varie $x(t)$ dans cet intervalle.

2° Si $f(x)$ reste supérieure à un nombre positif quand x tend vers zéro, T possède une valeur finie. Il est d'ailleurs possible de choisir x_0 et x'_0 de manière que la valeur correspondante de T soit finie, pour toutes les fonctions $f(x)$ satisfaisant aux conditions du premier alinéa.

3° En désignant par $F(x)$ une fonction primitive de $-f(x)$ et posant

$$G(x) = 2 F(x) - 2 F(x_0) + x_0'^2,$$

démontrer que l'inégalité $\left|\frac{dx}{dt}\right| < \sqrt{G(x)}$ est vérifiée dans tout l'intervalle $(t_0, t_0 + T)$ et que si $x'_0 \leq 0$, il en est de même de l'inégalité

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| > \sqrt{G(x)} - k(x_0 - x).$$

Si $f(x)$ est, pour x voisin de zéro, un infiniment grand ayant pour partie principale $\frac{\mu}{x^{1+\alpha}}$ ($\alpha > 0$), déduire des deux inégalités précédentes la valeur principale de $x(t)$ en fonction de l'infiniment petit $(t_0 + T - t)$.

[On suppose, pour éviter toute difficulté accessoire, que les termes négligés dans l'expression de $f(x)$ sont d'un ordre déterminé et inférieur à $1 + \alpha$.]

4° Les hypothèses précédentes étant conservées et la fonction $\varphi_n(x)$ étant définie, à partir de la fonction $\varphi_0(x) = \sqrt{G(x)}$, par la formule de récurrence

$$\varphi_{n+1}(x) = |x'_0| - k(x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x)}{\varphi_n(x)} dx,$$

démontrer que, si x_0 est suffisamment petit, la fonction $\varphi_1(x)$ reste positive dans l'intervalle $(t_0, t_0 + T)$, que les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, sont approchées alternativement par excès et par défaut de $-\frac{dx}{dt}$ regardée comme fonction de x , et qu'elles forment une suite convergente dans tout l'intervalle $(x_0, 0)$.

5° Supposons maintenant que $f(x)$ soit holomorphe pour $x = 0$ et développable en série de la forme

$$a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

les a_n étant positifs ou nuls, et posons

$$y = -kx + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

$$z = -kx + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n x^n,$$

les α_n et les β_n étant respectivement déterminés par la condition que y et z vérifient formellement les équations

$$(2) \quad y \left(k + \frac{dy}{dx} \right) + f(x) = 0,$$

$$(3) \quad z \left(k + \frac{z}{x} \right) + f(x) = 0.$$

Comparer les valeurs de α_n et β_n et en déduire que la série y

possède, comme la série z un rayon de convergence fini. Montrer que ce résultat subsiste quand certains des a_n sont négatifs.

6° Dédurre de ce qui précède que si $f(x)$ est de la forme considérée au n° 5, il existe une intégrale positive $x(t)$, de l'équation (1), pour laquelle T est infini, $x(t)$ étant développable suivant les puissances d'exposants positifs et entiers de $e^{-k(t-t_0)}$.

Montrer, par un exemple simple, qu'il n'en est plus toujours ainsi quand $f(x)$ est de la forme

$$a_1x + a_2x^2 + \dots$$

avec $a_1 > 0$.

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Le procédé classique ramène l'équation

$$(1) \quad x'' + kx' + f(x) = 0$$

au système

$$(2) \quad y \frac{dy}{dx} + ky + f(x) = 0,$$

$$(3) \quad t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{y}.$$

L'équation (2) n'est pas intégrable dans le cas général; le cas simple $f(x) \equiv a_1x + a_2$, où a_1 et a_2 sont constants, s'intègre directement sous forme (1) sans passer par (2). Il est commode, pour abrégier le langage, d'appeler t le temps, $x' = \frac{dx}{dt}$ et $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ vitesse et accélération.

L'inégalité du texte

$$(4) \quad |x'| < \sqrt{G(x)}$$

est fournie immédiatement par l'équation des forces vives, obtenue en multipliant (1) par $2x'$, puis intégrant; d'où, avec les notations de l'énoncé

$$(5) \quad x'^2 = G(x) - 2k \int_{t_0}^t x'^2 dt.$$

Cela prouve de plus que $G(x)$ est positive, si l'on y remplace x par $x(t)$; si donc ξ est un zéro positif de $G(x)$, comme $G(x)$ est une fonction décroissante de x , quand x est positif, la fonction $x(t)$ ne pourra dépasser ξ ; exemple simple :

$$f(x) \equiv ax, \quad \text{avec } a > 0, \quad \xi = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{a}}.$$

On peut, d'autre part, remarquer que, si k ne doit pas prendre diverses valeurs constantes, on peut, sans particulariser, supposer $k = 1$; car le changement de fonction et variable

$$(6) \quad kt = T, \quad x = X, \quad F(X) \equiv \frac{f(x)}{k^2}$$

donne la nouvelle équation

$$(7) \quad \frac{d^2 X}{dT^2} + \frac{dX}{dT} + F(X) = 0,$$

et, si l'on adopte ensuite de petites lettres, on retrouve l'équation du début avec $k = 1$.

I, II. Deux cas suivant que l'on a $x'_0 > 0$ ou $x'_0 < 0$.

Si l'on suppose $x'_0 > 0$, x''_0 est négatif, donc x' décroît pendant un certain temps : nous allons montrer que, si pour $x > x_0$, $f(x)$ a une limite inférieure m positive non nulle, le laps de temps où x' reste positif et non nul est fini.

Supposons t tel que, de t_0 à t , x' reste positif, non nul, de sorte que $x > x_0$. On écrit

$$(8) \quad x'' = -kx' - f(x),$$

$$(9) \quad x' = x'_0 - k(x - x_0) - \int_{t_0}^t f(x) dt.$$

La valeur (9) de x' , puisque $x > x_0$ et $f(x) > m$, est évidemment inférieure à $x'_0 - m(t - t_0)$ et, comme x' est supposée positive, on a

$$(10) \quad t - t_0 < \frac{x'_0}{m}.$$

Donc, entre l'époque t_0 et l'époque $t_0 + \frac{x'_0}{m}$, il existe une époque θ où la vitesse $x'(\theta)$ s'annule, tandis que l'accéléra-

tion $x''(\theta)$ se réduit à $-f[x(\theta)]$, valeur non nulle et négative; la vitesse, à l'époque θ , continue donc à décroître, devient négative. Un décalage de l'origine des temps nous autorise donc à nous borner désormais à l'hypothèse $x'_0 < 0$: c'est ce que fait d'ailleurs l'énoncé :

Soit donc $x'_0 < 0$: nous allons voir que $x(t)$ décroît et atteint en un temps fini tout point $x_1 (0 \leq x_1 < x_0)$, tel qu'entre x_0 et x_1 la limite inférieure de $f(x)$ soit un nombre m positif non nul.

(Pour simplifier l'écriture, supposons $k = 1$). L'équation

$$x'' = -x' - f(x)$$

montre que, si $|x'_0| < f(x_0)$, x''_0 est négatif; donc x' décroît au début et par suite la quantité positive $|x'|$ croît : ce résultat vaut tant que $|x'|$ reste inférieur à $f(x)$.

Au contraire, si $|x'_0| > f(x_0)$, x' croît d'abord, donc $|x'|$ décroît; cela vaut tant que $|x'|$ surpasse $f(x)$, ce qui ne peut avoir lieu que si $|x'|$ surpasse m .

Conclusion. — Si au début du mouvement on a $|x'_0| > m$, $|x'(t)|$ peut avoir des alternatives de croissance ou décroissance, mais il reste toujours supérieur à m ; si, au début du mouvement, on a $|x'_0| < m$, $|x'(t)|$ croît au moins au début; s'il n'atteint pas m , il reste supérieur à $|x'_0|$; s'il atteint m , il ne peut plus retomber en dessous de m . De toutes façons $|x'|$ reste supérieur au plus petit des deux nombres $|x'_0|$, m et l'intervalle $x_0 x_1$ est couvert en un temps inférieur au plus grand des deux nombres

$$\frac{x_0 - x_1}{m}, \quad \frac{x_0 - x_1}{|x'_0|},$$

le mobile se dirigeant toujours de x_0 vers l'origine.

Si donc la limite inférieure de $f(x)$ entre x_0 et 0 est un nombre positif non nul, le temps T de l'énoncé est fini.

Supposons qu'entre ε (ε positif très petit) et x_0 la limite inférieure de $f(x)$ soit positive non nulle, mais que $f(x)$ tende vers zéro si x tend vers zéro [autrement dit $f(+0) = 0$; la valeur exacte de $f(0)$, puisque l'énoncé admet une discontinuité pour $x = 0$, importe peu]. Nous choisirons des nombres x_0 ,

x_1, \dots, x_n, \dots tendant vers zéro d'après une loi arbitraire, en décroissant constamment quand n croît. Le temps T_n , nécessaire pour atteindre x_n , croît avec n ; si n devient infini, T_n peut rester fini, il peut devenir infini; on pourra étudier la série dont le terme général est le temps nécessaire pour parcourir le segment $x_{n-1}x_n$. Des exemples simples prouvent l'existence effective des deux cas. Ainsi, A étant une constante positive, inférieure à $\frac{1}{2}$, l'équation

$$(11) \quad x'' + x' + \left(\frac{1}{4} - A^2\right)x = 0$$

donne, avec des constantes α, β ,

$$(12) \quad x = \alpha e^{-\left(\frac{1}{2}-A\right)t} + \beta e^{-\left(\frac{1}{2}+A\right)t}.$$

Si l'on a $\alpha > 0, \beta > 0$, x n'atteint l'origine qu'en un temps T infini; si $\alpha\beta < 0$, T est fini; pour cet exemple, les circonstances changent suivant les valeurs initiales respectives de x_0 et x'_0 .

Au contraire, pour

$$(13) \quad x'' + x' + \left(\frac{1}{4} + A^2\right)x = 0,$$

on a

$$(14) \quad x = \alpha e^{-\frac{t}{2}} \cos(At + \beta),$$

et quelle que soit l'intégrale, T est fini.

Il est intéressant de montrer que, quelle que soit $f(x)$, il y a toujours certaines intégrales (sinon toutes) pour lesquelles T est fini.

Pour cela, démontrons en nous bornant à $x'_0 < 0$, l'inégalité

$$(15) \quad |x'| > \sqrt{G(x)} - (x_0 - x).$$

En effet, posons

$$(16) \quad x' = y = -Y,$$

de sorte que l'équation du début (2) devient (avec $k = 1$),

$$(17) \quad \frac{dY}{dx} = 1 - \frac{f(x)}{Y}.$$

De (17) on déduit, puisque $Y_0 = -x'_0$,

$$(18) \quad Y = -x'_0 - (x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x) dx}{Y}.$$

Au second membre, remplaçons Y par la quantité plus grande $\sqrt{G(x)}$, on a

$$(19) \quad Y > -x'_0 - (x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x) dx}{\sqrt{G(x)}}.$$

Comme $G(x)$ est différent de zéro, le second membre de (19) a toujours un sens : il est manifestement supérieur à $-x'_0 - (x_0 - x)$, puis que $x < x_0$; il est aussi *a fortiori* supérieur à $-x'_0 - x_0$.

Si donc on suppose $x'_0 < 0$ et $-x'_0 - x_0 > 0$, la fonction Y reste toujours supérieure à $-x'_0 - x_0$ et, quelle que soit $f(x)$, on a

$$T < \frac{x_0}{|x_0| - x_0}.$$

Le résultat demandé par l'énoncé pour T se trouve ainsi obtenu, sans se servir de l'inégalité (15); mais pour obtenir (15), il suffit dans (19) de remplacer $f(x)$ par $-\frac{1}{2}G'(x)$ pour voir que la quadrature s'effectue et comme $\sqrt{G(x_0)}$ est le nombre positif ($-x'_0$), on voit que (19) se réduit à (15). D'ailleurs, sous cette forme (15), on peut remarquer que $G(x)$ étant décroissant, $\sqrt{G(x)}$ reste, pour $x < x_0$, supérieur à $\sqrt{G(x_0)}$ et l'on retrouve encore le résultat $|x'| > |x'_0| - x_0$.

Remarque. — Pour démontrer que, si x'_0 est positif, le mobile rétrograde effectivement, on a dû supposer que pour $x > x_0$, la limite inférieure m de $f(x)$ est positive, non nulle. Cette hypothèse est nécessaire, comme le prouve l'exemple suivant, obtenu en déterminant $f(x)$ a priori de façon que l'équation

$$x'' + x' + f(x) = 0$$

admette une intégrale particulière

$$x = \xi - A_1 e^{-t} - A_2 e^{-2t},$$

où A_1, A_2, ξ sont des constantes positives, arbitraires sauf la

restriction $\xi - A_1 - A_2 > 0$. On a aussitôt

$$f(x) = 2A_2 e^{-2t}, \quad x' = A_1 e^{-t} + 2A_2 e^{-2t}.$$

Prenons $t_0 = 0$; t croissant de 0 à $+\infty$, x croît de $\xi - A_1 - A_2$ à ξ pendant que $f(x)$ décroît de $2A_2$ à 0; le mobile ne rétrograde donc pas; la relation entre x et $f(x)$ s'obtient évidemment en éliminant θ entre

$$x = \xi - A_1 \theta - A_2 \theta^2, \quad f = 2A_2 \theta^2.$$

La courbe (x, f) est une parabole tangente à Ox au point ξ de Ox ; l'arc de cette parabole, obtenu pour θ positif, est celui qui correspond à $0 < x < \xi$ et est situé au-dessous du diamètre conjugué de Ox ; en arrivant au point $(\xi, 0)$, on peut prolonger l'arc de parabole par une courbe arbitraire partant de ce point tangentiellement à Ox et nous définissons ainsi une fonction $f(x)$ satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé; sauf une : la limite inférieure de $f(x)$ est en effet, pour $x > 0$, nulle.

De même, si x'_0 est négatif et si la fonction $f(x)$ admet un zéro ξ compris entre 0 et x_0 , on fait le changement de variables

$$x = \xi + X, \quad f(\xi + X) = F(X),$$

et l'on a l'équation

$$X'' + X' + F(X) = 0,$$

qui montre que ξ joue maintenant le rôle de O dans ce qui précède : le mobile peut donc atteindre ξ avec une vitesse finie, donc le dépasser pour se rapprocher d'avantage de O ; ou bien il peut arriver en ξ avec une vitesse nulle, en un temps fini, et il s'arrête en ξ ; ou bien il peut n'atteindre ξ qu'en un temps infini.

III. Supposons, au voisinage de $x = 0$,

$$f(x) = \frac{\mu}{x^{1+\alpha}} + \dots, \quad G(x) = \frac{2\mu}{\alpha} \frac{1}{x^2} + \dots$$

Puisque $\frac{dx}{dt}$ est négatif, pour x positif et voisin de zéro, et que $\frac{dx}{dt}$ est compris entre $-\sqrt{G(x)}$ et $-\sqrt{G(x)} + x_0 - x$, on peut écrire

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2\mu}{\alpha} \frac{1}{x^2}} \varphi(t_0 + T - t),$$

où $\varphi(u)$ tend vers 1 si u tend vers zéro. En posant $u = t_0 + T - t$, nous écrirons

$$\begin{aligned} x^{\frac{\alpha}{2}} dx &= \sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}} [1 + \psi(u)] du, \\ \frac{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\alpha}{2}} &= u \sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}} [1 + \chi(u)], \\ x &= \left\{ \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}} \right\}^{1+\frac{\alpha}{2}} u^{1+\frac{\alpha}{2}} [1 + F(u)], \end{aligned}$$

φ, χ, F étant des fonctions de u tendant vers zéro si u tend vers zéro; x est donc infiniment petit d'ordre $\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}$ et cette formule

donne la partie principale.

IV. La forme donnée à l'équation du début, en supposant $k=1$, $x' = y = -Y$, est, nous l'avons vu,

$$(20) \quad \frac{dY}{dx} = 1 - \frac{f(x)}{Y}.$$

Cela nous suggère une méthode d'approximation évidente : bornons-nous au cas où x'_0 est négatif, et où le nombre

$$(21) \quad \mu = -x'_0 - x_0$$

est positif, non nul. Ces hypothèses n'ont rien d'arbitraire, puisque nous avons vu leur signification : *T est fini, quelle que soit $f(x)$ et Y reste positive, non nulle, quand x décroît de x_0 à 0; Y surpasse μ . Au second membre de (20) prenons, comme approximation de Y , une fonction qui, de 0 à x_0 , reste positive, non nulle, $\varphi_n(x)$, avec la condition $\varphi_n(x_0) = Y_0 = -x'_0$; on en déduit une nouvelle approximation $\varphi_{n+1}(x)$ par la relation*

$$(22) \quad \frac{d\varphi_{n+1}}{dx} = 1 - \frac{f(x)}{\varphi_n}$$

jointe à

$$(23) \quad \varphi_{n+1}(x_0) = -x'_0.$$

On en déduit, avec $0 < x < x_0$,

$$(24) \quad \varphi_{n+1}(x) = -x'_0 - (x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x) dx}{\varphi_n(x)}.$$

C'est précisément la formule de l'énoncé; l'intégrale du second membre a un sens, puisque φ_n ne s'annule pas entre 0 et x_0 , d'autre part elle est *positive*; donc nous avons évidemment

$$(25) \quad \varphi_{n+1}(x) > -x'_0 - (x_0 - x) > -x'_0 - x_0.$$

Nous voyons que $\varphi_{n+1}(x)$ reste constamment, pour $0 \leq x \leq x_0$, supérieure au nombre positif μ déjà défini; donc φ_{n+1} peut servir, sans difficulté, pour définir une nouvelle approximation φ_{n+2} , et ainsi de suite : la fonction φ_0 peut être prise quelconque, pourvu qu'elle soit positive, non nulle, de 0 à x_0 compris; les suivantes, non seulement, seront positives, mais encore supérieures à μ . Or il est naturel de prendre $\varphi_0 \equiv \sqrt{G(x)}$, car si, au lieu de faire $k=1$, nous laissons k constant mais arbitraire, l'équation

$$\frac{dY}{dx} = k - \frac{f(x)}{Y}$$

admet, pour k voisin de zéro, une intégrale voisine de $\sqrt{G(x)}$ qui est intégrale de l'équation obtenue pour $k=0$.

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{f(x)}{Y^2}.$$

Avec ce choix particulier de φ_0 , la fonction φ_1 devient celle calculée plus haut, $\varphi_1 = \sqrt{G(x)} - (x_0 - x)$; φ_0 surpasse Y , φ_1 lui est inférieure, et la différence $\varphi_0 - \varphi_1$ ou $(x_0 - x)$ surpasse $\varphi_0 - Y$ ou $Y - \varphi_1$. En adjoignant à (24) l'équation

$$(26) \quad Y = -x'_0 - (x_0 - x) + \int_x^{x_0} \frac{f(x) dx}{Y},$$

on a, par différence,

$$(27) \quad Y - \varphi_{n+1} = \int_x^{x_0} \frac{(\varphi_n - Y) f dx}{Y \varphi_n},$$

de sorte que si $\varphi_n(x)$ est toujours supérieure (ou inférieure) à Y , $\varphi_{n+1}(x)$ est toujours inférieure (ou supérieure) à Y . Les fonctions d'indice pair $\varphi_0, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}, \dots$ sont donc approchées par excès,

celles d'indice impair $\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_{2n+1}, \dots$ approchées par défaut; toutes sont, pour $0 \leq x \leq x_0$, supérieures au nombre positif μ .

Soit M la limite supérieure, supposée finie de $f(x)$ dans l'intervalle $0 \leq x \leq x_0$ (cette hypothèse sur M écarte les fonctions du paragraphe 3, infinies pour $x = 0$; pour une telle fonction, le raisonnement s'appliquerait dans un intervalle $x_1 \leq x \leq x_0$, où x_1 est un nombre positif non nul). Appliquons la formule (27) pour $n = 1$, en remplaçant au second membre $Y - \varphi_1$ par la quantité positive supérieure $(x_0 - x)$, et $Y\varphi_1$ au dénominateur par la quantité positive inférieure μ^2 ; on a

$$(28) \quad \varphi_2 - Y < \int_x^{x_0} \frac{M}{\mu^2} (x_0 - x) dx = \frac{M}{\mu^2} \frac{(x_0 - x)^2}{2!}.$$

Le même procédé, appliqué toujours à (27), démontre de proche en proche

$$(29) \quad |Y - \varphi_{n+1}| < \frac{M^n}{\mu^{2n}} \frac{(x_0 - x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La formule (29) démontre la convergence de la suite $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$; l'erreur dont nous connaissons le sens, décroît, en valeur absolue comme les termes successifs du développement de l'exponentielle $e^{\frac{M(x_0-x)}{\mu^2}}$. On remarquera que le raisonnement peut être recommencé en prenant pour $\varphi_0(x)$ une fonction positive *quelconque*, égale à $-x'_0$ pour $x = x_0$, supérieure, de 0 à x_0 compris, à un nombre positif fixe; si φ_0 est toujours supérieure (ou inférieure) à Y , les fonctions $\varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_{2n}, \dots$ posséderont la même propriété, les fonctions $\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_{2n+1}, \dots$ seront approchées de Y en sens inverse; toutes, quelle que soit la parité de l'indice, étant supérieures à μ , sauf peut-être φ_0 . Quand l'indice augmente indéfiniment, la fonction φ_n tend vers Y .

Si l'on suppose que φ_0 est, par intervalles, supérieure, soit inférieure à Y , le résultat subsiste sauf que l'on ne peut rien garantir sur le sens de l'approximation de φ_n .

Ayant écrit comme plus haut, dans ces nouvelles hypothèses,

$$Y - \varphi_1 = \int_x^{x_0} \frac{(\varphi_0 - Y)f dx}{Y\varphi_0},$$

si l'on appelle δ la limite supérieure de $|\varphi_0 - Y|$ dans l'inter-

valle $0 \leq x \leq x_0$, on trouve immédiatement

$$|Y - \varphi_1| < \frac{\delta M}{\mu^2} (x_0 - x),$$

$$|Y_n - \varphi_n| < \frac{\delta}{n!} \left[\frac{M(x_0 - x)}{\mu^2} \right]^n,$$

de sorte que la vitesse d'approximation ne dépend pas finalement du choix de telle fonction initiale φ_0 plutôt que d'une autre.

V. Faisons $k = 1$; on détermine $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$, par l'égalité

$$(30) \quad (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)(2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \dots) \\ + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots = x[2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \dots].$$

Si donc on calcule d'abord

$$(31) \quad \frac{1}{2} (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^2 \equiv A_4 x^4 + A_5 x^5 + \dots + A_n x^n + \dots,$$

on a

$$(32) \quad A_4 = \frac{\alpha_2^2}{2}, \quad A_5 = \alpha_2 \alpha_3, \quad A_6 = \frac{\alpha_3^2}{2} + \alpha_2 \alpha_4 \dots,$$

d'une façon générale A_n est un polynome entier à coefficients *positifs* des variables $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}$.

$$A_n = P_n(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}).$$

On aura donc

$$(33) \quad \begin{cases} 2\alpha_2 = \alpha_2, \\ 3\alpha_3 = \alpha_3 + 4A_4, \\ \dots\dots\dots, \\ n\alpha_n = \alpha_n + (n+1)A_{n+1}. \end{cases}$$

On calcule de proche en proche $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Si l'on ne suppose rien sur le signe (ou même sur la réalité) de $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, on voit que, remplacer $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ par $|\alpha_2|, |\alpha_3|, \dots$, augmente le module de $\alpha_2, \alpha_3, \dots$. On augmente encore $|\alpha_2|, |\alpha_3|, \dots$, si l'on remplace chaque α_n par une quantité positive de module supérieur.

Si tous les α_n sont positifs, tous les α_n le sont aussi.

Le calcul de z donne

$$(34) \quad \frac{1}{x} [\beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots]^2 + \alpha_2 x^2 + \dots \equiv \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots,$$

donc on a

$$(35) \quad \begin{cases} \beta_2 = \alpha_2, \\ \beta_3 = \alpha_3 + 2B_4, \\ \dots\dots\dots, \\ \beta_n = \alpha_n + 2B_{n+1} \end{cases}$$

avec

$$B_n = P_n(\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-2}),$$

P_n étant le même polynome que précédemment (chaque lettre α_i étant remplacée par β_i). Cela nous montre que, si tous les α_n sont positifs, on a

$$(36) \quad \beta_2 > \alpha_2, \quad \beta_3 > \alpha_3, \quad \dots, \quad \beta_{n-1} > \alpha_{n-1}, \quad \dots$$

La première inégalité est vérifiée directement, les autres résultent de la comparaison

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\alpha_n}{n} + \frac{n+1}{n} A_{n+1}, \\ \beta_n &= \alpha_n + 2B_{n+1}. \end{aligned}$$

Si les α_n ne sont pas tous positifs, on a, pour la même raison,

$$|\beta_2| > |\alpha_2| \dots |\beta_{n-1}| > |\alpha_{n-1}|.$$

Si donc la série z est convergente, *a fortiori* la série y l'est. Or on calcule directement z par une équation du second degré : en choisissant convenablement la racine

$$(37) \quad z = -\frac{x}{2} - \frac{x}{2} [1 - 4x(\alpha_2 + \alpha_3 x + \dots)]^{\frac{1}{2}}.$$

La série $\alpha_2 + \alpha_3 x + \dots$ étant supposée avoir un rayon de convergence non nul, on peut effectivement développer z par la formule (37) suivant une série convergente de rayon de convergence non nul; et alors la série y a un rayon de convergence au moins égal.

VI. Nous posons

$$(38) \quad \frac{dx}{dt} = \gamma, \quad e^{-(t-t_0)} = \theta, \quad X = \frac{x}{\theta}.$$

Le calcul du numéro précédent nous a fourni une équation différentielle du premier ordre, *ne renfermant aucune constante arbitraire*

$$(39) \quad \frac{dx}{dt} = -x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots,$$

dont toutes les intégrales satisfont à l'équation (E) du début. On a immédiatement

$$(40) \quad \frac{dX}{d\theta} = \frac{\theta \frac{dx}{d\theta} - x}{\theta^2} = \frac{\frac{dx}{dt} - x}{\theta^2},$$

$$(41) \quad \frac{dX}{d\theta} = -\alpha_2 X^2 - \alpha_3 \theta X^3 - \alpha_4 \theta^2 X^4 - \dots$$

Or, l'équation (41) admet une intégrale holomorphe et une seule se réduisant pour $\theta = 0$ à X_0 , où X_0 est *arbitraire*.

$$(42) \quad X = X_0 + \beta_1 \theta + \beta_2 \theta^2 + \dots,$$

d'où pour $x = X\theta$ le développement annoncé, convergent pour θ suffisamment petit ou $t - t_0$ suffisamment grand. Il faut bien remarquer que l'équation (41) est strictement équivalente à (39) et par suite ne peut donner des fonctions $x(t)$ dépendant de deux constantes arbitraires; or β_1, β_2, \dots , coefficients du développement (42) dépendent de la valeur particulière X_0 et θ contient la constante t_0 : si l'on multiplie X par une constante arbitraire et si l'on divise θ par la même constante, l'équation (41) ne change pas et finalement le produit $X\theta$ contient bien les deux constantes X_0 et t_0 , mais uniquement par le groupement $X_0 e^{t_0}$; pour X_0 nul, on aurait $X \equiv 0, x \equiv 0$, cas à écarter; on pourra donc sans restreindre supposer $X_0 = 1$; on a ainsi ∞ intégrales $x(t)$ du type demandé par l'énoncé, ne différant les unes des autres que par un décalage de l'origine des temps.

Il est évident qu'un tel développement $x(t)$ n'existe *jamais* si a_1 est différent de zéro: c'est une conclusion plus précise, plus restrictive que celle de l'énoncé. En effet, écrivons en supposant t_0 égal à zéro, ce qui ne restreint rien,

$$(43) \quad x = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + \dots + A_n e^{-nt} + \dots$$

On a

$$(44) \quad f(x) = -(x' + x^n) = -2A_2 e^{-2t} - \dots - n(n-1)A_n e^{-nt} - \dots$$

La relation entre x et $f(x)$ est fournie par l'élimination de e^{-t} entre les équations (43) et (44). Or, distinguons deux cas: $A_1 \neq 0$ et $A_1 = 0$. Soit le premier cas: $A_1 \neq 0$; appelons n le premier entier ≥ 2 pour lequel $A_n \neq 0$; on aura donc $A_1 > 0$,

$A_n < 0$ pour que x et $f(x)$ soient positifs tous les deux quand t est positif, suffisamment grand; e^{-t} est développable en série $\frac{x}{A_1} + \dots$, de sorte que l'on obtient pour $f(x)$ le développement

$$(45) \quad f(x) \equiv -n(n-1)A_n \left(\frac{x}{A_1}\right)^n + \dots,$$

où a_1 est nul.

Dans le second cas, $A_1 = 0$, soit toujours A_n le premier coefficient non nul ($n \geq 2$); on voit que $f(x)$ et x sont de signe contraire pour t positif suffisamment grand de sorte que nous ne sommes plus dans les conditions strictes de tout le problème. En tous cas, l'équation (43) permet d'obtenir le développement de e^{-t} suivant les puissances croissantes de $x^{\frac{1}{n}}$ et l'on a

$$(46) \quad f(x) \equiv -n(n-1)x + \dots$$

Le développement (46) commence par un terme $a_1 x$, où a_1 a la valeur *négative* d'ailleurs très particulière $-n(n-1)$; ce développement (46) devient d'ailleurs holomorphe si dans (43) les indices des termes non nuls sont tous multiples de l'entier n . L'exemple simple où $f(x) \equiv \left(\frac{1}{4} - A^2\right)x$, donné plus haut, confirme aussi ces résultats; les intégrales particulières $x = \alpha e^{-\left(\frac{1}{2}-A\right)t}$ ou $x = \beta e^{-\left(\frac{1}{2}-A\right)t}$ ne sont pas du type demandé; le multiplicateur de t dans l'exposant est en effet différent de (-1) du moins tant que a_1 est supérieur à zéro, sans égalité.

QUESTION PROPOSÉE.

2492. Deux carrés (G), (G'), concentriques, sont tels que les côtés de l'un soient parallèles aux diagonales de l'autre. Les intersections de leurs côtés forment respectivement deux groupes de huit points qui déterminent deux circonférences. Pour chacune d'elles, montrer que le produit des distances d'un point quelconque de la circonférence aux côtés du carré (G) égale le produit des distances du même point aux côtés du carré (G').

V. THÉBAULT.

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.23.

[*Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique, énoncé publié en décembre 1925, p. 94.*]

SOLUTION

par A. MONJALLON.

1. On demande d'intégrer le système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xz^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y}(1 + z + zx^2).$$

La première équation donne

$$z = \frac{1}{u - x^2},$$

u étant fonction arbitraire de y . Il vient alors

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{u'}{(u - x^2)^2},$$

et la seconde équation se transforme en une équation linéaire en u

$$u' = \frac{u + 1}{y},$$

qui a pour intégrale

$$u = Cy - 1.$$

La solution du système proposé est donc

$$z = \frac{1}{Cy - x^2 - 1}.$$

Elle dépend d'une constante arbitraire C , ce qui était à prévoir, le système proposé satisfaisant à la condition d'intégrabilité.

2. Pour que le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2xz^2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= F(x, y, z), \end{aligned}$$

admette une solution dépendant d'une constante arbitraire, il faut

qu'il vérifie la condition d'intégrabilité qui est

$$\frac{\partial F}{\partial x} + 2xz^2 \frac{\partial F}{\partial z} = 4xzF.$$

Cette équation aux dérivées partielles conduit au système

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{2xz^2} = \frac{dF}{4xzF}.$$

Prenons trois intégrales premières, ce seront

$$\begin{aligned} y &= C_1, \\ \frac{1}{z} + x^2 &= C_2, \\ F &= C_3 z^2. \end{aligned}$$

La fonction $F(x, y, z)$ la plus générale sera alors

$$F(x, y, z) = z^2 \varphi \left(x^2 + \frac{1}{z}, y \right),$$

la fonction φ étant arbitraire.

Question C.12.

[Analyse supérieure; épreuve pratique; énoncé publié en novembre 1925, p. 55].

SOLUTION

par J. DE CAUMONT.

On demande de prouver que la surface S d'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{1+u^2}{u^2(1-u^2)^3} du^2 + \frac{2 du dv}{u(1-u^2)^3} + \frac{dv^2}{1-u^2}$$

est applicable sur une surface de révolution Σ , engendrée par une chaînette en tournant autour de sa base.

La variable v ne figurant pas dans l'élément linéaire donné, il convient à une surface de révolution dont les lignes $u = \text{const.}$ seront les parallèles. On mettra en évidence les trajectoires orthogonales de ces courbes en écrivant

$$ds^2 = \frac{1}{1-u^2} \left[dv + \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} \right]^2 + \frac{2 du^2}{(1-u^2)^3},$$

et il reste à identifier avec l'élément linéaire de Σ qui s'écrit

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

c'est-à-dire, parce que

$$\alpha^2 dr^2 = (r^2 - \alpha^2) dz^2,$$

$$d\sigma^2 = \frac{r^2}{r^2 - \alpha^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

On posera donc

$$r = \frac{k}{\sqrt{1 - u^2}},$$

et l'égalité

$$\frac{2 du^2}{(1 - u^2)^3} = \frac{r^2 dr^2}{r^2 - \alpha^2}$$

donne immédiatement

$$\alpha = k = \sqrt{2};$$

enfin

$$dv + \frac{du}{u\sqrt{1 - u^2}} = \sqrt{2} d\varphi.$$

La méridienne de la surface Σ a pour équation

$$r = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

On demandait enfin la valeur absolue de la torsion d'une ligne asymptotique de S . On sait que cette torsion est un élément géodésique et que, R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux, on a

$$\left| \frac{1}{T} \right| = \frac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}},$$

$\left| \frac{1}{T} \right|$ est donc égale à la racine carrée du module de la courbure totale, qui se conserve quand on passe de S à Σ .

Dans le cas présent, la courbure totale de Σ , surface de révolution minima, est égale en module au carré de la courbure de la chaînette $\frac{\alpha^2}{r^4}$.

Donc

$$\left| \frac{1}{T} \right| = \frac{\alpha}{r^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - u^2).$$

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Soit la surface réglée unicursale S (axes rectangulaires ou non)

$$(S) \quad x = t, \quad y = t^2 + u, \quad z = t^3 + 3ut.$$

Expliquer sans calcul que la cubique $u = 0$ est une asymptotique.

Équation de S. Vérifier que, quel que soit a , la transformation

$$X = x, \quad Y = y + a, \quad Z = z + 3ax,$$

transforme S en elle-même. En déduire sans calcul que les cubiques $u = \text{const.}$ sont asymptotiques.

2° Les plans osculateurs de la cubique $u = 0$ coupent S suivant une génératrice et une parabole C : t_0 étant le paramètre du point d'osculation, trouver la relation liant u et t le long de C. En chaque point de S passent deux paraboles C : elles forment un système conjugué. Quelle est leur enveloppe ?

3° S peut être représentée par les équations

$$x = \frac{t_0 + t_1}{2}, \quad y = \frac{t_0^2 + t_1^2 + 4t_0t_1}{6}, \quad z = \frac{t_0t_1(t_0 + t_1)}{2}.$$

Le système (t_0, t_1) est conjugué. Enveloppe des courbes t_0 , ou t_1 : la déterminer sans calcul. Équation aux dérivées partielles relative à ce système.

4° Soit sur S une famille de courbes définie par l'équation

$$f\left(u, t, \frac{dt}{du}\right) = 0.$$

Comment obtient-on l'équation différentielle des courbes conjuguées.

5° On pose

$$t = \theta_1 + \theta_2, \quad u = (\theta_1 - \theta_2)^2.$$

Définir les courbes θ_1, θ_2 . En déduire que la surface possède ∞^1 modes de génération comme surface de translation.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° La surface S est une surface du troisième ordre, dite surface de Cayley.

La génératrice rectiligne

$$t = \text{const.}$$

est contenue dans le plan osculateur de la cubique $u = 0$ au point correspondant. Ce plan étant ainsi tangent à la surface, la cubique est une asymptotique.

La transformation indiquée équivaut à la transformation

$$(1) \quad v = u + a.$$

Les cubiques $v = 0$ sont des asymptotiques, comme transformées homographiques de la cubique $u = 0$.

2° La parabole C, correspondant au point d'osculation $t = t_0$, est définie par l'équation

$$(2) \quad (t - t_0)^2 + 3u = 0.$$

Les deux paraboles qui passent par un point vérifient évidemment

l'équation

$$(3) \quad du \delta t + dt \delta u = 0$$

des lignes conjuguées. L'enveloppe des paraboles C est la cubique $u = 0$.

3° Les courbes t_0 et t_1 ne sont autres que les paraboles C, d'où les propriétés indiquées. L'équation aux dérivées partielles, relative à ce système de lignes conjuguées, est

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t_0 \partial t_1} \frac{t_0 - t_1}{2} + \frac{\partial \omega}{\partial t_0} - \frac{\partial \omega}{\partial t_1} = 0.$$

4° L'équation différentielle demandée est

$$f\left(u, t, -i \frac{dt}{du}\right) = 0,$$

d'après l'équation (3).

5° Le changement de coordonnées indiqué donne

$$x = \theta_1 + \theta_2, \quad y = 2(\theta_1^2 + \theta_2^2), \quad z = 4(\theta_1^3 + \theta_2^3).$$

Si l'on rapproche ce résultat du n° 1, il est évident que la surface admet ∞^1 modes de génération comme surface de translation.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C. 58. — 1° On considère la surface (m, m_1, μ constantes; t et t_1 paramètres curvilignes)

$$\begin{aligned} x &= \mu(t^3 + 3mt^5) + \frac{1}{\mu}(t_1^3 + 3m_1t_1^5), \\ y &= (1 - \mu^2 t^2)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{\mu^2} + \frac{2m}{\mu^4} + \frac{3m}{\mu^2} t^2 \right], \\ z &= \left(1 - \frac{t_1^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} [\mu^2 + 2m_1\mu^4 + 3m_1\mu^2 t_1^2]. \end{aligned}$$

Former son ds^2 : il est indépendant de μ .

2° Intégrer l'équation différentielle des asymptotiques.

3° Courbure totale de la surface. Courbure moyenne.

(Lille, octobre 1925.)

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On donne l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 13y = \sin 3x + 6e^{-2x}(\sin 3x + \cos 3x) - 6,$$

et l'on demande :

- 1° Trouver l'intégrale générale ;
- 2° Trouver l'équation de la courbe intégrale particulière qui passe par l'origine des coordonnées et qui admet en ce point un point d'inflexion : soit $y = f(x)$ celle-ci ;
- 3° Trouver la partie principale de $f(x)$, en prenant x comme infiniment petit principal, et en déduire la forme de l'intégrale particulière pour des valeurs petites de x .

II. On considère la courbe qui a pour équations

$$x = R(t - \sin t),$$

$$y = R(1 - \cos t),$$

$$z = 4R \sin \frac{t}{2}$$

et l'on demande :

- 1° Calculer le rayon de courbure, en fonction de t .
- 2° En chaque point de cette courbe, on porte sur la normale principale, dans le sens de la concavité, une longueur égale à

$$R \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Trouver les équations de la courbe décrite par le point ainsi obtenu ; forme de cette courbe.

SOLUTION. — Première question.

1° L'intégrale générale de l'équation est.

$$y = [A \sin 3x + B \cos 3x + x(\sin 3x - \cos 3x)] e^{-2x} + \frac{1}{40}(\sin 3x - 3 \cos 3x) - \frac{6}{13}.$$

2° L'intégrale particulière devant passer par O et admettre en ce point une inflexion, on aura $y_0 = y''_0 = 0$ pour $x = 0$. L'équation différentielle donne alors

$$4y'_0 = 6 - 6 = 0, \quad \text{donc} \quad y'_0 = 0.$$

L'intégrale cherchée sera donc tangente en O à Ox.

On en déduit :

$$B - \frac{3}{40} - \frac{6}{13} = 0,$$

$$3A - 1 - 2B + \frac{3}{40} = 0.$$

Donc

$$B = \frac{3}{40} + \frac{6}{13} = \frac{279}{520}, \quad A = \frac{1}{3} + \frac{1}{40} + \frac{4}{13} = \frac{1039}{1560}.$$

3° On sait que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Pour calculer y''' , dérivons les deux membres de l'équation différentielle : on obtient

$$y'''_{(0)} = 3 - 12 + 18 = 9.$$

Donc

$$y = f(x) = \frac{9}{6} x^3 + \dots,$$

la partie principale est $\frac{3}{2} x^3$, d'où la forme.

Deuxième question.

$$1^\circ \quad x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t), \quad z = 4R \sin \frac{t}{2},$$

$$dx = R(1 - \cos t) dt, \quad dy = R \sin t dt, \quad dz = 2R \cos \frac{t}{2} dt,$$

d'où

$$ds = 2R dt.$$

Les cosinus directeurs de la tangente sont :

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1 - \cos t}{2}, \quad \beta = \frac{\sin t}{2}, \quad \gamma = \cos \frac{t}{2},$$

$$d\alpha = \frac{\sin t}{2} dt, \quad d\beta = \frac{\cos t}{2} dt, \quad d\gamma = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt,$$

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} dt,$$

d'où

$$\rho = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{4R}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}.$$

2° Les cosinus de la normale principale sont :

$$\alpha' = \frac{dx}{d\sigma} = \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}, \quad \beta' = \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}, \quad \gamma' = \frac{-\sin \frac{t}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}.$$

Les équations du lieu cherché sont donc :

$$X = x + \alpha' R \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} = Rt,$$

$$Y = y + \beta' R \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} = R,$$

$$Z = z + \gamma' R \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} = 3R \sin \frac{t}{2}.$$

C'est une courbe plane [plan $y = R$], dont la projection sur le plan XOZ a pour équation

$$Z = 3 R \sin \frac{X}{2R} \quad (\text{sinusoïde}).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer la valeur numérique de l'intégrale définie

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5 + 4}}$$

avec une erreur absolue inférieure à $\frac{1}{2000}$.

On donnera le résultat avec 3 décimales.

(Nota. — Cette intégrale se calcule par un développement en série.)

II. Une surface plane, représentée sur la figure, a la forme d'un rectangle dont on a supprimé les portions intérieures à deux cercles des centres K et K'.

[La figure montre les deux cercles symétriques par rapport à l'un des axes du rectangle OE, le cercle K coupe un côté du rectangle AD parallèle à OE en deux points B et C (marquer ABCD dans le sens OE), enfin la droite KK' coupe OE en un point H.]

On donne

$$OA = a, \quad AB = b, \quad BC = \sqrt{2} r, \quad CD = c, \quad KC = r,$$

$$KH = a + r \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1° Centre de gravité de cette surface plane;

2° Moment d'inertie par rapport à l'axe OE (densité = 1);

3° Volume engendré par cette surface en tournant autour de OE.

SOLUTION. — Première question.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{I}{\sqrt[3]{x^5 + 4}} &= \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \left(1 + \frac{x^5}{4} \right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{x^5}{4} + \dots + \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{3} + p - 1 \right) \left(\frac{x^5}{4} \right)^p + \dots \right\}; \end{aligned}$$

en intégrant entre 0 et 1

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{1}{4 \times 6} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{3} + p - 1 \right) \frac{1}{4^p (5p + 1)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Désignons par a le nombre $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ et par b la série; \mathcal{E}_x désigne l'erreur absolue commise sur x . On a

$$\mathcal{E}_1 = b\mathcal{E}_a + a\mathcal{E}_b,$$

il faut

$$b\mathcal{E}_a + a\mathcal{E}_b < \frac{1}{2000}.$$

Or on sait que $a < \frac{1}{2}$ et $b < 1$ visiblement.

On prendra

$$\mathcal{E}_a < \frac{1}{4000}, \quad \mathcal{E}_b < \frac{1}{1000};$$

ces calculs sont classiques et faciles. On trouve

$$I = 0,622,$$

la somme des erreurs commises (y compris celle qui provient de la suppression des décimales après la troisième) étant inférieure à $\frac{1}{2000}$.

Deuxième question.

L'angle \widehat{HKC} est égal à 45° . La surface des segments échanrés est donc égale à $r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right)$.

1° En appelant z l'abscisse du centre de gravité cherché sur \vec{OE} , le théorème des moments par rapport à OA donne, en posant $h = AD = b + c + r\sqrt{2}$

$$z \left[2ah = 2r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2}h \times 2ah - 2r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(b + r\frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

d'où l'on tire z .

2° On calcule le moment d'inertie du rectangle complet $\left(\frac{2}{3}a^3h \right)$ et l'on retranche le moment d'inertie des deux segments échanrés. On trouve

$$I = \frac{2}{3}a^3(b + c + r\sqrt{2}) - 2r^4 \left(\frac{3\pi}{16} - \frac{7}{12} \right) - 4ar^3\sqrt{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{5}{12} \right) - 4a^2r^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right).$$

3° Le volume engendré est égal à celui qu'engendre le rectangle complet $(\pi a^2 h)$ diminué de celui qu'engendrent les segments échanrés.

$$V = \pi a^2 h - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\pi xy \, dx.$$

On trouve

$$V = \pi a^2 h - \pi a r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \pi r^3 \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5}{6} \right).$$

(Grenoble, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. (*Analyse et Géométrie*). — C. 58. — I. On considère l'équation différentielle linéaire

$$x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x^2(1+x) \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Montrer qu'on peut trouver un changement de variable $x = \varphi(t)$, tel que la nouvelle équation différentielle reliant y à t soit à coefficients constants.

En déduire l'intégrale générale de l'équation proposée.

C. 59. — II. Calculer l'intégrale

$$\theta = \int_a^r \sqrt{\frac{4a^2 - r^2}{r^2 - a^2}} \frac{dr}{2r}.$$

(On ne cherchera pas à calculer θ en fonction explicite de r , mais simplement à avoir r et θ en fonction d'un paramètre.)

III. Deux points M et M' se déplacent sur le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, avec des vitesses angulaires respectivement égales à $+3$ et -1 . Ils partent simultanément du point $x = a, y = 0$.

Trouver et construire l'enveloppe de la droite qui les joint.

Montrer que si dans le problème précédent on regarde r et θ comme les coordonnées polaires d'un point, les relations paramétriques trouvées représentent la même courbe que l'enveloppe ci-dessus.

(Strasbourg, juin 1922.)

ERRATA.

Programme du Concours d'agrégation des Sciences mathématiques pour 1926 :

Au bulletin administratif du 1^{er} septembre 1925, n° 2565, page 221, ligne 8, au lieu de Types simples d'équations intégrales, lire Types simples d'équations intégrables.

[P¹ 1 b]

**SUR LES COURBES PLANES DONT LES LONGUEURS D'ARCS
SONT INVARIANTES PAR HOMOGRAPHIE ;**

PAR A. LABROUSSE.

1. Considérons une correspondance homographique (H) entre les points de deux plans π et π' distincts ou superposés.

Nous nous proposons de : *Trouver toutes les courbes Γ du plan π telles qu'un arc quelconque de Γ ait même longueur que l'arc homologue de la courbe Γ' du plan π' , transformée de Γ par l'homographie (H).*

2. *Cas particulier.* — Examinons d'abord le cas simple où les droites à l'infini des deux plans π et π' se correspondent.

Prenons pour origines de coordonnées dans π et π' deux points homologues O et O'. Un cercle (C) du plan π , centré en O, a pour homologue dans π' une ellipse (C') du centre O'.

Dans le plan π' , prenons pour axes de coordonnées O'x', O'y' les axes de symétrie de l'ellipse (C'). Aux axes O'x', O'y' correspondent dans le plan π Ox et Oy qui sont aussi rectangulaires.

Nous rapportons le plan π à ces axes Ox et Oy.

On voit aisément que l'homographie (H) est alors définie par

$$(1) \quad x' = ax, \quad y' = by,$$

a et b désignant deux constantes, que l'on peut toujours supposer positives (en changeant, s'il le faut, le sens positif des axes dans le plan π).

Les courbes Γ cherchées vérifient la relation

$$dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2,$$

ou, d'après (1),

$$(a^2 - 1) dx^2 + (b^2 - 1) dy^2 = 0,$$

on obtient tout de suite en intégrant

$$y = \varepsilon x \sqrt{\frac{1-a^2}{b^2-1}} + C \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

Donc : Dans le cas particulier considéré, les courbes Γ sont des droites D parallèles à deux directions fixes.

Ces droites sont réelles si

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) \leq 0,$$

imaginaires dans le cas contraire.

Remarquons que si $a = b$ l'affinité (1) devient une similitude, et les droites D deviennent les droites isotropes du plan π .

3. *Cas général. Équation différentielle des courbes Γ .* — Indiquons quelle est dans le cas général la forme réduite des formules de correspondance. La droite de l'infini D' du plan π' a pour homologue dans le plan π une droite D à distance finie. De même, Δ , droite de l'infini du plan π , a pour homologue dans π' une droite Δ' à distance finie.

Le point O' de π' à l'infini dans la direction normale à Δ' a pour homologue un point O sur D , et le point ω de π à l'infini dans la direction normale à D a pour homologue dans π' un point ω' sur Δ' . Prenons dans le plan π deux axes rectangulaires Ox, Oy issus de O , Ox étant confondu avec OD .

De même, prenons dans π' deux axes rectangulaires $\omega'x', \omega'y'$ issus de ω' , $\omega'x'$ étant confondu avec $\omega'\Delta'$. On voit alors que Oy et $\omega'y'$ sont homologues et que, les coordonnées étant supposées homogènes, les équations

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

entraînent respectivement

$$x' = 0, \quad z' = 0, \quad y' = 0.$$

Si l'on revient aux coordonnées absolues, on voit que l'homographie (H) est définie par les relations

$$(2) \quad x' = a \frac{x}{y}, \quad y' = \frac{b}{y},$$

a et b désignant deux constantes qu'on peut supposer positives.

4. Cela posé, les courbes Γ cherchées vérifient la relation

$$dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2$$

ou, en tenant compte des formules (2),

$$(3) \quad a^2(y \, dx - x \, dy)^2 + b^2 \, dy^2 = y^4(dx^2 + dy^2).$$

Si l'on désigne par T le point où la tangente à F au point (x, y) rencontre Ox, par θ l'angle de cette tangente avec Ox, la relation (3) s'écrit

$$a^2 \overline{OT}^2 + b^2 = \frac{y^4}{\sin^2 \theta}.$$

Cette nouvelle forme conduit à choisir pour nouvelles variables θ et $x_0 = \overline{OT}$, c'est-à-dire à définir Γ comme enveloppe d'une droite

$$x = x_0 + y \cot \theta.$$

Le point de contact de cette droite avec son enveloppe vérifie

$$y = \frac{dx_0}{d\theta} \sin^2 \theta.$$

La nouvelle équation différentielle est

$$a^2 x_0^3 + b^2 = \left(\frac{dx_0}{d\theta} \right)^4 \sin^6 \theta$$

ou

$$\frac{dx_0}{\sqrt[4]{a^2 x_0^3 + b^2}} = \pm \frac{d\theta}{\sin \theta \sqrt{\sin \theta}}.$$

On est donc ramené à deux quadratures qui, nous allons le voir, se réduisent à une seule.

5. *Intégration par les fonctions elliptiques* (1). — Le point M qui décrit Γ a pour coordonnées

$$(4) \quad \begin{cases} x = x_0 + \frac{dx_0}{d\theta} \sin \theta \cos \theta, \\ y = \frac{dx_0}{d\theta} \sin^2 \theta, \end{cases}$$

θ et x_0 étant liés par

$$\frac{(dx_0)^2}{\sqrt{a^2 x_0^3 + b^2}} = \pm \frac{(d\theta)^2}{\sin^3 \theta}.$$

(1) Le lecteur qui ne serait pas familier avec la théorie des fonctions elliptiques peut passer immédiatement aux paragraphes 8 et suivants : *Propriétés et construction des courbes Γ à partir de leur équation différentielle.*

Comme l'angle θ est défini à $k\pi$ près, on peut supposer $\sin \theta > 0$ et écrire

$$(5) \quad \frac{dx_0}{\sqrt{a^2 x_0^2 + b^2}} = \varepsilon \frac{d\theta}{\sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Prenons maintenant les nouvelles variables t et ρ définies par

$$(6) \quad a^2 x_0^2 + b^2 = b^2 t^4, \quad \sin \theta = \frac{1}{\rho^2} \quad (t > 0, \rho > 0).$$

De (6) on tire

$$\begin{aligned} x_0 &= \varepsilon' \frac{b}{a} \sqrt{t^4 - 1}, & dx_0 &= \varepsilon' \frac{b}{a} \frac{2t^3 dt}{\sqrt{t^4 - 1}} & (\varepsilon' = \pm 1), \\ \theta &= \arcsin \frac{1}{\rho^2}, & d\theta &= \varepsilon'' \frac{2 d\rho}{\rho \sqrt{\rho^4 - 1}} & (\varepsilon'' = \pm 1, \varepsilon'' \cos \theta < 0). \end{aligned}$$

Si l'on porte dans (5), on obtient

$$(7) \quad m \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^4 - 1}} = \varepsilon_1 \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{\rho^4 - 1}},$$

en posant

$$m = \frac{\sqrt{b}}{a} \quad \text{et} \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon \varepsilon''}{\varepsilon'}.$$

On est donc ramené à une seule quadrature.

Avec les nouvelles variables t et ρ , les coordonnées de M s'écrivent

$$(8) \quad \begin{cases} x = \sqrt{b} \left(\varepsilon' m \sqrt{t^4 - 1} - \varepsilon \varepsilon'' \frac{t}{\rho} \sqrt{\rho^4 - 1} \right), \\ y = \varepsilon \sqrt{b} \frac{t}{\rho}. \end{cases}$$

6. Il reste à évaluer l'intégrale

$$I = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^4 - 1}}.$$

Envisageons la fonction $p(u)$ de Weierstrass définie par l'équation différentielle

$$p'^2 = 4p^3 + p$$

et posons

$$(9) \quad t = \frac{1}{2} \frac{p'(u)}{p(u)},$$

u étant choisi de manière que l'on ait $t > 0$ (il suffit de changer s'il le faut u en $-u$).

On aura alors

$$t^2 - 1 = \left(p - \frac{1}{4p} \right)^2,$$

$$\sqrt{t^2 - 1} = \pm \left(\frac{1}{4p} - p \right).$$

Si l'on observe que p supposé réel est positif en vertu de l'équation différentielle qui le définit, et que si p tend vers zéro, t tend vers $+\infty$, on voit que seul le signe $+$ convient. Donc

$$\sqrt{t^2 - 1} = \frac{1}{4p} - p.$$

On tire ensuite de (9)

$$dt = \frac{1}{2} \frac{pp'' - (p')^2}{p^2} du = \left(p - \frac{1}{4p} \right) du,$$

d'où

$$I = - \int \frac{4p^3 + p}{4p^2} du = - \int p du - \int \frac{du}{4p},$$

et en introduisant la fonction $\zeta(u)$ associée à $p(u)$

$$I = \zeta(u) - \int \frac{du}{4p}.$$

Pour achever l'intégration, décomposons la fonction elliptique $\frac{1}{4p}$ en éléments simples.

Soit α un zéro de $p(u)$, on a

$$p(\alpha) = 0, \quad p'(\alpha) = 0, \quad p''(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

La formule de Taylor appliquée à $p(u)$ au point α nous donne

$$p(u) = p(\alpha) + (u - \alpha)p'(\alpha) + (u - \alpha)^2 \frac{p''(\alpha)}{2} + \dots$$

ou

$$p(u) = \frac{(u - \alpha)^2}{4} + \dots$$

Dans un parallélogramme de périodes, $p(u)$ a donc un seul zéro qui est double et congru à α . D'où il résulte que $\frac{1}{4p}$ admet α pour

pôle double, la partie principale relative à ce pôle étant $\frac{1}{(u-\alpha)^2}$.

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{4p} = p(u-\alpha) + C.$$

Si l'on fait $u = 0$ dans cette identité, il vient

$$0 = p(-\alpha) + C,$$

d'où

$$C = -p(\alpha) = 0.$$

Il reste

$$\frac{1}{4p} = p(u-\alpha),$$

et l'on a

$$-\int \frac{du}{4p} = \zeta(u-\alpha).$$

Donc, enfin,

$$I = \zeta(u) + \zeta(u-\alpha).$$

7. Si l'on pose de même

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{p'(v)}{p(v)},$$

on voit que l'intégrale générale de l'équation différentielle (7) est définie par

$$m[\zeta(u) + \zeta(u-\alpha)] - \varepsilon_1[\zeta(v) + \zeta(v-\alpha)] = C,$$

C désignant une constante.

Quant aux coordonnées (8) du point M, elles deviennent

$$(10) \quad \begin{cases} x = \varepsilon' \sqrt{b} \left\{ m[p(u-\alpha) - p(u)] - \varepsilon_1 \frac{p(v)}{p(u)} \frac{p'(u)}{p'(v)} [p(v-\alpha) - p(v)] \right\}, \\ y = \varepsilon \sqrt{b} \frac{p'(u)p(v)}{p'(v)p(u)}. \end{cases}$$

Adjoignons aux axes Ox , Oy du plan π un troisième axe Oz normal à π , et posons

$$(11) \quad z = m[\zeta(u) + \zeta(u-\alpha)] - \varepsilon_1 \zeta[v + \zeta(v-\alpha)].$$

Nous pouvons alors énoncer ce théorème :

Les courbes Γ cherchées sont (le plan π étant supposé horizontal) les projections sur le plan π des courbes de niveau de

la surface représentée paramétriquement par les équations (10) et (11).

Propriétés et construction des courbes Γ .

8. Nous allons construire les courbes Γ en nous servant uniquement de leur équation différentielle. Indiquons auparavant diverses propriétés de ces courbes qui résultent immédiatement de cette équation.

I. Reprenons l'équation différentielle sous sa forme primitive :

$$(1) \quad (a^2 x^2 + b^2 - y^4) y'^2 - 2 a^2 x y y' + a^2 y^2 - y^4 = 0.$$

Elle montre que par tout point $M(x, y)$ du plan passent deux courbes Γ . Celles-ci sont réelles si l'on a

$$(2) \quad a^4 x^2 - (a^2 x^2 + b^2 - y^4)(a^2 - y^2) \geq 0.$$

La courbe limitant les régions où (2) est vérifiée est une quartique Σ d'équation

$$x^2 = \frac{(b^2 - y^4)(a^2 - y^2)}{a^4 y^2}.$$

Sa forme est indiquée sur la figure (page 234) dans l'hypothèse $m < 1$, c'est-à-dire $a > \sqrt{b}$.

II. On sait que la courbe Σ est l'enveloppe des courbes intégrales Γ ou bien le lieu de leurs points de rebroussement. On vérifie aisément qu'on se trouve ici dans le second cas.

III. L'équation (1) est vérifiée si

$$y^2(a^2 - y^2) = 0.$$

Il y a donc au moins 3 droites parmi les courbes intégrales.

La droite $y = 0$ qui a pour homologue la droite de l'infini du plan π' est une solution étrangère. Les droites $y = \pm a$, dont les homologues sont à distance finie, seules sont intéressantes.

D'autre part, on se rend compte aisément qu'il n'y a pas d'autres courbes intégrales rectilignes; il suffit de remarquer que si D est une droite faisant partie des Γ , le point à l'infini de D a son homologue aussi à l'infini; d'où il résulte que D doit être parallèle à $y = 0$. On retrouve ce résultat connu : *Il y a dans le*

plan π deux droites Δ_1 et Δ_2 , telles que la correspondance établie par (H) entre les points de ces droites, et ceux de leurs homologues est une égalité.

IV. Si, en un point M d'une courbe intégrale Γ_0 , la tangente est parallèle à Ox , ce point vérifie

$$y^2(a^2 - y^2) = 0.$$

Or, l'inégalité (2) n'est pas satisfaite pour $y = 0$. Donc, M est sur l'une des droites Δ_1, Δ_2 , par exemple, sur Δ_1 d'équation $y = a$. Les deux courbes Γ passant par M sont Δ_1 et une seconde courbe dont la pente en M est

$$y' = \frac{2a^3x}{a^2x^2 + b^2 - a^4} \neq 0.$$

Il s'ensuit que la courbe Γ_0 est identique à Δ_1 .

Donc, *exception faite pour les droites Δ_1 et Δ_2 , aucune courbe Γ n'admet de tangente parallèle à Ox .*

V. Les courbes Γ ont des tangentes parallèles à Oy . Le lieu de leurs points de contact est la quartique Σ' d'équation

$$y^4 = a^2x^2 + b^2.$$

Elle est tracée en pointillé sur la figure.

VI. Si M est un point d'une courbe Γ où la tangente est verticale, Γ traverse en ce point la quartique Σ' . Donc, en M, y' passe par l'infini en changeant de signe, et M ne peut être point d'inflexion de Γ .

Soit maintenant M un point d'inflexion de Γ à tangente non verticale.

En ce point $y'' = 0$. D'autre part, si après avoir dérivé par rapport à x , l'équation différentielle (1), on y fait $y'' = 0$, il reste

$$y^3 y' (1 + y'^2) = 0.$$

Or, nous avons déjà observé qu'au point M on a

$$y \neq 0.$$

Donc, en M, $y' = 0$, et la courbe Γ est une des droites Δ_1, Δ_2 .

Nous pouvons dire : *exception faite pour les droites Δ_1, Δ_2 , aucune courbe Γ n'admet de point d'inflexion.*

VII. Envisageons un point M d'abscisse x_0 sur l'une des droites $y = \pm\sqrt{b}$ sur $y = \sqrt{b}$, par exemple. Il passe par M deux courbes Γ dont les tangentes ont pour pentes

$$y' = \frac{a\sqrt{b} \pm b}{ax_0}.$$

Les équations de ces tangentes :

$$x_0(a y \pm b) - x(a\sqrt{b} \pm b),$$

sont linéaires en x_0 . D'où cette propriété :

Les tangentes aux courbes Γ , aux points situés sur les deux droites $y = \pm\sqrt{b}$, passent par l'un ou l'autre des deux points fixes F et F' ayant pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{b}{a}.$$

Dans le cas de la figure ci-après ($a > \sqrt{b}$), ces points sont situés entre les deux droites $y = \pm\sqrt{b}$. Ces points FF', qu'on pourrait appeler *foyers du plan π* , ont une signification géométrique simple : ce sont les cercles de rayon nul du faisceau formé par les cercles du plan π qui ont pour homologues des cercles dans le plan π' . On voit aussi que tout angle du plan π ayant pour sommet F ou F' a pour homologue un angle égal dans le plan π' .

VIII. On peut se poser une question analogue à la précédente et chercher l'enveloppe de la tangente à la seconde courbe Γ qui passe par un point variable sur Δ_1 ou Δ_2 . On obtient une conique d'équation

$$\frac{x^2}{a^2 - \frac{b^2}{a}} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Cette conique a pour foyers les points F, F', et Δ_1, Δ_2 sont ses tangentes aux extrémités β, β' de l'axe focal.

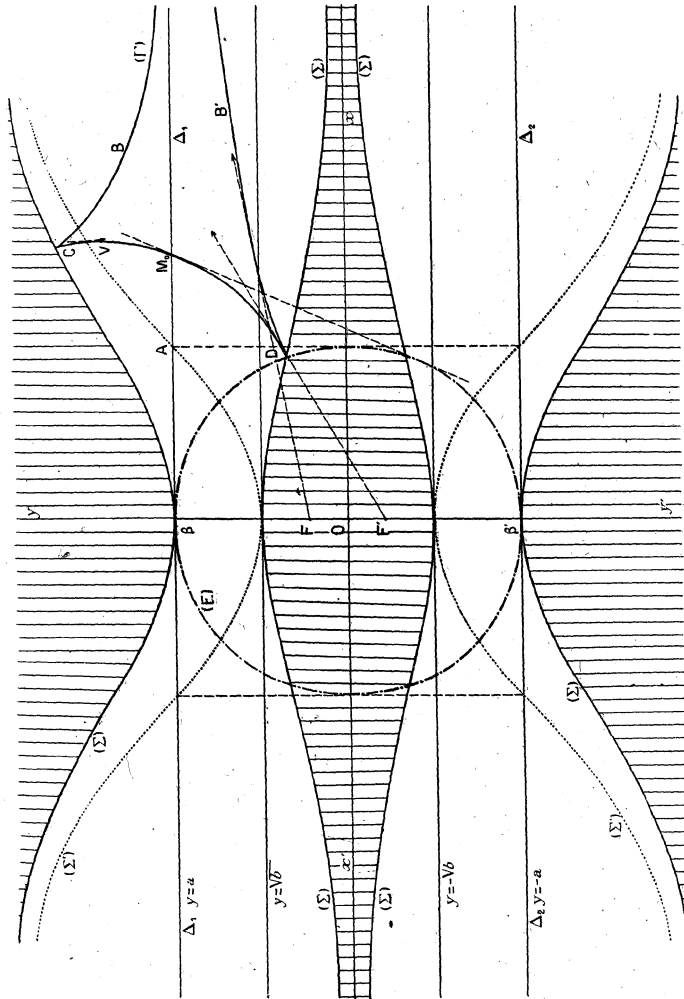
Dans le cas $a > \sqrt{b}$, c'est une ellipse E représentée en trait mixte sur la figure.

9. *Construction de Γ .* — La construction de la quartique sépa-

matrice Σ conduit à distinguer trois cas :

$$a > \sqrt{b}, \quad a = \sqrt{b}, \quad a \leq \sqrt{b}.$$

Nous nous bornerons à étudier le premier, les deux autres n'introduisant pas de modification profonde dans la forme des courbes Γ .



La courbe Σ présente la forme indiquée, et les courbes Γ ne peuvent pénétrer dans les régions hachurées.

La courbe Σ' , lieu des points à tangente verticale, est figurée en trait pointillé. En dehors de deux points de contact $y = \pm \sqrt{b}$, situés sur Oy , elle n'a aucun point commun avec Σ .

Les droites Δ_1 et Δ_2 sont des tangentes à Σ .

Partons d'un point M_0 de Δ_1 ayant son abscisse positive; pour fixer les idées, supposons-le à droite du point A où Δ_1 rencontre Σ' .

Il passe par M_0 une seule Γ curviligne. La tangente en M_0 à cette courbe est la seconde tangente qu'on peut mener de M_0 à l'ellipse E , et l'on voit que sa pente est positive.

1° Faisons d'abord croître y à partir de a ; nous obtenons un arc M_0VC , la tangente en V étant verticale, et C étant un rebroussement sur Σ .

Il part ensuite du point C un second arc CB . La valeur de y' au point C est négative; comme y' ne peut s'annuler à distance finie, y' reste négatif sur CB , et y décroît sur CB quand x croît. En outre, y , borné inférieurement par zéro, a pour $x = +\infty$ une limite y_1 positive ou nulle. On obtient donc une branche infinie CB admettant une asymptote

$$y = y_1.$$

Précisons cette asymptote. Tout d'abord on aura

$$\lim \frac{y}{x} = 0 \quad (\text{pour } x = +\infty).$$

D'autre part, y'' ne pouvant s'annuler, y' varie dans le même sens et croît avec x , mais y' ne peut s'annuler à distance finie; il part d'une valeur négative. Donc sur CB ,

$$y' < 0.$$

Il suit de là que y' a une limite y'_1 pour $x = +\infty$, et puisque

$$\lim \frac{y}{x} = \lim y',$$

on a

$$y'_1 = \lim y' = 0.$$

Nous allons maintenant déduire de là la valeur de y_1 . Pour cela, dans l'équation différentielle (1), faisons tendre x vers $+\infty$; y tend vers y_1 et y' vers zéro. Il nous faut connaître la limite

de xy' . Or, sur l'arc CB, on peut écrire

$$y = y_1 + \frac{\alpha}{x^k} + \frac{\alpha'}{x^{k'}} + \dots \quad (0 < k \leq k' \leq \dots),$$

et l'on voit aisément, avec ce développement, que $\lim xy' = 0$.

On a donc, en passant à la limite,

$$y_1^2(a^2 - y_1^2) = 0.$$

Comme on a $y_1 \geq 0$, on aura, soit $y_1 = 0$, soit $y_1 = a$.

L'hypothèse $y_1 = 0$ est à rejeter. En effet, si Ox était asymptote de la branche CB, celle-ci rencontrerait la droite $y = \sqrt{b}$ en un point où la tangente couperait l'axe des y au-dessus du segment FF' ; elle ne pourrait donc passer par l'un des points F et F' . On a donc $y_1 = a$.

Ainsi, la branche infinie CB est asymptote à Δ_1 .

2° Partons à nouveau du point M_0 , et faisons maintenant décroître y à partir de a , nous obtenons un premier arc M_0D , D étant un rebroussement sur Σ . On voit comme plus haut qu'il part du point D une seconde branche infinie DB' , sur laquelle y croît avec x . Elle ne peut rencontrer Δ_1 . Si, en effet, elle rencontrait Δ_1 en un point M_1 , la tangente à DB' en M_1 couperait Oy entre F et β , et par suite, ne pourrait être tangente à l'ellipse E .

y est donc borné supérieurement par a , et en raisonnant comme on l'a déjà fait, on voit que y a une limite égale à a . Donc, la branche infinie DB' a aussi pour asymptote Δ_1 .

Si l'on observe que l'équation différentielle (1) se reproduit si l'on change de signe x ou y , ou x et y à la fois, on voit que par symétrie par rapport aux axes Ox , Oy , ou par rapport à l'origine, on déduirait de la courbe construite trois autres courbes répondant à la question.

[14]

**SUR UNE QUESTION
CONCERNANT DES SUITES DE NOMBRES INCOMMENSURABLES ;**

PAR FAUCHEUX.

Soient deux incommensurables positifs α et β ; $[x]$ désignant la partie entière du nombre positif x , on forme les deux suites infinies

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} & [\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \dots, \\ \text{(B)} & [\beta], [2\beta], [3\beta], \dots \end{array}$$

Rechercher dans quels cas les nombres contenus dans les deux suites sont tous distincts. Telle est la question indiquée par M. Bricard (*N. A.*, 1926, p. 100).

La solution fournie par M. Bricard n'est pas la seule. Je me propose d'en donner une plus étendue et de faire voir en particulier qu'elle représente la solution générale si l'on suppose l'un des incommensurables plus petit que 2.

1. Les suites (A) et (B) ne devant pas comporter de répétitions, il est clair que α et β sont tous deux supérieurs à 1. Je suppose $\alpha < \beta$ et j'examinerai d'abord le cas suivant :

$$1 < \alpha < 2.$$

Traçons deux axes de coordonnées rectangulaires et dans l'angle xOy le réseau de carrés ayant pour sommets les points de coordonnées entières; soit R ce réseau. Traçons enfin la droite D_α issue de O et de coefficient angulaire $\alpha - 1$. Les nombres $[p\alpha]$ et $[(p+1)\alpha]$ sont consécutifs ou différent de deux unités suivant qu'entre les abscisses p et $p+1$ la droite D_α traverse ou ne traverse pas une horizontale de R. Pour simplifier, nous désignerons par $a+ib$ le point de coordonnées a et b , et par (r, s) le segment de droite joignant les points r et s . Soient

$$\begin{array}{l} (p_1+i, p_1+i); (p_2+2i, p_2+1+2i); \dots; \\ (p_k+ki, p_k+1+ki); \dots; \end{array}$$

les segments-unités des horizontales du réseau coupés par la droite D_α . Les lacunes de (A) sont les nombres de la suite

$$(S) \quad p_1 + 1, \quad p_2 + 2, \quad \dots, \quad p_k + k, \quad \dots$$

Essayons tout d'abord de choisir β de façon que (S) soit identique à (B).

Si l'on trace la droite D_β partant de O et ayant pour coefficient angulaire $\beta - 1$, elle doit couper les segments verticaux

$$(1 + ip_1, 1 + ip_1 + i); \quad (2 + ip_2, 2 + ip_2 + i); \quad \dots; \\ (k + ip_k, k + ip_k + i); \quad \dots$$

Or ces segments sont respectivement symétriques, par rapport à la bissectrice de l'angle xOy , des segments horizontaux coupés par la droite D_α . Il existe donc une droite partant de O et les rencontrant tous; c'est l'isogonale de D_α par rapport à Ox et Oy . Il n'existe d'ailleurs qu'une seule droite possédant cette propriété puisque les segments s'éloignent indéfiniment et conservent une longueur finie. On aboutit à la condition

$$(1) \quad (\beta - 1)(\alpha - 1) = 1,$$

donnée sous une autre forme par M. Bricard. Il est d'ailleurs inutile d'y joindre la condition

$$1 < \alpha < 2,$$

car la relation (1) est symétrique par rapport à α et β et implique que l'un de ces deux nombres est compris entre 1 et 2.

2. Si nous contractons les abscisses des segments verticaux énumérés tout à l'heure dans le rapport $\frac{1}{n}$ (n entier positif), ceux qui conservent une abscisse entière sont ceux dont le rang est multiple de n ; il existe une droite et une seule partant de O et les coupant tous; elle a pour coefficient angulaire $\frac{n}{\alpha - 1}$; si l'on choisit β de façon que ce coefficient ait pour valeur $\beta - n$, les (B) sont tous des nombres extraits de (S) et l'on obtient alors la solution suivante du problème posé :

$$(\beta - n)(\alpha - 1) = n.$$

(B) est alors formé par les termes de (S) dont le rang est multiple de n .

La relation (2) nous fournit d'ailleurs toutes les solutions dans le cas de α compris entre 1 et 2. En effet, soit β' une autre solution pour laquelle la suite (B) débiterait également par $p_n + n$. Traçons les droites D et D' partant de O et ayant respectivement pour coefficients angulaires $\beta - n$ et $\beta' - n$. Ces deux droites percent l'abscisse 1 dans la même bande horizontale du réseau R. Par des considérations de similitude, on voit que D et D' percent l'abscisse 2 dans la même bande horizontale ou dans deux bandes horizontales consécutives. C'est nécessairement dans la même bande; sinon $[2\beta]$ et $[2\beta']$ auraient pour valeurs deux entiers consécutifs, ce qui exigerait que deux termes consécutifs de (A) diffèrent de trois unités, ce qui est incompatible avec l'hypothèse primitive. Le même raisonnement prouverait que D et D', percent l'abscisse 2 dans la même bande horizontale, percent l'abscisse 3 dans les mêmes conditions. Ainsi de proche en proche, on verrait que les droites D et D' partant d'un même point rencontrent un même segment-unité s'éloignant indéfiniment; les deux droites sont confondues et l'on a

$$\beta' = \beta.$$

3. Je reviens au cas général, et je partirai de la remarque suivante très simple :

Si l'on a formé la suite (A) relative à un incommensurable α , la suite relative à l'un quelconque de ses multiples est formée uniquement de nombres contenus dans (A). Si donc on connaît une solution formée par les nombres α et β , on en obtient une autre en remplaçant α et β par un quelconque de leurs multiples. On obtiendra donc une solution en remplaçant dans la relation (1) α par $\frac{\alpha}{m}$ et β par $\frac{\beta}{n}$, ce qui fournit

$$(\alpha - m)(\beta - m) = mn.$$

Le cas signalé par M. Bricard rentre dans cette formule en y faisant

$$m = n.$$

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1925.

Composition de Mathématiques spéciales.

Soit (C) la courbe définie en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = \frac{1}{\cos 3\theta + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta},$$

où λ et μ sont deux nombres donnés.

I. Un angle droit tourne autour de son sommet placé à l'origine, ses côtés rencontrent (C) en deux points a et a' . Enveloppe de aa' .

Montrer que c'est une conique ayant un foyer à l'origine, la directrice correspondante étant la droite sur laquelle se trouvent les points d'inflexion de la courbe (C).

II. Lieu géométrique des points de rencontre des tangentes en a et a' à la courbe (C).

III. La tangente en a à la courbe C rencontre cette courbe en un point b qui sera dit associé du point a . Calculer les angles polaires du point b connaissant un angle polaire de a .

Former une équation ayant pour solutions les angles polaires des trois points a_1, a_2, a_3 où une droite (A) rencontre (C). En déduire une équation ayant pour solution les angles polaires des associés b_1, b_2, b_3 . Prouver que b_1, b_2, b_3 sont sur une droite (B).

[On pourra prendre les équations de (A) et (B) sous la forme

$$\frac{1}{\rho} = (u + \lambda) \cos \theta + (v + \mu) \sin \theta; \quad \frac{1}{\rho} = (u' + \lambda) \cos \theta + (v' + \mu) \sin \theta.]$$

IV. *A une droite (A) correspond une seule droite (B). Inversement à une (B) correspondent quatre droites (A₁), (A₂), (A₃), (A₄).*

(B) étant telle que (A₁) et (A₂) soient confondues, déterminer : 1° l'enveloppe de cette droite (A₁) ou (A₂); 2° l'enveloppe de (B); 3° le lieu du point commun à (A₃) et (A₄).

V. *Les quatre droites (A) correspondant à une (B) forment un quadrilatère. Les cercles qui ont pour diamètres les diagonales de ce quadrilatère se coupent en deux points. Démontrer que l'un de ces points a une position indépendante de (B). Lieu géométrique de l'autre quand (B) tourne autour d'un point fixe.*

On examinera le cas particulier où λ et μ sont nuls.

SOLUTION PAR JOSEPH DENAUX.

Il est assez indiqué d'établir d'abord la relation entre les angles polaires des trois points a_1, a_2, a_3 où une droite (A) rencontre (C). En prenant l'équation de (A) sous la forme indiquée par l'énoncé

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} = (u + \lambda) \cos \theta + (v + \mu) \sin \theta,$$

on trouve l'équation aux θ des points d'intersection

$$(2) \quad \cos 3\theta = u \cos \theta + v \sin \theta,$$

ou, en posant $\text{tang } \theta = t$,

$$vt^3 + (u + 3)t^2 + vt + u - 1 = 0,$$

d'où enfin, si t_1, t_2, t_3 sont les racines

$$(3) \quad \begin{cases} s_1 \equiv t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{u+3}{v}, \\ s_2 \equiv t_1 t_2 + \dots = 1, \\ s_3 \equiv t_1 t_2 t_3 = -\frac{u-1}{v}. \end{cases}$$

Il en résulte enfin, entre les angles polaires $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ la relation

$$(4) \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

chacun de ces angles n'est d'ailleurs défini qu'à un multiple de π près. D'autre part les paramètres u et v dont dépend l'équation de la droite (1) sont donnés par

$$(5) \quad u = \frac{3s_3 + s_1}{s_1 - s_3}, \quad v = \frac{-4}{s_1 - s_3}.$$

I. Les deux points a et a' correspondent à des paramètres t_1 et t_2 dont le produit est égal à -1 . Posons

$$t_1 + t_2 = \sigma$$

et soit t le paramètre du troisième point d'intersection de la droite (aa') et de (C). Les équations (3) s'écrivent

$$(3') \quad t + \sigma = -\frac{u+3}{v}, \quad t\sigma = 2, \quad t = \frac{u-1}{v},$$

d'où l'on tire

$$u^2 + v^2 - 1 = 0.$$

C'est en somme l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée; en prenant la droite (aa') sous la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

cette équation s'écrit

$$F \equiv (\alpha + \lambda\gamma)^2 + (\beta + \mu\gamma)^2 - \gamma^2 = 0.$$

On reconnaît une conique ayant son foyer à l'origine.

La directrice correspondante, obtenue en annulant F'_α et F'_β , correspond à $u = v = 0$. C'est la droite

$$(\Delta) \quad \frac{1}{\rho} = \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta$$

qui porte bien les points d'inflexion de la cubique (C); ces points d'inflexion correspondent en effet à

$$\cos 3\theta = 0$$

[d'après (4)] de sorte que le rayon vecteur de (C) s'y réduit au rayon vecteur de (Δ).

II, III et IV. La tangente en un point (a) de la courbe (C), définie par son angle polaire α , recoupe la courbe en un point b

d'angle polaire β tel que

$$(6) \quad 2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Si l'on se donne le point b il lui correspond deux points a et a' ayant les angles polaires respectifs

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2}$$

(angles polaires définis à $k\pi$ près). Les rayons Oa et Oa' sont rectangulaires de sorte que le lieu demandé dans la deuxième partie est constitué par la courbe C elle-même.

Les angles polaires des trois points a_1, a_2, a_3 où (A) rencontre (C) vérifiant la relation

$$(1') \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

on a, pour les points correspondants des formules telles que (6), d'où, par addition,

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{\pi}{2} + k'\pi,$$

de sorte que b_1, b_2, b_3 sont bien sur une droite (B).

La droite (B) étant donnée on connaît $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et, pour fixer les idées, nous prendrons pour ces angles des déterminations telles que

$$(1'') \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Les points correspondants a seront alors désignés par les notations $a_1 a'_1, a_2 a'_2, a_3 a'_3$ et nous pourrons prendre, pour leurs angles polaires les déterminations

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta_1}{2}, & \alpha'_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\pi}{2}, \\ \alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta_2}{2}, & \alpha'_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta_2}{2} + \frac{\pi}{2}, \\ \alpha_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta_3}{2}, & \alpha'_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta_3}{2} + \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

D'après (1') et (1'') il est évident que ces points se groupent sur

quatre droites $(A_1), (A_2), (A_3), (A_4)$ qui correspondront ainsi à B.
Les droites

$$\left. \begin{array}{l} (A_1) \\ (A_2) \\ (A_3) \\ (A_4) \end{array} \right\} \text{joignant respectivement les points} \left\{ \begin{array}{l} a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\ a_1 \quad a'_2 \quad a'_3 \\ a'_1 \quad a_2 \quad a'_3 \\ a'_1 \quad a'_2 \quad a_3 \end{array} \right.$$

Pour que (A_1) et (A_2) soient confondues il faut que les points a'_2 et a_3 , a_2 et a'_3 coïncident. D'après (7) on en tire immédiatement que β_2 et β_3 diffèrent de $(2k + 1)\pi$; les points b_2 et b_3 coïncident et la droite (B) est tangente à la courbe C.

La droite (A_1) [ou (A_2)] qui joint les points a_3 et a'_3 (confondu avec a_2), tels que les rayons vecteurs soient rectangulaires, enveloppe la conique obtenue dans la question I. Le point a'_1 commun à (A_3) et (A_4) décrit la courbe (C).

V. Une des diagonales du quadrilatère joint les points a_1 [commun à (A_1) et (A_2)] et a'_1 (commun à A_3 et A_4). Les rayons vecteurs correspondants étant rectangulaires le cercle de diamètre $a_1 a'_1$ passera par l'origine. Il est élémentaire que les trois cercles de l'énoncé ont deux points communs : l'un de ces points O sera bien indépendant de la position de la droite (B).

Soit l'un des cercles en question (Γ) , de diamètre aa' [nous supprimons les indices 1, 2 ou 3]; il dépend seulement de la position du point b qui est associé commun de a et a' . Il est clair qu'avant de répondre à la dernière question posée par l'énoncé il faut déterminer l'équation de ce cercle en fonction du paramètre β qui fixe la position de b .

L'équation polaire de (Γ) étant

$$\rho = 2m \cos \theta + 2n \sin \theta,$$

les points d'intersection de (Γ) et (C) sont déterminés par

$$(\cos 3\theta + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) (2m \cos \theta + 2n \sin \theta) = 1,$$

équation qui doit admettre les racines α et $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$ (angles polaires de a et a'). Il est tout indiqué d'écrire cette équation en y faisant intervenir seulement les lignes des arcs 2θ et 4θ . On

obtient

$$m[\cos 4\theta + (\lambda + 1)\cos 2\theta + \mu \sin 2\theta + \lambda] + n[\sin 4\theta + (\lambda - 1)\sin 2\theta - \mu \cos 2\theta + \mu] = 1,$$

qui doit être vérifiée pour

$$2\theta = \frac{\pi}{2} - \beta;$$

où β , angle polaire de b , n'est déterminé qu'à $k\pi$ près. Cela fait deux conditions

$$\begin{aligned} -m(\cos 2\beta - \lambda) + n(\sin 2\beta + \mu) &= 1, \\ m[(\lambda + 1)\sin \beta + \mu \cos \beta] + n[(\lambda - 1)\cos \beta - \mu \sin \beta] &= 0 \end{aligned}$$

qui donnent m et n , coordonnées du centre du cercle, par les formules

$$(8) \quad \begin{cases} m = r[(1 - \lambda)\cos \beta + \mu \sin \beta], \\ n = r[(\lambda + 1)\sin \beta + \mu \cos \beta] \end{cases}$$

avec

$$(9) \quad \frac{1}{r} = -\cos 3\beta + \cos \beta(2\lambda + \mu^2 - \lambda^2) + 2\sin \beta \cdot \mu(1 + \lambda).$$

Pour terminer la question tout calcul est superflu et il suffit d'interpréter les équations obtenues. Le point b' de coordonnées polaires r et β décrit une courbe (C') analogue à la courbe (C) et qui peut s'en déduire par une symétrie de centre O et un changement des valeurs des constantes λ et μ . La condition pour que trois points de la courbe (C) soient en ligne droite ne fait pas intervenir les valeurs de λ et μ de sorte qu'à trois points de la courbe (C) alignés sur une droite (B) correspondent trois points de (C') alignés sur une droite (B').

Il faut ajouter que (C) et (C') se correspondent dans une transformation ponctuelle de tout le plan pour laquelle l'angle polaire restant le même, les rayons vecteurs de deux points homologues b et b' sont liés par une relation

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{\rho} + \lambda_1 \cos \beta + \mu_1 \sin \beta.$$

Cette correspondance change les droites en droites : c'est d'ailleurs une homologie. Enfin les formules (8) définissent une nouvelle

homographie dans laquelle le centre b'' du cercle (Γ) correspond au point b' : les centres des trois cercles (Γ) sont donc, comme on le savait *a priori*, sur la droite (B'') homologue de (B) .

La droite (B) tournant autour d'un point fixe p , les droites (B') et (B'') tournent autour des homologues p' et p'' . Le lieu du second point d'intersection des trois cercles (Γ) sera donc le cercle de centre p'' passant par l'origine.

Le cas où λ et μ sont nuls est particulièrement simple, p' et p'' sont confondus et coïncident avec le symétrique de p par rapport à l'origine.

Il faut dire aussi un mot du cas particulier où, $\lambda^2 + \mu^2$ étant égal à l'unité, les seconds membres des équations (8) ne sont pas distincts; l'homographie que définissent ces formules est alors dégénérée et, quel que soit b , le centre b'' du cercle (Γ) est sur une droite fixe passant par l'origine. Le lecteur achèvera sans peine l'examen de ce cas.

Remarque. — Pour traiter les quatre premières parties du problème on aurait pu borner, au cas de λ et μ nuls, une homologie analogue à celle qui vient d'être envisagée permettant de passer à des valeurs quelconques de λ et μ . Pour λ et μ nuls la solution géométrique de la première question est infiniment simple.

Soient en effet q et q' les points déduits de a et a' en triplant l'angle polaire, sans changer le rayon vecteur. Ils appartiennent à la droite $x = 1$ et les rayons Oq et Oq' sont rectangulaires comme les rayons Oa et Oa' . Les triangles Oaa' et Oqq' sont égaux de sorte que la droite aa' enveloppe le cercle de centre O et de rayon 1.

Nous jugeons inutile d'insister ici sur les considérations géométriques, bien évidentes, qui se rapportent à la théorie générale des cubiques unicursales.

SOLUTION DE QUESTION DE LICENCE.

Question C. 26.

[Calcul différentiel et intégral; épreuve pratique; énoncé publié en décembre 1925, p. 94.]

SOLUTION

par M. L. MENESSIER.

On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z^2+z+1)},$$

et l'on demande de calculer la valeur de l'intégrale $\int f(z) dz$ le long des cercles C de centre O ne passant par aucun point singulier.

La fonction $f(z)$ admet le pôle double $z=2$ et les deux pôles simples

$$z = \alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = \beta = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Considérons un cercle C_0 de rayon très grand; si ce dernier augmente indéfiniment, $|zf(z)|$ tend vers zéro et $\int_{C_0} f(z) dz$ tend aussi vers zéro.

Donc le résidu R_∞ au point à l'infini, de $f(z)$, est nul.

Sur un cercle C_1 de rayon > 2 , nous avons

$$\int_{C_1} f(z) dz = 2i\pi(R_2 + R_\alpha + R_\beta),$$

R_p étant le résidu de $f(z)$ au point $z=p$.

Comme $R_\infty = 0$, on a aussi

$$R_2 + R_\alpha + R_\beta = 0$$

et

$$\int_{C_1} f(z) dz = 0.$$

Soit un cercle C_2 de rayon compris entre 1 et 2,

$$\int_{C_2} f(z) dz = 2i\pi(R_\alpha + R_\beta) = -2i\pi R_2,$$

et comme

$$R_2 = \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{d}{dz} (z-2)^2 f(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{-(2z+1)}{(z^2+z+1)^2} \right] = -\frac{5}{49},$$

il vient

$$\int_{C_2} f(z) dz = \frac{10}{49} i \pi.$$

Enfin pour un cercle C_3 de rayon inférieur à 1,

$$\int_{C_3} f(z) dz = 0.$$

Autre solution par A. MONJALLON.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

C. 60. — ÉPREUVE THÉORIQUE. (*Mécanique*). — Un point matériel M, de masse m , se déplace sans frottement sur une droite horizontale Ox ; il est attaché à une extrémité d'un fil élastique de longueur naturelle l , qui, après avoir passé dans un petit anneau situé en O, a son autre extrémité fixée en un point situé sur la verticale de O, à une distance de ce point égale à l . On admet que le fil exerce sur le point M une force proportionnelle à son allongement, c'est-à-dire égale à $m \cdot k^2 \cdot \overline{MO}$ (k étant un coefficient numérique supposé connu).

Le point M est soumis en plus, de la part de l'air, à une résistance proportionnelle à la vitesse et dirigée en sens contraire, égale à $m \cdot \mu \cdot v$ (μ étant un coefficient numérique, très petit par rapport à k).

On lâche le point sans vitesse initiale en un point M_0 d'abscisse x_0 positive.

1° Étudier le mouvement. — Montrer qu'il se compose d'oscillations isochrones dont l'amplitude décroît en progression géométrique.

2° Dans une expérience réalisant ces conditions, on a trouvé qu'au bout de 1800 oscillations simples, l'amplitude se trouvait réduite aux $\frac{2}{3}$ de sa valeur initiale. Calculer le rapport entre la durée d'une oscillation simple dans ces conditions et la durée d'une même oscillation simple s'il n'y avait pas résistance de l'air.

3° Dans une deuxième expérience, le fil se rompt au moment où le point M passe en O pour la première fois; quel sera le mouvement ultérieur du point M sous l'action de la seule résistance de l'air.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la fonction

$$y = \frac{[2M + \log x]^2}{x}$$

(où les logarithmes sont des logarithmes vulgaires et où

$$M = \log e = 0,43429).$$

1° Indiquer sommairement les variations de la fonction y .

2° Représenter sur papier millimétrique, de façon aussi exacte que possible, la partie de la courbe représentative correspondant à $0,1 < x < 1,1$ en calculant les ordonnées pour des valeurs de x variant de dixième en dixième.

On prendra 10^{cm} pour représenter l'unité de longueur en abscisses et 20^{cm} pour l'unité d'ordonnée.

3° Évaluer par une méthode approchée au choix du candidat l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et les droites $x = 0,1$ et $x = 1,1$.

Comparer le résultat obtenu avec le calcul direct de l'intégrale définie

$$\int_{0,1}^{1,1} \frac{[2M + \log x]^2}{x} dx.$$

(Strasbourg, juin 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Courbure en un point d'une surface d'une section plane de cette surface. Étudier comment elle varie : 1° quand la section tourne autour d'une tangente donnée à la surface; 2° quand elle tourne autour de la normale.

II. Soit l'équation

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (n \text{ entier positif}).$$

1° Montrer qu'elle admet comme solution particulière un certain polynôme $P(x)$ de degré n .

2° Montrer que le changement d'inconnue $y = zP(x)$ conduit à une équation en z qui s'intègre par deux quadratures de fonctions rationnelles.

3° Effectuer les calculs pour $n = 1$.

Indication sur la solution de II. — La détermination de la solution particulière P se fait en substituant un polynôme de degré n .

La transformation en z donne une équation linéaire ne contenant pas z parce que P est une solution. z' est une intégrale de

$$(1 - x^2)Pu' + [2(1 - x^2)P' - 2xP]u = 0,$$

donnant

$$\frac{u'}{u} = \frac{2x}{1-x^2} - \frac{2P'}{P},$$

donc z' fraction rationnelle de x .

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sur la parabole*

$$y^2 = 2px$$

se meut sans frottement un point non pesant attiré par le foyer en raison inverse du carré de la distance. Soit T la période du mouvement limité aux points ayant une abscisse x_0 donnée, T_0 celle des très petits mouvements :

1° Calculer $\frac{T}{T_0}$ en fonction de $\frac{x_0}{p}$; variation;

2° Déterminer $\frac{x_0}{p}$ sachant $\frac{T}{T_0} = 2$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'équation du mouvement est donnée par l'intégrale des forces vives

$$m(x'^2 + y'^2) = \frac{mk^2}{r} + h = \frac{mk^2(r_0 - r)}{rr_0},$$

r s'exprime en fonction de x par la propriété de la directrice et y'^2 en fonction de x' et x par l'équation, on a ainsi l'équation en x qui en faisant $\frac{x}{p} = u$ donne l'équation en u

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{8k^2}{p^2} \frac{(u_0 - u)u}{(2u_0 + 1)(2u + 1)^2}.$$

Dans un quart d'oscillation u varie de zéro à u_0 , donc

$$T = 4 \sqrt{2u_0 + 1} \sqrt{\frac{p^3}{8k^2}} \int_0^{u_0} \frac{(2u + 1) du}{\sqrt{(u_0 - u)u}}.$$

Intégrale définie d'un calcul classique qui donne T en fonction de u_0 et donne T_0 quand u_0 tend vers zéro.

(Bordeaux, novembre 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Rayon de convergence d'une série entière. Comme exemple on calculera le rayon de convergence de la série*

$$u_n = \left(\frac{nx}{n-1}\right)^n,$$

et l'on cherchera sa nature sur le cercle de convergence.

II. Soit, dans un plan vertical, un arc de cercle matériel AB dont tous les points sont plus bas que A . Sur cette courbe se meut sans frottement un point pesant M parti de A sans vitesse. En B ce point devient libre (parce que la courbe matérielle n'existe plus).

1° Montrer que la parabole qu'il décrit alors a pour directrice l'horizontale de A .

2° AB est un arc de cercle de rayon a , A est sur l'horizontale du centre O et $\widehat{AOB} = \pi - \alpha$, α étant un angle donné compris entre O et π . On demande l'équation de la parabole, les coordonnées de son sommet, le lieu de ce sommet quand α varie de O à $\frac{\pi}{2}$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° h étant la distance verticale de A et B le mobile arrive en B avec la vitesse $\sqrt{2gh}$ qui est la vitesse initiale sur la parabole. Or on sait ou on démontre immédiatement que la directrice d'une parabole de chute a pour directrice une horizontale située à la distance $\frac{v^2}{2g}$ au-dessus du point de départ; cette distance étant précisément h , la propriété annoncée est démontrée.

2° Prenant comme axes le diamètre horizontal et le diamètre vertical descendant, l'équation de la parabole est

$$y = a \sin \alpha - \frac{(x + a \cos \alpha) \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{(x + a \cos \alpha)^2}{4 a \sin^3 \alpha}.$$

Les coordonnées du sommet sont

$$a \cos \alpha (2 \sin^2 \alpha - 1), \quad a \sin^3 \alpha$$

et ces formules définissent le lieu demandé.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit la surface

$$z = x \operatorname{sh} y.$$

1° Calculer les angles que fait avec les axes Ox, Oy, Oz la normale à cette surface en un point. Vérifier que le long d'une courbe $x = \text{const.}$ l'angle avec Oy est constant.

2° Soit Σ la portion de cette surface qui a pour projection sur le plan des xy l'intérieur du rectangle limité par les droites

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = a, \quad y = b \quad (a > 0, b > 0).$$

La densité de surface de Σ étant constante, calculer les coordonnées ξ, η, ζ du centre de gravité de Σ .

3° Calculer numériquement ξ, η, ζ pour $a = b = 1$.

4° Lieu géométrique du centre de gravité quand a varie, b restant constant.

Nota. — On sait que

$$\operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}), \quad \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \\ \operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1.$$

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Les cosinus directeurs de la normale sont

$$\frac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{1+x^2} \operatorname{ch} y}, \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{1+x^2} \operatorname{ch} y};$$

le second ne dépend que de x , d'où la propriété de la première partie. La surface de l'élément qui se projette suivant le rectangle élémentaire dx, dy est

$$\sqrt{1+x^2} \operatorname{ch} y \, dx \, dy.$$

Prenant la densité superficielle égale à l'unité on a pour $M, M\xi, M\eta$ et $M\zeta$ quatre intégrales doubles de la forme⁸

$$\iint F(x) \Phi(y) \, dx \, dy$$

étendues au rectangle indiqué dans l'énoncé, intégrales qui se ramènent à des produits d'intégrales simples

$$\int_0^a F(x) \, dx \int_0^b \Phi(y) \, dy;$$

ces intégrales simples se calculent d'ailleurs facilement en tenant compte des propriétés connues des fonctions hyperboliques.

(Bordeaux, novembre 1924.)

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C. 61. — 1° Trouver les solutions communes aux deux équations

$$(x + pz)^2 + (y + qz)^2 = R^2, \quad x + pz = R \cos \alpha,$$

R et α étant deux constantes données.

2° Trouver l'intégrale générale de la première de ces équations.

3° Déterminer les surfaces S telles que la normale en chacun de leurs points rencontre le cercle

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Quelle est l'équation de la surface de la famille qui passe par la droite

$$y = 0, \quad z = R.$$

4° Les surfaces S peuvent être considérées comme l'enveloppe d'une famille de sphères que l'on définira géométriquement. Montrer qu'il existe une surface Σ de la famille S pour laquelle les sphères précédentes ont toutes pour rayon R.

5° Déterminer les lignes de courbure des surfaces S.

6° Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques des surfaces S. Intégrer cette équation quand la surface S considérée est la surface Σ du n° 4°.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. En un point M d'une courbe gauche Γ , on considère le plan P passant par M et perpendiculaire à la normale principale.

Ce plan enveloppe une surface développable S. On demande :

- a. Les équations de la génératrice D de S qui passe par M;
- b. L'angle de D avec la tangente en M à Γ ;
- c. De montrer que D est le support d'un vecteur dont les projections sur la tangente et la binormale ont pour valeurs algébriques R et $-T$, R et T étant les rayons de courbure et de torsion.

C. 62. — II. Évaluer l'aire de la surface

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2.$$

(Grenoble, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C. 63. — I. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(1 + q^2)z = px.$$

- 1° Déterminer les multiplicités caractéristiques de l'équation.
- 2° Trouver les surfaces intégrales qui passent par la parabole

$$x^2 = 2z, \quad y = 0.$$

- 3° Déterminer toutes les surfaces intégrales développables.

C. 64. — II. Les équations

$$x = \frac{u-v}{2} + \rho \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u+v}{2} - \rho \frac{u-v}{2}, \quad z = \rho \frac{u^2 + v^2}{2a},$$

où ρ désigne un paramètre variable, représentent une droite (D); a dénotant une longueur donnée, (D) dépend de deux paramètres variables, u et v .

- 1° Montrer qu'on peut établir entre u et v une infinité de relations

telles que les droites (D) correspondant à chacune d'elles restent tangentes à une même courbe (Γ); quelles sont les projections des courbes (Γ) sur le plan xOy ?

2° Montrer que lorsque u et v varient de toutes les manières possibles, la droite (D) reste tangente à deux surfaces du second degré.

3° Rechercher s'il existe des surfaces (Σ) admettant pour normales les droites (D).

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer par la méthode des résidus l'intégrale définie

$$I = \int_0^1 \frac{(1+x^2) dx}{\sqrt[3]{x^3(1-x)}},$$

où le chemin d'intégration et le radical sont réels.

INDICATIONS. — Un contour classique, enveloppant les points 0 et 1, donne

$$I = \frac{28\pi}{25 \sin \frac{\pi}{5}}.$$

(Poitiers, novembre 1925.)

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Soit $Ox_1y_1z_1$ un trièdre trirectangle fixe où l'axe Oz_1 est vertical ascendant.

Un des côtés, AB, d'une plaque carrée, homogène, d'épaisseur négligeable, ABCD reste dans le plan x_1Oy_1 ; de plus la perpendiculaire à AB menée par le centre G de la plaque est assujettie à passer par le point P de Oz_1 dont la cote est h ($h > 0$). On prendra pour paramètres l'angle $\psi = \widehat{Ox_1, AB}$ et l'angle θ que la plaque fait avec le plan horizontal x_1Oy_1 .

1° Trouver l'axe instantané de rotation et de glissement Δ de la plaque pour un mouvement quelconque compatible avec les liaisons, c'est-à-dire tel que θ et ψ soient des fonctions, censées connues, du temps t . Quel est pour une position donnée de la plaque le lieu S de cet axe lorsqu'on fait varier le rapport des vitesses angulaires θ' et ψ' ?

On supposera que pour la position considérée $\psi = 0$, et l'on rapportera les équations de Δ et de S à des axes parallèles à $Ox_1Oy_1Oz_1$ choisis de façon que les équations soient aussi simples que possible.

2° Écrire les équations différentielles du mouvement de la plaque, la seule force donnée étant le poids et le frottement étant négligé;

montrer que ces équations s'intègrent par des quadratures. On ne fera pas de discussion. Pour cette question on admettra que le côté de la plaque a pour longueur $4h$.

3° L'angle θ peut-il, au cours d'un mouvement de cette nature, garder une valeur constante? Dans cette dernière question, on fera usage de notations abrégées en désignant par α et β les coefficients de ψ^2 et θ'^2 dans l'expression de la force vive.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Le mouvement de la plaque peut se décomposer en un mouvement d'entraînement où ψ varie seul et un mouvement relatif où θ varie seul; pour chacun de ces mouvements il y a une rotation tangente. Les vecteurs rotations instantanées sont l'un, ψ' , porté par Oz_1 ; l'autre, θ' , porté par une parallèle à AB (et par suite à Ox_1); cette parallèle se projette horizontalement suivant AB , et rencontre la normale à la plaque passant en P .

On en déduit le torseur des rotations instantanées dans le mouvement résultant; ses coordonnées plückériennes s'obtiennent en ajoutant celles des deux vecteurs précédents. Prenons des axes $O'XYZ$ se déduisant de $Ox_1y_1z_1$ par une translation parallèle à Oz_1 , telle que le vecteur θ' soit dans le plan $Z = 0$; on trouve, tous calculs faits, pour coordonnées du torseur

$$\theta', 0, \psi', 0, 0, h\theta' \cot \theta \quad \left(\theta' = \frac{d\theta}{dt}, \psi' = \frac{d\psi}{dt} \right).$$

Les équations de l'axe instantané, axe central du torseur, sont

$$(A) \quad \psi'X - \theta'Z = 0, \quad (\theta'^2 + \psi'^2)Y + h\theta'^2 \cot \theta = 0.$$

Le lieu de Δ lorsque le rapport $\frac{\theta'}{\psi'}$ varie est le conoïde du troisième ordre (cylindroïde) d'équation

$$(S) \quad (X^2 + Z^2)Y + hX^2 \cot \theta = 0.$$

2° Les équations de Lagrange sont applicables; la force vive, calculée par le théorème de Kœnig est

$${}^2T = \alpha\psi'^2 + \beta\theta'^2,$$

$$\alpha = Mh^2 \left[\frac{\cos^2 \theta (1 - 2 \sin \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \frac{4}{3} (1 + \cos^2 \theta) \right],$$

$$\beta = Mh^2 \left[\frac{1 - 4 \sin^3 \theta + 4 \sin^4 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{4}{3} \right];$$

il y a fonction des forces données

$$U = -2Mgh \sin \theta + \text{const.}$$

L'équation de Lagrange relative à ψ donne l'intégrale première

$$(1) \quad \alpha\psi' = k$$

qu'on retrouve par application du théorème du moment cinétique relatif à Oz_1 . A l'équation de Lagrange relative à θ on substitue l'intégrale

première des forces vives (liaisons indépendantes du temps, sans frottement, fonction de forces données)

$$T = U + C \quad (C \text{ const.})$$

qui donne en tenant compte de (1) l'équation

$$(2) \quad \theta'^2 = \frac{(2C - 4Mgh \sin \theta)\alpha - k^2}{\alpha\beta} \equiv f(\theta); \quad t = \int \frac{d\theta}{\pm \sqrt{f(\theta)}}.$$

3° Si θ est constant, ψ' l'est aussi, d'après l'équation (1). La valeur est donnée en fonction de θ par l'équation de Lagrange en θ qui donne, pour $\theta' = \theta'' = 0$,

$$(3) \quad \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\theta} \psi'^2 = Mgh \cos \theta.$$

Inversement, si ψ' est donné par (3) et si $\theta' = 0$ les équations du mouvement donnent $\psi'' = \theta'' = 0$; la condition trouvée est à la fois nécessaire et suffisante. Reste la discussion facile de l'équation (3).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les deux extrémités A, B d'une tige rectiligne homogène de longueur $2l$ glissent sans frottement sur deux droites rectangulaires DD' situées dans un même plan vertical et inclinées à 45° sur l'horizon.*

Dans ce même plan vertical un point matériel P, dont la masse est la fraction f de celle de la tige, est relié au milieu C de la tige par un fil inextensible de masse négligeable, de longueur l . Étudier les petites oscillations du système pesant ainsi constitué. On appelle θ et φ les angles de OC et de CP avec la verticale descendante OV, O étant le point de concours de D et D'.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Aux poids correspond la fonction de force

$$U = Mlg[(1+f) \cos \theta + f \cos \varphi]$$

qui est maximum pour $\theta = \varphi = 0$; c'est une position d'équilibre stable, et c'est la seule. On calcule la force vive du système et on la réduit à ses termes de moindre degré

$$2T_r = Ml^2 \left[\left(\frac{4}{3} + f \right) \theta'^2 + f\varphi'^2 + 2f\varphi'\theta' \right].$$

On lui adjoint la fonction des forces réduite à ses termes du second degré

$$U_r = -Mlg \left[(1+f) \frac{\theta^2}{2} + \frac{f}{2} \varphi^2 \right].$$

Cette force vive et cette fonction des forces réduites donnent des équations de Lagrange qui sont celles des petits mouvements et dont l'intégration par le procédé classique n'offre aucune difficulté.

(Grenoble, juin 1925.)

N. D. R. — *Il serait superflu de souligner l'intérêt de l'article que nous publions aujourd'hui. Le caractère des Nouvelles Annales nous oblige à laisser habituellement de côté l'étude et la discussion des questions pédagogiques, mais nous sommes heureux de pouvoir faire ici une exception : exception amplement justifiée, puisque la réforme du programme de Mathématiques spéciales intéresse tout notre enseignement scientifique.*

La Rédaction des Nouvelles Annales n'a pas à prendre parti dans le débat. Mais il nous sera permis d'exprimer ici notre conviction qu'une discussion, portant peut-être moins sur des principes que sur leur application, ne peut manquer d'être très féconde et d'aboutir à une conciliation des points de vue.

A PROPOS DU NOUVEAU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES ;

PAR J. HADAMARD.

Je suis bien surpris, — et bien désagréablement, — d'avoir à m'élever contre les résolutions prises par des hommes dont les idées sont d'habitude si complètement d'accord avec les miennes, et envers qui nous professons tous une si haute estime. Le désaccord existe cependant : bien des choses me paraissent regrettables dans ce qui vient d'être fait, et je crois devoir le dire.

Amour-propre d'auteur? Peut-être : nous avons en effet, quelques collègues de l'École Polytechnique et moi, élaboré un projet qui nous paraissait répondre aux besoins actuels, et que nous avions la prétention d'avoir convenablement mûri. Nous avons eu soin de prendre les avis d'un ou deux professeurs de Spéciales, choisis, bien entendu, parmi les plus réputés. Nous étions sûrs en particulier de n'avoir point augmenté la difficulté du programme, de n'en avoir point augmenté, d'en avoir même diminué l'étendue : ceci d'ailleurs non point tellement au point de vue du travail imposé

aux candidats (l'expérience a montré, on le sait, que ce n'est pas le nombre des questions inscrites qui mesure le surmenage des « taupins » et qu'il y a erreur totale à vouloir agir sur celui-ci par celui-là) qu'au point de vue du temps nécessaire aux professeurs pour terminer leur cours de manière à permettre, même pour ceux qui se prépareront en une seule année, une sérieuse révision. Ce sont ces propositions qui ont été accueillies, non seulement la plupart sans approbation, mais — il est permis d'en être surpris et de le regretter — à peine, autant qu'il me semble, avec une sérieuse attention.

Cela est permis sans le moindre amour-propre d'auteur (voire collectif, puisqu'il s'agit, nous l'avons dit, d'une œuvre commune). La question est plus haute. Pour avoir été négligés par la Commission, les motifs qui nous avaient guidés n'ont pas cessé d'avoir leur valeur, à une heure aussi grave que celle que nous traversons.

Ce n'est pas, en effet, enfler le ton hors de propos que de porter un instant un pareil débat sur un terrain supérieur. Je n'ai pas à rappeler ici combien il affecte les intérêts les plus divers et les plus essentiels du pays, à commencer par la défense nationale : tout lecteur le sait aussi bien que moi-même ; mais je voudrais que tout lecteur ait cela présent à l'esprit en parcourant ce qui va suivre, comme nous-mêmes, au cours de notre travail, ne perdions pas de vue ce que les « Mathématiques spéciales » représentent virtuellement de vie scientifique, de vie pratique, de pensée et d'action, — d'officiers, d'ingénieurs, d'industriels, de savants.

C'est à cette œuvre que, les uns et les autres, nous avons à collaborer, pour notre faible part, dans le travail relativement modeste de l'élaboration d'un programme.

I.

La première et principale préoccupation que nous éprouvons n'est que trop partagée par tous ceux qui, dans ces dernières années, ont songé à l'intérêt de notre enseignement scientifique.

La classe de Mathématiques spéciales est, comme les langues d'Ésope, la meilleure et la pire des choses. La meilleure, je n'ai pas besoin d'y insister. C'est un privilège unique de l'enseignement français de faire assimiler dès le lycée des connaissances qui

partout ailleurs sont réservées à l'enseignement supérieur et de rompre la jeunesse à leur maniement, avec la perfection que l'on sait, en quelques mois, et une telle œuvre fait l'admiration de tous les visiteurs qui nous viennent de l'Étranger.

Je rappelle cela, qui n'a rien à voir directement avec ce qui va suivre, afin de ne pas donner le change sur ma pensée au moment où il me reste à en présenter la contre-partie.

Cette contre-partie est, malheureusement, elle aussi, de notoriété générale. L'« esprit taupin ». on ne sait que trop ce que cela signifie, quel pédantisme naïf, quelle confiance illimitée en la vertu universelle des formules cela implique, chez des esprits qu'un enseignement relativement élevé devrait, croirait-on, avoir libéré de tares de cet ordre. Quel est ici le principal coupable? Est-ce l'enseignement des mathématiques spéciales tout seul, ou ne serait-ce pas aussi, comme j'ai eu l'occasion de le dire ailleurs, l'enseignement secondaire dans son ensemble, avec son orientation perpétuellement formelle et abstraite? Tous deux assurément, et la défaillance de l'un ne doit pas nous cacher la défaillance de l'autre. En tout cas, le mal est là, et il est très sérieux. L'inévitable désir du moindre effort aidant, le taupin — le mot est trop consacré par l'usage pour qu'il en vienne un autre sous ma plume — sort trop souvent de sa dernière année de lycée avec la tendance à tout réduire à une formule, à oublier, une fois qu'il l'a acquise (et cela, chose curieuse, même lorsqu'il en a compris la démonstration) le problème concret qui a servi de point de départ, à se refuser à toute vue directe des faits; et, de cette tendance, il lui reste en général quelque chose pour toute sa vie. Les fruits admirables que nous tirons par ailleurs des Spéciales, compensent, certes, un pareil inconvénient. On a trop souvent cru qu'ils devaient le faire oublier. Il faut renoncer à cette illusion : tous ceux qui ont suivi la vie nationale dans la récente période, et surtout dans la récente crise, savent quel danger grave il y a là, et combien il est temps d'y parer.

Nous nous étions efforcés de lutter contre cette tendance désastreuse dans la faible mesure des moyens que nous avions à notre disposition, c'est-à-dire en supprimant à l'occasion ce qui était de nature à la développer et en insistant au contraire sur les sujets qui pouvaient développer et encourager l'intuition. De ce

nombre sont, on le sait, les notions empruntées à la géométrie pure.

La mise en œuvre de ce principe n'est d'ailleurs pas sans présenter quelques difficultés et sans avoir occasionné quelques malentendus, comme il arrive forcément lorsqu'on lutte contre cet ennemi redoutable en pédagogie qui s'appelle la paresse de l'esprit humain. L'emploi exclusif et abusif des « méthodes générales » n'a pas été, à l'usage, sans effet fâcheux sur des esprits d'écoliers, heureux de trouver un oreiller commode pour leur incuriosité dans ces règles où, on l'a dit, l'inventeur a concentré tout l'effort d'intelligence qu'il entend épargner à ceux qui useront de son travail.

Mais étrange serait l'idée de tomber par réaction dans un excès inverse et de vouloir proscrire les idées générales, si ce n'est même les idées tout court, de tout l'enseignement mathématique ; de tomber par conséquent forcément, soit dans l'artifice, — le contraire de toute saine pédagogie — soit dans les calculs les plus indigestes. C'est cependant un pareil idéal que de bons esprits en sont venus, paraît-il, à nous proposer. Si vraiment telle est leur idée, je ne puis qu'avouer mon impuissance à les comprendre. Il faut croire que par les mots « formation du jugement, développement de l'esprit », nous n'entendons point les mêmes choses. C'est, dans une voie opposée en apparence à celle dont nous parlions à l'instant, le même vice pédagogique qui apparaît, la même absence de valeur éducative.

La contradiction n'est, en effet, qu'apparente. Non seulement il est clair que l'enseignement devra constamment montrer la relation entre une idée générale et ses applications concrètes ; mais s'il est des « idées générales » que nous serons amenés à proscrire, il y a cent à parier contre un que, pour « générales » qu'elles soient, les méthodes dont il s'agira ne renfermeront guère d'idées, ne seront guère propres à en développer chez l'élève ni surtout à lui donner l'habitude de se faire lui-même une idée des faits qu'il a à étudier.

Tel est, en particulier, le cas pour la géométrie analytique, contre laquelle, on le sait, ou plutôt contre l'abus de laquelle, le programme de 1904 mettait en garde non sans quelque raison. Contradiction avec la nécessité de développer l'élément géomé-

trique dans l'esprit de la jeunesse scientifique? Oh non! car il arrivait, et il arrive trop souvent, à cette géométrie analytique de n'être point de la Géométrie; à l'élève, sinon au professeur, d'oublier que c'est de Géométrie qu'il s'agit.

Même en restant dans le domaine de l'analyse, on peut trouver aisément des exemples de ce que j'avance. Le mieux est, d'ailleurs, de les aborder tout de suite et, — évitant, nous aussi, un trop long séjour dans l'abstraction, — d'en venir, sans plus tarder, à l'application. Ce que je crains d'avoir assez mal dit dans ce qui précède, et que le lecteur aura pu trouver quelque peu nébuleux, s'éclairera, je l'espère, à sa lumière.

Le projet que nous présentions supprimait expressément du programme le fameux « théorème de Rouché ».

Que voilà un bel objet de vitrine! Comme il résume dans son seul énoncé toute l'étude du sujet et semble dispenser de tout autre effort; — et combien en effet il mérite d'exciter l'intérêt, sinon même l'admiration... de ceux qui connaissent par ailleurs à fond les propriétés des équations et des formes linéaires et n'ont pas besoin de lui pour les apprendre. Pour le débutant, pour l'élève de Spéciales, c'est une autre affaire, du moment qu'on veut lui fournir une intelligence véritable des formes linéaires et de leur indépendance. S'il s'agit de déclarer le théorème de Rouché la plus belle chose du monde, j'y consens tout de suite; s'il s'agit de le déclarer utile, j'y serai prêt le jour où l'on m'en aura montré une application tant soit peu importante, une seule, soit dans une théorie mathématique, soit même à propos d'un exemple numérique pratique, comme il peut s'en trouver parfois. Quant au « taupin » — tant pis! Je continue et continuerai à user du mot : il n'exprime que trop bien les tendances contre lesquelles nous voudrions lutter — au taupin habitué à croire au théorème de Rouché comme à la loi suprême, il lui faut souvent quelque hésitation et un astucieux calcul pour dire si cinq ou six formes linéaires données sont indépendantes, alors qu'il s'est déjà aperçu que les trois premières ne le sont pas.

Point d'illustration plus typique, à mon sens, que celle-là d'une méthode pédagogique théoriquement parfaite, en réalité éminemment propre à déformer l'esprit, au moins à un certain point de

vue, et qui y réussit en général assez bien. Point de suppression qui nous ait paru mieux s'imposer.

Qu'a fait la Commission interministérielle, dans le programme qui vient d'entrer en vigueur?

D'une manière générale, elle déclare avoir bien entendu parler du danger d'une abstraction exagérée, de l'insuffisance d'intuition et de vues concrètes; mais... elle s'en lave les mains. Affaire aux professeurs, aux examinateurs, bref à tout le monde, mais pas à elle.

Il y a du vrai là-dedans, parbleu; chacun sait que les meilleures prescriptions, en matière légale ou ailleurs, sont peu de chose si l'application n'y aide point. Seulement, le lecteur trouvera peut-être, comme moi, que la conséquence, — celle que je viens d'indiquer — ne s'ensuit pas nécessairement de ces prémisses. La morale de l'histoire est, ne vous semble-t-il point? que pour triompher d'un défaut aussi funeste et aussi profondément enraciné, il est bon que chacun y mette du sien, rédacteurs des programmes comme professeurs et examinateurs. En tout cas, imposer l'étude de ce qui peut encourager et développer le défaut en question, même en ordonnant qu'à partir d'aujourd'hui cette étude ne produira pas son effet inmanquable, celui qu'elle n'a jamais manqué de produire jusqu'ici, n'est peut-être pas l'idée la plus heureuse qu'on pût avoir.

Comment a raisonné la Commission? Je ne sais; mais le « théorème de Rouché » reste là jusqu'à nouvel ordre, et les taupins continueront, demain comme hier, à se mirer dans sa mécanique bien astiquée.

Une fois entendu que, pour enrayer une fâcheuse tendance d'esprit, le fait d'insister sur les sujets où elle peut et doit le mieux se donner carrière n'a pas d'importance, il n'y a qu'à poursuivre les applications d'un tel principe. Soyons justes : il n'en est point dans le programme actuel d'aussi belle que celle dont nous venons de parler; mais on peut encore en trouver quelques-unes. Le programme des années précédentes avait écarté déjà les théorèmes d'Apollonius relatifs à l'ellipsoïde, et, en effet, dans l'état actuel de la Science, on ne voit pas trop à quoi ils servent. Mais à quoi servent et quel intérêt offrent, aujourd'hui, les théorèmes corres-

pondants relatifs à l'ellipse? En quoi, surtout dans un programme de géométrie analytique (1), aident-ils à la compréhension de la nature de la courbe, surtout après la suppression, décidée par le programme actuel, et à laquelle, en soi, je ne vois pas d'inconvénient, de la recherche des axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués (ce cas n'est malheureusement pas le seul où le programme actuel conserve un principe en éliminant tout ce qui en fait l'intérêt et la portée). Nous n'avions donc pas vu de nécessité de conserver les théorèmes d'Apollonius. Par contre, il nous avait semblé important, au point de vue du développement de l'intuition géométrique, de donner leur forme dualistique aux principes de la Géométrie projective. La Commission a préféré les théorèmes d'Apollonius, — y compris le cas de l'hyperbole (pensez donc : si on l'avait oublié!) — : chacun son goût.

Félicitons-nous toutefois d'un point où nous nous sommes trouvés d'accord avec les rédacteurs du programme. Les mathématiques spéciales économiseront, dorénavant, l'étude de l'hyperbole d'Apollonius et des normales menées d'un point à une conique.

Une simple question d'ordre me semble encore mettre en évidence, dans une question d'analyse, la discordance entre notre point de vue et celui qui a triomphé. C'est avec un véritable étonnement que, à la lecture du programme en vigueur dans les années précédentes, nous avons vu les notions d'infiniment petit et d'infiniment grand rejetées à la fin des notions fondamentales, après toute la théorie des séries. Bizarre interversion, au point de vue de l'élève, sinon même au point de vue du mathématicien, de

(1) Au point de vue de la Géométrie pure, l'un de ces théorèmes peut être intéressant comme exemple de conservation de l'aire en projection parallèle.

Au point de vue de la formation logique, de la saine « économie de la pensée », le fait de conserver les théorèmes d'Apollonius pour l'ellipse en même temps qu'on les supprime pour l'ellipsoïde a quelque chose de particulièrement absurde. Les artifices ou les calculs, quels qu'ils soient, qui conduisent aux théorèmes plans n'apportent rien d'intéressant au point de vue éducatif, tandis que, ces théorèmes une fois acquis, la méthode du « couteau de Jeannot », qui, en trois lignes d'ailleurs, permet de les transporter à l'espace, a des chances de se retrouver dans d'autres questions et constitue par conséquent, une acquisition logique incontestable.

l'ordre naturel. Nous avons rétabli celui-ci et placé la notion d'infiniment petit à la base de toutes les autres. La Commission garde l'ancien ordre; elle le corrige un peu, je me hâte de le dire, en ajoutant que la notion d'infiniment petit sera appliquée à la théorie des séries, ... après avoir énuméré auparavant tous les chapitres de celle-ci et même, entre temps, parlé de tout autre chose. Seulement, d'autre part, elle en aggrave le défaut par ce qui me paraît être un lapsus, — mais on n'a pas le droit de commettre des lapsus dans un texte qui doit servir de base à l'instruction mathématique de la jeunesse française. — Je cite ici textuellement :

« Séries. — Progression géométrique. Séries à termes positifs. Série $\sum \frac{1}{n^p}$. Caractères de convergence tirés de l'étude de $\sqrt[n]{U_n}$ et de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$. Séries absolument convergentes, etc.

Qu'est-ce à dire? La progression géométrique est-elle là au premier moment comme un simple exemple de série convergente ou est-il bien convenu qu'elle doit servir de première base à une étude générale; la série $\sum \frac{1}{n^p}$, qui figure, comme on le voit, avant les critères de d'Alembert et de Cauchy, doit-elle fournir ou non de nouveaux caractères de convergence? Et si oui, l'étude de ces caractères doit-elle précéder ou suivre celle de $\sqrt[n]{U_n}$ et de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$?

Vous me direz, ici encore, que cela regarde le professeur, qui, après tout, est maître de son ordre et que, par conséquent, ce détail de rédaction n'a pas d'importance. Je suis persuadé du contraire. A qui ferez-vous croire que certains professeurs ne seront pas impressionnés par l'ordre qui leur est indiqué, surtout s'il arrive qu'ils ne ressentent pas autant que d'autres l'importance d'une hiérarchie dans les modes de convergence? Et combien trouve-t-on en fait de candidats qui n'ont pas compris cette hiérarchie et qui ne manquent pas de comparer à la série $\sum \frac{1}{n^p}$ celle dont le terme général est $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$, ou celle qui développe un cosinus hyperbolique? Ici encore, le devoir n'était-il pas de saisir toute occasion pour lutter contre une pareille erreur, c'est-à-dire contre

la tendance à appliquer mécaniquement les règles au lieu de faire intervenir le sens des faits et l'intuition?

II.

Nous avons eu à nous inspirer d'une autre préoccupation plus modeste, mais particulièrement impérieuse.

La surcharge des programmes, par suite de l'augmentation des connaissances humaines, est une difficulté redoutable, et cette difficulté se fait sentir à tous les degrés de l'enseignement. Ceux-ci réagissent d'ailleurs forcément les uns sur les autres, chaque soulagement apporté à l'un d'eux pouvant se traduire par un nouveau fardeau imposé au degré précédent ou au degré suivant.

L'enseignement des Mathématiques spéciales dont nous nous occupons a pour tâche de préparer à l'enseignement supérieur scientifique et toute retouche qui lui est apportée a pour but en réalité d'améliorer cette préparation et de simplifier l'œuvre qui reste à accomplir dans les années qui lui succèdent. Pour y arriver sans abuser des forces de l'élève, il convient tout d'abord, cela va sans dire, de se borner à ce qui est strictement essentiel. Il est clair que certaines mêmes des suppressions dont nous avons parlé plus haut et que nous avons proposées dans notre projet ne l'auraient peut-être pas été sans cette préoccupation.

Mais si l'on envisage non plus seulement un seul de ces deux stades consécutifs — l'enseignement des Mathématiques spéciales et l'enseignement scientifique supérieur — mais leur succession, une autre voie s'impose pour améliorer le rendement total : celle d'une saine répartition entre eux des sujets enseignés afin d'éviter tout double emploi, toute répétition inutile. Rien n'est plus important à l'heure actuelle, où le temps manque pour l'indispensable, et il y a à cela une utilité d'autant plus évidente que les doubles emplois, en retardant l'enseignement, n'en augmentent pas l'intérêt, bien au contraire. Cette utilité est particulièrement certaine pour l'École Polytechnique où les heures sont parcimonieusement mesurées, et à laquelle les rédacteurs du programme avaient le devoir de penser, puisqu'elle y subordonne son concours d'entrée; mais elle existe pour tout l'enseignement supérieur.

Ce point de vue était parfaitement sauvegardé dans les pro-

grammes antérieurs à 1904, ceux que j'ai connus quand j'étais élève. On enseignait en Mathématiques spéciales la Géométrie analytique, l'étude des coniques, la construction des courbes : tout le nécessaire était dit sur ces sujets, sur lesquels ni les grandes Écoles, ni les Facultés n'avaient un mot à ajouter. De même pour la résolution des équations, sur laquelle les cours d'Analyse mathématique n'avaient à revenir que sur certains points parfaitement bien définis, relatifs aux nouveaux moyens d'action que l'Analyse fournit à l'Algèbre. Chaque enseignement avait sa tâche nettement fixée, bien distincte de celle du voisin.

Mais si des détails de cette nature finissent par être impeccablement réglés dans un état de choses fixé depuis de longues années, ils cessent momentanément de l'être lorsqu'il y a transformation et, — n'en déplaise aux esprits simplistes qui concluent de là au rejet de toute évolution, — en 1904, il a fallu évoluer. Depuis ce moment-là, les rôles sont assez mal partagés. L'enseignement supérieur est dans l'aimable situation où se trouveraient les professeurs de nos lycées si les actes I, III et V d'Athalie figuraient au programme de la classe de troisième, les actes II et IV à celui de la classe de seconde.

Il en est ainsi, tout d'abord, pour la plus importante des additions de 1904, la théorie des équations différentielles. Les équations différentielles usuelles du premier ordre ⁽¹⁾ sont assurément dans le programme de Mathématiques spéciales, et elles n'y sont point cependant : car le texte du programme est limitatif; il y a ordre de se borner aux types explicitement indiqués; or ceux-ci ne comprennent ni l'équation de Bernoulli, ni celle de Riccati, ni celle de Clairaut. Je ne vois pas trop cependant ce que les règles de calcul relatives à ces équations ont de plus transcendantale-ment difficile que celles qui concernent l'équation linéaire du premier ordre. Ce qu'il y a de certain, c'est qu'il faut bien que ces

(1) Dans l'étude de l'équation linéaire du second ordre, nous avons spécifié : « On admettra sans démonstration que si l'on a une famille de solutions dépendant effectivement de deux paramètres, elle ne peut laisser échapper aucune solution ». Réduction, cette fois, on le voit, et réduction encore inspirée par le même espoir d'obtenir une bonne division du travail entre les divers ordres d'enseignement. Une fois de plus, cet espoir a été déçu.

règles soient enseignées quelque part, et que, par conséquent, il fallait y revenir, ce qui ne pouvait décemment se faire sans rappeler les cas précédemment traités. Tous ceux qui ont eu à s'infliger, et à infliger à leur auditoire, un pareil rappel, savent quelles leçons fastidieuses représente cette redite sur un sujet facile (1).

Nous avons donc proposé de faire traiter en Mathématiques spéciales tous les types courants d'équations de premier ordre. Nous avons satisfaction sur un point, par l'adjonction des équations homogènes, mais il n'empêche que le sujet n'est pas épuisé [à ce propos, pour se borner aux types explicitement indiqués, sera-t-il permis de parler de $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$?] et devra par conséquent être traité à nouveau; et les esprits chagrins pourront même trouver la situation pire qu'avant, puisque le nombre des cas qui devront être repris tout en étant déjà connus sera augmenté d'une unité.

En Géométrie, la coupure, pour boîteuse qu'elle fût, était tout au moins nettement indiquée : courbure des courbes planes et des courbes gauches en Mathématiques spéciales, torsion dans l'enseignement supérieur. Elle était infiniment moins satisfaisante, il est vrai, pour les enveloppes, puisque (à un point près, je le reconnais, l'arête de rebroussement) la théorie des enveloppes de surfaces doit répéter à peu près textuellement ce qui a été dit à propos des enveloppes planes. Mais nous avons surtout tenu à reporter aux Mathématiques spéciales la théorie du contact. Nous l'avions fait pour une raison assez exactement inverse de celle que la Commission a invoquée pour rejeter notre proposition, à savoir que cette théorie appartient tout à fait à l'esprit des Mathématiques spéciales bien plutôt qu'à celui de l'Enseignement supérieur. Est-il vrai que l'évaluation de l'ordre de la distance entre une courbe

$$f(x, y) = 0,$$

et un point voisin doit rester étrangère à l'esprit d'un taupin? S'il en était vraiment ainsi, j'en tirerais une tout autre morale que

(1) Et si, dans un problème destiné à conduire à une équation linéaire du premier ordre, l'élève adopte une inconnue autre que celle à laquelle pensait l'examineur et relevant d'une équation de Bernoulli? Cette remarque — qui m'est fournie par un des professeurs de nos lycées — ne suffit-elle pas à juger une organisation aussi illogique des études et des examens?

celle qui nous est opposée : j'estime que cela jugerait sévèrement l'enseignement des Spéciales et que cet enseignement ferait bien mal comprendre les matières dont il traite.

Par contre, nous avons largement élagué sur le terrain de la Mécanique, que l'enseignement supérieur a besoin, de toutes façons, de reprendre intégralement et cela (en ce qui concerne, par exemple, la Dynamique du point) à la lumière de principes forcément masqués au taupin ou tout au moins assez mal assimilés par lui. Cette division du travail n'a pas été acceptée plus que les précédentes ; ici encore, tout le monde parlera de tout.

Une heureuse occasion de suppression, dans un programme où tant d'additions auraient été désirables, nous était offerte par la question des *racines commensurables* des équations algébriques. Nous avons saisi cette occasion ; la Commission n'a pas cru devoir en faire autant. Dira-t-on, cette fois, qu'il s'agit de se conformer à l'esprit général de l'enseignement des Mathématiques spéciales ? On se demande ce que ce Chapitre, reste d'un temps où l'on était à la recherche d'idées et de sujets à proposer à l'activité de l'étudiant, vient faire dans une formation intellectuelle consacrée à la tâche, déjà lourde par elle-même, du développement du sens du continu. Je doute que les ingénieurs réclament cette théorie pour l'appliquer au calcul des tensions de leurs poutres et des puissances de leurs moteurs, celles-ci n'ayant généralement pas la complaisance de se chiffrer par des nombres entiers ou commensurables de tonnes ou de kilowatts. Doit-on en attendre une éducation du raisonnement ? La rédaction du programme (conforme d'ailleurs à celle de 1904) nous l'interdit, puisqu'elle spécifie qu'on s'en tiendra à la considération des termes extrêmes de l'équation, c'est-à-dire que l'idée maîtresse et féconde, celle qui montrait dans l'arithmétique autre chose qu'une suite de menus artifices, est expressément écartée. Le programme de 1904 (puisque c'est à lui que remonte cette rédaction) croyait sans doute corriger ainsi l'erreur qu'il commettait en gardant trace de cette question : nous avons estimé que, au contraire, il l'aggravait et que, ne pouvant faire comprendre la raison véritable et intime du fait, il était bien simple et parfaitement indiqué de n'en rien dire du tout.

III.

Je ne sais si les rédacteurs du programme ont longuement étudié cette partie de nos propositions. Il semble en tout cas qu'à d'autres occasions, le rejet qu'elle leur a opposé ait été un peu bien sommaire.

Voici un cas où nous aurions attendu quelques explications parce que, pour ma part au moins, je me demande encore quelles objections pouvaient survenir et quelles raisons ont pu dicter la décision. C'est en quelque sorte par hasard que j'ai été conduit (car j'avoue, cette fois, mon amour-propre d'auteur) à proposer à mes collègues l'addition suivante :

« Les formes indéterminées, dans le cas de fonctions de plusieurs variables n'ont pas, en général, de vraie valeur. »

Six mois plus tôt, je n'aurais pas parlé de cela, car je n'y avais jamais pensé ; et évidemment, on n'en avait jamais parlé parce qu'on n'y avait jamais pensé.

C'est l'histoire du banc qui était resté interdit jusqu'en 1848, parce que fraîchement peint en 1830.

La Commission n'a pas pu juger que la question ne valait pas d'être résolue et qu'il n'est pas utile qu'on puisse y répondre lorsqu'elle se présente. Elle n'a pas pu davantage objecter sa difficulté ou le temps qu'elle prend, puisqu'il suffit de remarquer que la vraie valeur ne saurait exister si, pour la courbe $f + kg = 0$, le point considéré est (k étant quelconque) autre chose qu'un point isolé. Elle perpétue cependant — de propos délibéré ou par simple oubli, je ne sais, — une ignorance si aisée à détruire d'un mot.

Ce point n'est pas le seul qui ait été traité par prétériton. La rédaction officielle ne dit rien de la formule, si controversée au point de vue pédagogique,

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Elle a une histoire assez tourmentée, cette formule. De mon temps, en 1884, on ne l'enseignait pas (hors le cas des polynomes).

Quand j'étais examinateur, en 1910-11, on la demandait. Ces temps derniers, elle était de nouveau admise sans démonstration. C'est assez dire qu'il y a, à son introduction dans le programme, du pour et du contre. Nous avons eu pourtant, pour la rétablir, un motif positif : certains examinateurs avaient remarqué que, en l'absence de démonstration, nombre de candidats ne comprenaient pas correctement le sens, — particulièrement le degré de généralité, — du théorème : danger dont il faut évidemment toujours se méfier en pareil cas ⁽¹⁾.

En parlera-t-on, maintenant? Le programme ne dit ni oui, ni non; et cependant, il paraît difficile de ranger cette question au nombre de celles pour lesquelles il note qu'une pratique de vingt années a rendu toute erreur d'interprétation impossible, puisque, précisément, c'est une de celles au sujet desquelles les idées ont plusieurs fois varié.

Dans un texte qui régit tout le recrutement de l'enseignement supérieur et des grandes Écoles scientifiques, il n'est point de détail qui ne demande à être mûrement examiné et clairement formulé; et le point qui précède est, l'on en conviendra, un peu plus qu'un détail.

Voici maintenant qui est un détail, je le reconnais, mais qui, en cette qualité même, méritait peut-être d'être accepté. Quel mal faisait, s'il vous plaît, la note suivante ajoutée à propos de la construction des courbes : « On fera remarquer la différence entre la question de construction qualitative ainsi principalement étudiée et une question de construction précise, comme celle qui est posée dans les épures de géométrie descriptive, en faisant ressortir que la première ne distingue pas essentiellement entre une ellipse et l'une des formes de l'ovale de Cassini, ou entre un folium

(1) Au reste, la seule objection qui puisse s'opposer à l'introduction de cette démonstration dans les programmes est-elle bien justifiée? Je reconnais qu'il faut se rappeler son point de départ, et ne point se tromper sur le moment où l'on doit appliquer la formule des accroissements finis. Mais la principale difficulté consiste, on le sait, à ne pas oublier que la quantité classique θ qui figure dans cette formule est variable, et d'une manière inconnue, avec toutes les données de la question. Est-ce inconvénient cela, ou avantage? Faut-il éviter de traiter une question parce qu'elle force l'élève à ne pas interpréter à faux les résultats qui lui ont été démontrés; ou ne serait-ce pas là une raison pour la maintenir à toute force dans l'enseignement?

de Descartes et une strophoïde droite ? » J'aurais bien voulu le demander aux Membres de la Commission. Je sais, moi, et certains d'entre eux savaient comme moi quelle utilité elle pouvait avoir ; car c'est l'expérience qui a parfois révélé, non pas même chez les élèves, mais chez les futurs maîtres, — chez les agrégés des Sciences mathématiques, — une extraordinaire inintelligence de la nature de la question. Avouez, lecteur, que pour un détail, celui-là est vraiment significatif. Ne vous a-t-on pas appris, comme à moi, qu'il y avait quelque importance à savoir toujours en quoi consiste exactement le problème que l'on se pose ? Pour ma part, les années qui ont passé sur ma tête n'ont pas renversé mes idées sur ce point : elles m'ont plutôt convaincu, chaque jour plus fermement, que si nous ne donnions que cette leçon-là à nos élèves, dans nos Lycées et même dans nos grandes Écoles, ce serait déjà beaucoup, et que, par contre, en son absence, tout le savoir que nous pourrions leur inculquer par ailleurs ne vaudrait peut-être pas la peine nécessaire à son acquisition. Cela se dit beaucoup, encore aujourd'hui. Est-ce que la Commission aurait entendu dire que « nous avons changé tout cela » ?

Je ne veux pas l'en soupçonner. Comme je ne vois dans notre texte ni idée transcendante, ni allongement sérieux du cours, ni surmenage de quelque ordre que ce soit imposé aux candidats, je préfère me demander si l'absence de ce passage dans le programme définitif ne provient pas de ce qu'on a oublié de le lire.

Dans la Théorie des séries entières, notre projet introduisait franchement la notion de séries uniformément convergentes, qui fournit à cet égard les démonstrations les plus simples et les plus intuitives de toutes (1).

(1) Quant à la *formule* de Taylor, nous avons proposé, conformément à une heureuse suggestion de M. Paul Lévy, de la rattacher à la recherche d'une fonction dont la dérivée *n*^{ième} est donnée, pendant que les valeurs numériques des dérivées précédentes et de la fonction elle-même sont données pour $x = x_0$. Cette idée n'a pas été, elle non plus, prise en considération. Le lecteur estimera peut-être avec nous qu'il y avait quelque avantage à faire dépendre la formule en question des grands principes qui dirigent depuis Cauchy la marche de l'analyse et qui fournissent une démonstration parfaitement claire et naturelle (elles ne le sont pas toutes) du théorème.

En réalité, pour des raisons que je me propose de faire ressortir à une autre

Je venais de prendre connaissance du programme élaboré par la Commission lorsque j'eus l'occasion d'en parler avec un de mes camarades et amis, qui est un de nos professeurs de Mathématiques spéciales les plus réputés.

« Eh bien oui, me dit-il, j'enseigne les séries entières à l'aide de l'uniforme convergence; je ne vois pas de raison pour ne pas faire connaître à nos élèves, dans l'étude de cette question, la méthode même par laquelle elle sera traitée lorsqu'on y reviendra dans la suite. »

Ce professeur était, on le voit, animé du plus déplorable esprit; et il aggrave terriblement son cas en réussissant brillamment dans son enseignement et faisant recevoir chaque année à l'École Polytechnique un respectable contingent d'élèves. Grâce à lui, par conséquent, on a, chaque année, le fâcheux exemple de jeunes gens, d'assez nombreux jeunes gens, qui sont dispensés d'apprendre deux démonstrations pour le même théorème et, après avoir vu une question par un bout, ne sont pas obligés de la reprendre par l'autre.

Tout en étant tentés de croire avec lui que la notion d'uniforme convergence n'est pas d'une transcendance inaccessible à la classe de Mathématiques spéciales, nous admettions, quant à nous, qu'il peut y avoir là matière à discussion. Ce que nous voulions délibérément, c'est éviter les calculs pénibles (parce que sans idée directrice simple et claire) auxquels donnent le plus souvent lieu des démonstrations de continuité et de dérivabilité ⁽¹⁾ dans les cours

occasion, l'hésitation n'est pas permise : une méthode fondée sur l'intégration est seule conforme à la nature des choses et doit être préférée à toute autre.

A ce propos, ne pourrait-on se décider un jour à supprimer la dénomination de « série de Maclaurin »? Maclaurin lui-même n'a jamais prétendu avoir écrit une formule nouvelle; et l'on irait loin, n'est-il pas vrai, si l'on se mettait à donner à chacune des formules mathématiques classiques deux noms différents, suivant que l'un des paramètres qui y figurent a la valeur zéro ou une autre.

(1) En réalité [Voir *Sur la théorie des séries entières (Nouvelles Annales de Mathématiques*, mars 1926, p. 161)], ces démonstrations peuvent être rendues aussi simples, aussi intuitives qu'on peut le désirer par la notion de série majorante, que l'on ne saurait raisonnablement taxer d'abstraction excessive. Toute la question, au point de vue pédagogique, est de savoir si l'on prononcera les mots de « série majorante ». Pour ma part, la réponse ne me paraît pas douteuse, attendu qu'il conviendrait d'introduire cette locution dès le début du chapitre consacré aux séries, qu'elle domine et éclaire d'un bout à l'autre.

d'où est écartée la notion de série uniformément convergente (ainsi que, bien entendu, celle de série multiple). Dès lors, à défaut de la réforme qui avait nos préférences, nous proposons d'établir ici encore une division nette du travail entre le secondaire et le supérieur et d'admettre purement et simplement, sans démonstration, les théorèmes de continuité et de dérivabilité des séries entières.

La Commission a adopté cette seconde solution. Nous avons donc, sur ce point, satisfaction partielle, et, du coup, on a gagné un allègement du programme, ce qui n'est jamais à dédaigner.

Le programme comporte, et le rapport note quelques additions, forcément minimales (surtout étant donné que les soustractions demandées par nous n'ont pas été effectuées). Elles sont en général les bienvenues. Outre l'intégration de l'équation homogène du premier ordre, dont il a été question plus haut, il y a la série de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables (1), qui permettra une légère économie — et l'on dit qu'il n'en est pas de petites — sur les cours d'Analyse; la transformation des équations par substitution portant sur une seule racine (pourquoi même une seule? Les notions relatives à la transformation sont si étroitement attachées à l'idée même d'équation algébrique qu'on ne saurait posséder et comprendre bien celle-ci sans l'intelligence claire de celles-là; et la question de transformation portant sur deux racines est profondément éducative par la solution étrangère qu'elle introduit et qu'il faut éliminer); la résolution d'une équation par approximations successives.

Pourquoi faut-il que, même en cet endroit, la mauvaise fée soit revenue et qu'on y voie encore sous un jour cru combien nous avons peu la même façon de comprendre les choses? Avant même les additions que je viens de nommer, le rapport tient à en citer

(1) Mais, sachant trouver la tangente en un point simple quelconque d'une courbe, il est entendu que les tangentes en un point multiple ne sont recherchées que si ce point est l'origine des coordonnées. Alors, si un point multiple est autre que l'origine, sera-t-il interdit d'y transporter celle-ci et d'écrire le résultat de ce calcul à l'aide de la série de Taylor (comme on le faisait de mon temps, sans même, je crois, que cette série fût au programme pour plusieurs variables)? J'espère que non; mais le nouveau programme, — comme celui qu'il remplace, d'ailleurs, — est peu clair sur ce point.

une autre, et celle-là je vous la donne en mille. Ne cherchez pas : on est désormais assuré que les élèves de toutes les classes de Spéciales de France sauront prendre la *dérivée n^{ième} d'un produit*.

Y avait-il là un vieux taupin de quatrième année, ou serait-il arrivé que l'un d'entre eux, scandalisé de voir oublier une formule aussi sublime et sacramentelle à ses yeux, aura réussi à la glisser subrepticement dans le texte final? C'est évidemment peu probable, et cependant, avouez que l'idée s'impose à la lecture de ce passage. Ce ne seront certes pas les ingénieurs qui auront insisté dans ce sens : le calcul des dérivées trentièmes présente pour eux le même genre d'intérêt palpitant que la recherche des racines commensurables. Alors, est-ce là formation de l'esprit? Et compte-t-on là-dessus pour éclairer quelque notion scientifique importante?

Il faut bien que j'insiste là-dessus, puisque, à toutes les occasions se manifeste ainsi, dans le texte qui a triomphé, l'encouragement à la tendance même contre laquelle, de l'avis unanime, il est le plus indispensable de lutter et dont les effets désastreux se font le plus sentir dans toutes les manifestations de l'activité nationale où intervient une préparation mathématique approfondie : l'abus des règles mécaniques aux dépens du bon sens et de la réflexion. Il n'en faut pas douter : les rédacteurs du programme l'ont voulu ainsi, et cette étrange conception de la formation intellectuelle est bien arrêtée chez eux.

Ici se termine cette revue, que je m'excuse d'avoir faite si longue. Voici accomplie une de ces petites révolutions en miniature que sont les réformes de programmes, et dont on voudrait faire autant que possible l'économie en faisant donner à chacune d'elles tout son rendement utile. Celle-là était ardemment appelée en une heure si grave pour le pays, et en une matière qui touche à la vie nationale par tant de côtés. Si j'ai laissé transparaître l'opinion que le rendement me paraît médiocre (1), et la besogne,

(1) Encore n'a-t-il été question que du programme de mathématiques, le seul dont je sois qualifié pour parler. Il y en aurait long à dire sur le programme de Physique que la routine d'une partie du corps enseignant, à laquelle la Commission n'a pu résister, a marqué d'une regrettable empreinte.

au total, peu heureuse, espérons que je me trompe, et que cela signifie tout simplement qu'on a fait autre chose que ce que nous désirions.

En tout cas, puisque le programme n'en a gardé aucune trace, peut-être convenait-il de faire connaître les idées qui nous avaient inspirés et de les soumettre au jugement du public scientifique.

P.-S. — Hélas! Il était dit que ce nouveau programme n'avait pas fini de me réserver des surprises. L'ancien indiquait, comme quadratures élémentaires, « les différentielles rationnelles et celles qui s'y ramènent ». Dans notre projet, après avoir précisé qu'il s'agissait de différentielles en e^x , $\sin x$, $\cos x$, nous ajoutons :

« Intégration des fonctions trigonométriques entières par transformation des produits en sommes. Application des fonctions trigonométriques ou hyperboliques à l'intégration de certaines fonctions rationnelles de x , ou de x et d'un radical du second degré ramené à l'une des formes $\sqrt{1+x^2}$, $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2-1}$ ».

Notre motif? Tout simplement qu'il s'agit de méthodes de calcul destinées à être mise en pratique, que celles-là sont les meilleures dans les cas indiqués et que les « taupins » ont d'habitude, sur les plus classiques d'entre elles, une ignorance des plus regrettables. Il me semble que cela est suffisant pour légitimer cette addition et même le fait d'entrer un peu dans le détail.

Or les rédacteurs du programme nomment, ainsi que nous le faisons, les différentielles exponentielles et trigonométriques, mais ils les nomment comme étant celles qui doivent se ramener aux différentielles rationnelles; et c'est tout. Non seulement ils ne disent pas un mot des méthodes sur lesquelles nous insistions; mais, comme on le voit, ils suggèrent assez nettement l'idée contraire.

Ne leur en déplaise, nous savions ce que nous faisons (et le pluriel est tout particulièrement de mise sur ce point). C'est l'expérience, encore une fois, qui montre combien les candidats connaissent mal l'intégration directe des fonctions trigonométriques : encore la paresse d'esprit, l'automatisme qui préfère les calculs interminables, avec les chances d'erreurs graves qu'ils introduisent, à un appel au bon sens. Nous savions, et je soutiens sans crainte

d'être sérieusement contredit, que, si l'on veut essayer d'empêcher les taupins d'introduire la variable $\tan \frac{x}{2}$ lorsqu'il s'agit de calculer $\int \sin^2 x \, dx$, ce n'est pas trop de le dire nettement et avec insistance; et même qu'on peut leur apprendre, par la même occasion, à faire un changement de variables trigonométrique pour intégrer la fameuse différentielle $\frac{dx}{(1+x^2)^n}$ sans s'engager dans le dédale des intégrations par parties.

**PROBLÈME DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL
(AGRÉGATION 1925).**

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

Erratum. — Je rectifie une erreur d'étourderie dans la question V, traitée correctement, si tous les a_n sont positifs. Quand les a_n ne sont pas tous positifs, on introduit une fonction majorante de $f(x)$, soit

$$\bar{f}(x) = \bar{a}_2 x^2 + \bar{a}_3 x^3 + \dots + \bar{a}_n x^n + \dots,$$

où chaque \bar{a}_n est positif et surpasse $|a_n|$; nous calculons les fonctions auxiliaires

$$\bar{y} = -kx + \sum_2^{\infty} \bar{\alpha}_n x^n, \quad \bar{z} = -kx + \sum_2^{\infty} \bar{\beta}_n x^n.$$

Ce calcul, par la méthode du texte, donne évidemment des nombres $\bar{\beta}_n, \bar{\alpha}_n$ tous positifs tels que

$$\bar{\beta}_n \geq |\beta_n|, \quad \bar{\alpha}_n \geq |\alpha_n|, \quad \bar{\beta}_n \geq \bar{\alpha}_n \geq |\alpha_n|.$$

La convergence de la série \bar{z} entraîne donc la convergence des trois autres séries \bar{y}, z, y ($|\beta_n|$ n'a aucune raison d'être supérieur à $|\alpha_n|$, comme je l'ai annoncé).

Remarque. — Que ceci me permette de donner une remarque ingénieuse, due à M. Valiron, de Strasbourg, concernant la première partie, et l'hypothèse $x'_0 > 0$: il s'agit de montrer que le mobile ne progresse vers les x positifs que pendant un temps fini, pour rétrograder.

Nous supposons $f(x)$ continue et positive pour toutes les valeurs positives de x , *tendant peut-être vers zéro si x croît au delà de toutes limites* (auquel cas la limite inférieure m de ma démonstration devient nulle et ne peut plus être utilisée). Pendant le laps de temps où x' est positive ou nulle, *démontrons d'abord que x reste fini*. J'écris en effet de nouveau (8) et (9), page 203,

$$(8) \quad x'' = -kx' - f(x),$$

$$(9) \quad x' = x'_0 - k(x - x_0) - \int_{t_0}^t f(x) dt.$$

De là résulte évidemment

$$(9') \quad 0 \leq x' < x'_0 - k(x - x_0),$$

d'où

$$x_0 < x < x_0 + \frac{x'_0}{k}.$$

J'achève, comme dans le texte, en utilisant $m(x_0, x'_0)$ limite inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \frac{x'_0}{k})$ et non plus m limite inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle $(x_0, +\infty)$.

QUESTION PROPOSÉE.

2493.

Étant donnés un triangle ABC et trois points α, β, γ pris respectivement sur BC, CA, AB, les axes radicaux du cercle circonscrit à ABC et des cercles $A\beta\gamma, B\gamma\alpha, C\alpha\beta$ rencontrent BC, CA, AB en $A'B'C'$. Démontrer que : A', B' et C' sont en ligne droite si les céviennes $A\alpha, B\beta, C\gamma$ sont concourantes et réciproquement.

G. Roy.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2459.

(1922-1923, p. 403.)

On donne dans un plan une courbe C et un point O . Une courbe G de grandeur invariable tourne autour du point O et rencontre C en un point variable M . Trouver le point caractéristique de la tangente à G en M .

R. B.

SOLUTION.

Par l'AUTEUR.

Soient MT , MN la tangente et la normale à G en M . Désignons par P_0 le plan fixe, par P_1 le plan mobile lié à G , par P_2 le plan mobile lié à l'angle TMN . Les centres instantanés des rotations mutuelles de ces trois plans, I_{01} , I_{02} , I_{12} sont en ligne droite.

Or I_{01} est en O , I_{12} est en γ , centre de courbure de G en M . Donc I_{02} est sur $O\gamma$. D'autre part il est aussi sur la normale à C en M . Ce point I_{02} est donc déterminé : en le projetant sur la tangente, on aura le point caractéristique cherché.

2469.

(1923-1924, p. 315.)

Q étant une quadrique donnée, soit $AB_1CA_1BC_1$ un hexagone formé avec six génératrices de Q , appartenant alternativement à l'un et à l'autre système. Soient α le point de rencontre de BC_1 et de B_1C , α' le conjugué harmonique de α par rapport au segment BC_1 . Soient β , β' , γ , γ' les points analogues (β' est sur CA_1 , γ' sur AB_1).

Démontrer qu'il existe une cubique gauche, tracée sur Q et passant par α , β , γ , α' , β' , γ' .

R. B.

SOLUTION.

Par M. ÉMILE BALLY.

Les deux systèmes de génératrices d'une quadrique qui contient une cubique donnée étant distinguées en génératrices-cordes et en génératrices-transversales, les paires de génératrices transversales attachées aux paires de points d'incidence sur la cubique des diverses génératrices-cordes forment une involution. Réciproquement, la condition nécessaire et suffisante pour que la quadrique définie par les trois droites de support de trois paires de points contienne la cubique qui passe en ces points est que

les trois paires de génératrices de l'autre système de la quadrique unies à ces points forment une involution (1).

Or, les six points (α, α') , (β, β') , (γ, γ') de l'énoncé forment en définitive la figure suivante :

Si l'on considère la quadrique Q qui porte les trois droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, les deux couples de génératrices de l'autre système qui passent respectivement aux deux couples (α, α') et (β, γ) sont conjugués harmoniques, et il en est de même des couples relatifs à (β, β') et (α, γ) ainsi que des couples (γ, γ') et (α, β) .

Les trois couples de génératrices qui passent en (α, α') , (β, β') , (γ, γ') se correspondent donc dans l'involution attachée à l'homographie cyclique de troisième ordre définie par le triplet de génératrices relatives à α, β, γ .

2484.

(1925-1926, p. 23.)

Si l est la longueur d'une lemniscate, I le moment d'inertie de la courbe (supposée homogène et de densité linéaire égale à l'unité) par rapport à son point double, S l'aire limitée par la courbe, on a la relation

$$lI = 4\pi S^2. \quad \text{A. LABROUSSE.}$$

SOLUTION

Par A. CABANTOUS.

La lemniscate d'équation

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$$

a pour élément d'arc

$$ds = \frac{a d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

de sorte que

$$I = 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\omega} d\omega = 4a^3 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

$$l = 4a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} = 4a \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

(1) Si (M, M') , (N, N') , (P, P') sont les trois paires de points, les quatre plans MNP , $MN'P'$, $M'NP'$, $M'N'P$ sont concourants, ainsi que les quatre plans $M'N'P'$, $M'NP$, $MN'P$, MNP' , et les deux points de concours, conjugués par rapport à la cubique qui porte les six points, sont unis à la corde qui joint les points de contact des deux génératrices-cordes, tangentes à la cubique, de la quadrique qui contient les trois droites MM' , NN' , PP' et la cubique. (Voir *Géométrie synthétique des unicursales de troisième classe*, par E. BALLY, Paris, Gauthier-Villars, Note finale, p. 97.)

en prenant t égal à $\sqrt{\cos 2\omega}$. Il en résulte enfin

$$II = 16\alpha^4 I_0 I_2 \quad \left(\text{en posant } I_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t^4}} \right).$$

Or on sait (Question 2483, *N. A.*, décembre 1925, p. 91) que

$$I_0 I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Il vient donc bien

$$II = 4\pi\alpha^4;$$

c'est bien la formule demandée, l'aire de la lemniscate étant, comme il est élémentaire, égale à α^2 .

Autre solution par H. MENESSIER.

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.33.

(*Calcul différentiel et intégral, épreuve pratique; énoncé publié en janvier 1926, p. 118.*)

SOLUTION

PAR JACQUES DEVISME.

1° On demandait d'intégrer le système

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{-3x + 4y - z}{2}, \\ \frac{dy}{dt} = -x + z, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{3x - 12y + 9z}{2}, \end{cases}$$

système linéaire à coefficients constants. En cherchant des solutions de forme

$$x = \alpha e^{rt}, \quad y = \beta e^{rt}, \quad z = \gamma e^{rt},$$

on trouve facilement

$$r = 0, \quad \alpha = \beta = \gamma,$$

$$r = 1, \quad \alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{3},$$

$$r = 2, \quad \alpha = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{9},$$

d'où la solution générale

$$(1) \quad \begin{cases} x' = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t}, \\ y = C_1 + 2 C_2 e^t + 4 C_3 e^{2t}, \\ z = C_1 + 3 C_2 e^t + 9 C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

En introduisant les valeurs initiales x_0, y_0, z_0 pour $t = 0$, il vient

$$C_1 = 3x_0 - 3y_0 + z_0, \quad C_2 = \frac{-5x_0 + 8y_0 - 3z_0}{2}, \quad C_3 = \frac{x_0 - 2y_0 + z_0}{2}.$$

2° L'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{-3x + 4y - z}{2} p + (-x + z) q = \frac{3x - 12y + 9z}{2}$$

a pour système linéaire adjoint le système (S). Comme les équations (1) s'écrivent

$$\begin{aligned} C_1 &= 3x - 3y + z, \\ C_2 e^t &= \frac{-5x + 8y - 3z}{2}, \\ C_3 e^{2t} &= \frac{x - 2y + z}{2}, \end{aligned}$$

l'intégrale générale de (E) sera

$$(5x - 8y + 3z)^2 = (x - 2y + z) F(3x - 3y + z).$$

La surface intégrale qui passe par l'axe des x correspond à

$$25x^2 = x F(3x)$$

et a pour équation

$$3(5x - 8y + 3z)^2 = 25(x - 2y + z)(3x - y + z).$$

C'est un cône du second degré.

3° Enfin l'équation

$$\frac{-3x + 4y - z}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + (-x + z) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{3x - 12y + 9z}{2} \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

a pour solution

$$f(x, y, z) = \Phi \left[3x - 3y + z, \frac{x - 2y + z}{(5x - 8y + 3z)^2} \right],$$

où Φ est arbitraire.

Autre solution par A. MONJALLOM.

Question C.36.

(Mathématiques générales, épreuve théorique de mécanique; énoncé publié en janvier 1926, p. 171.)

SOLUTION.

Par A. MONJALLON.

1° Le point matériel M, de masse m est mobile dans le plan vertical (O) [axes xOy , Ox vertical et dirigé vers le bas] et soumis à son poids mg et à une force $mk\vec{MO}$. La fonction des forces est alors

$$U = m \left[gx - \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \right],$$

et les lignes de niveau sont des cercles de centre I $\left(x = \frac{g}{k}, y = 0\right)$: on sait d'ailleurs que les deux forces mg et $mk\vec{MO}$ se composent en une seule, proportionnelle à la distance et dirigée vers le point I.

2° Le point M étant mobile sur un cercle de rayon a et dont le point le plus haut est O, les positions d'équilibre correspondent aux maximum et minimum de MI, c'est-à-dire aux points O et A (A point le plus bas du cercle). L'équilibre est stable en A ou en O suivant que $g - ak$ est positif ou négatif; équilibre indifférent si $g - ak$ est nul.

3° Le théorème de la force vive permettra d'étudier le mouvement du point sur le cercle. Avec les données initiales de l'énoncé [mobile en A, $v_0 = 2\sqrt{a(g - ak)}$], cette équation donne immédiatement

$$2a \frac{d\theta}{dt} = v_0 \cos\theta \quad (\theta = \widehat{Ox, OM}),$$

c'est-à-dire

$$t = \frac{2a}{v_0} \text{L tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right).$$

4° La réaction du cercle dans le mouvement précédent est

$$R = m[6(g - ak) \cos^2\theta - g];$$

si $5g - 6ak$ est négatif, R est constamment négative, dirigée vers l'extérieur du cercle. Si $5g - 6ak$ est positif; elle s'annule pour une valeur α telle que

$$\cos^2\alpha = \frac{g}{6(g - ak)}.$$

Question C.41.

(*Mathématiques générales, épreuve théorique de mécanique; énoncé publié en janvier 1926, p. 124.*)

SOLUTION.

Par A. MONJALLON.

1° Un disque circulaire homogène est mobile autour de son axe (horizontal) et un point P de la circonférence du disque est attiré par un point

fixe A, situé au-dessous du centre O et sur la verticale de ce point, la force correspondante étant $k\vec{PA}$.

Dans ces conditions, θ étant l'angle de OP avec OA, le moment de la force par rapport au point O vaut $-kaR\sin\theta$ et l'équation différentielle du mouvement est

$$m \frac{R^2}{2} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -kaR\sin\theta,$$

le mouvement est donc synchrone de celui d'un pendule simple de longueur

$$\lambda = \frac{mRg}{2ka}.$$

2° Si, lorsque OP est horizontal, l'attraction subie par P égale le poids du disque, on aura

$$mg = k\sqrt{a^2 + R^2},$$

d'où

$$\lambda = \frac{R}{2} \sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}},$$

dont les variations avec a sont évidentes.

Question C.55.

(Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en mars 1926, p. 181.)

SOLUTION.

Par CH. PIEDVACHE.

1° La surface donnée (S)

$$x = v \cos u - a \sin u, \quad y = v \sin u + a \cos u, \quad z = av$$

est engendrée par une droite ($u = \text{const.}$) qui reste horizontale, tangente au cylindre $x^2 + y^2 = a^2$, le point de contact décrivant l'hélice $v = 0$.

Les trajectoires orthogonales des courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ ont respectivement pour équations

$$v = au + C,$$

$$v = a\sqrt{2} \operatorname{tang}(u\sqrt{2} + C').$$

2° Les asymptotiques sont les génératrices et les courbes

$$2v = au + C,$$

et, comme les équations (S) entraînent

$$x^2 + y^2 = a^2 + v^2,$$

ces dernières courbes sont bien sections de S par les hyperboloïdes

$$(H) \quad 4x^2 + 4y^2 = (z - C)^2 + 4a^2.$$

3° Les surfaces (Σ), trajectoires orthogonales des hyperboloïdes H sont engendrées par les courbes qui, dans les plans passant par Oz, coupent à angle droit les méridiennes des (H) : dans le plan $y = 0$ elles sont définies par

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{x^2 - a^2}{4x^2}.$$

dont l'intégration est immédiate.

4° L'équation aux rayons de courbure principaux de (S) s'écrit

$$a^2 R^2 - a^2 R \sqrt{a^2 + v^2} - (a^2 + v^2)^2 = 0;$$

elle entraîne, entre ces rayons, la relation indépendante des coordonnées

$$(R_1 + R_2)^4 + a^2 R_1 R_2 = 0.$$

Autre solution par A. MONJALLON.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une barre AB homogène pesante, de longueur $2l$, de masse M, mobile dans un plan vertical fixe Oxy, a son milieu C rattaché, par un fil, de masse négligeable, de longueur λ , au point fixe O; en outre elle passe constamment dans un très petit anneau Q situé sur la verticale Oy: $\overline{OQ} = \lambda$; cette liaison est supposée sans frottement.

Prendre comme paramètre l'angle $\theta = (\widehat{Oy, BA})$:

1° Calculer la force vive de AB;

2° Écrire l'équation du mouvement et donner une intégrale première;

3° Déterminer en grandeur, direction et sens les réactions \vec{T} et \vec{R} appliquées aux points C et Q; donner l'expression explicite de leur mesure T et R en fonction de θ ;

4° En supposant que pour $t = 0$, on a $\theta = 0$, $\theta' = \omega$, discuter l'allure du mouvement selon la valeur de ω . Dans cette discussion, on supposera la liaison entre le fil et la barre réalisée de telle manière que la portion BC de la barre puisse, aussi bien que la portion CA, passer dans l'anneau Q; si à un instant quelconque la distance \overline{CQ} devient supérieure à l'on considérera le problème comme terminé; on

tiendra compte dans la discussion de ce que la liaison entre C et O est réalisée par un fil : si à un instant quelconque le fil n'est plus tendu, on arrêtera la discussion ;

5° Écrire et intégrer l'équation des petits mouvements de la barre autour de sa position d'équilibre stable.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'équation de la force vive est

$$\left(4\lambda^2 + \frac{l^2}{3}\right) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g\lambda \cos 2\theta + h.$$

C'est celle d'un mouvement pendulaire.

La tension T du fil s'obtient au moyen du théorème du centre de gravité, par projection sur AB

$$4M\lambda\theta'^2 \cos\theta + 2M\lambda\theta'' \sin\theta = (T - Mg) \cos\theta.$$

La réaction R au point Q s'obtient par le théorème du moment cinétique dans le mouvement du centre de gravité

$$M \frac{l^2}{3} \theta'' = 2\lambda \cos\theta R$$

(R compté positivement dans le sens $\theta + \frac{\pi}{2}$).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un solide plein homogène, pesant, de masse M a la forme d'un « diabolo », c'est-à-dire qu'il est constitué par deux cônes de révolution identiques accolés par leur sommet S.*

Soient a le rayon de base et h la hauteur de l'un des cônes.

A l'instant $t = 0$, on pose ce diabolo sur un plan P dont la ligne de plus grande pente OX fait un angle α avec l'horizontale, l'axe de révolution CC' étant horizontal. Soit f le coefficient du frottement de glissement aux deux points de contact J et J'; on suppose le frottement de roulement négligeable.

A un instant t , on désigne par x l'abscisse commune de J et J', par θ l'angle dont a tourné le diabolo, par N et N' les réactions normales en J et J', par F et F' les réactions tangentielles (comptées positivement vers le haut).

Déterminer en fonction de t : x , θ , F, F', N, N' dans les divers types de mouvement possibles suivant les valeurs de α .

Application numérique :

$$\alpha = 5^{\text{cm}}, \quad h = 6^{\text{cm}}, \quad M = 700^{\text{g}}, \quad f = 0, 16, \quad g = 981 \text{ C. G. S.}$$

Calculer (avec trois chiffres) x , θ , F, F', N, N' à l'instant $t = 1^{\text{s}}$:

1° pour $\alpha = 5^\circ$; 2° pour $\alpha = 60^\circ$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° *Roulement sans glissement.*
L'équation du mouvement est

$$1,3 a \theta'' = g \sin \alpha.$$

Les réactions sont données par

$$\begin{aligned} 2 N &= 2 N' = M g \cos \alpha, \\ 2 F &= 2 F' = M g \sin \alpha - M a \theta''. \end{aligned}$$

Ce cas se produit si

$$\tan \alpha < \frac{1,3}{0,3} f.$$

2° *Glissement.* — On a les relations

$$\begin{aligned} 2 N &= 2 N' = M g \cos \alpha, \\ x'' &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha), \\ 0,3 a \theta'' &= f g \cos \alpha. \end{aligned}$$

(Lille, novembre 1925.)

C.63. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère un cube homogène, pesant, et l'on désigne par a la longueur de l'arête.*

1° *Étudier le mouvement du cube en chute libre, les conditions initiales étant arbitraires.*

2° *On fixe un sommet O du cube de façon que le cube puisse librement tourner autour de ce point. Étudier le nouveau mouvement sachant que, à l'instant initial, une arête issue de O est verticale ascendante, et le corps est animé d'une rotation autour de la diagonale OO' du cube, mesurée par ω .*

Déterminer la valeur de ω en fonction de a et de l'accélération g due à la pesanteur, de manière que la valeur maximum de l'angle aigu que fait la diagonale OO' avec la verticale ascendante soit 90°.

3° *A un instant où OO' est horizontal, on immobilise, brusquement, le sommet O' opposé au sommet O qui reste fixe. Étudier ce dernier mouvement.*

C.65. — ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un hémisphère plein, homogène de masse M, de rayon R et un point matériel de masse m, situé à l'intérieur sur l'axe de symétrie, à la distance a du centre ($a < R$).*

1° *Calculer l'attraction newtonienne de l'hémisphère sur le point, en désignant par f l'attraction mutuelle de deux points matériels, de masses égales à l'unité, et dont la distance est égale à l'unité.*

2° *Calculer à $\frac{1}{100}$ près, le rapport $\frac{a}{R}$ par la condition que cette attraction soit nulle.*

(Paris, juin 1923.)

C. 67. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — Sur un cylindre C horizontal roule un parallélépipède rectangle P, homogène et pesant. Le centre de gravité est, au repos, dans le plan vertical de l'axe du cylindre et les arêtes horizontales sont, les unes parallèles, les autres perpendiculaires aux génératrices du cylindre. Ce parallélépipède supporte par deux fils tendus et égaux, de longueur l, un second parallélépipède Q dont les arêtes sont parallèles à celles du premier. Le plan vertical de l'axe du cylindre est un plan de symétrie général du système.

Les moments d'inertie respectifs de P et Q autour d'axes parallèles à C menés par leur centre de gravité sont Mp^2 , $M'q^2$.

Étudier les petits mouvements de ce système dans le plan perpendiculaire à C qui contient les centres de gravité P et Q. On adoptera comme paramètres :

- 1° L'angle u de roulement de P sur son support;
- 2° L'angle θ de la direction des fils avec la verticale.

(Besançon, novembre 1925.)

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Construire la courbe

$$x = L \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi.$$

Interprétation géométrique du paramètre φ . Longueur du segment MT de la tangente compris entre M point de contact et T point d'intersection avec Ox. Arc de la courbe (prendre $s = 0$ pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{ds}{d\varphi} > 0$). Équation paramétrique des développantes de cette courbe au moyen de φ .

2° On se propose de déterminer une courbe telle que le segment compris entre le centre de courbure et le pied sur Ox de la normale soit constant et égal à 1. Expliquer sans calcul comment la première partie conduit à la solution de cette question et expliquer le rôle des deux constantes arbitraires.

3° Mettre en équation la question proposée au n° 2°. Prendre $y'^2 = z$ pour nouvelle inconnue et former l'équation différentielle liant y et z : l'intégrer.

4° Soit l'équation différentielle (λ constante)

$$y' = \frac{L(1 + y'^2)}{2\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

où L est le symbole des logarithmes népériens et $y' = \frac{dy}{dx}$. On pose $y' = -\cot \varphi$ et $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{\sin \varphi}$. Former l'équation différentielle qui lie x à φ ; l'intégrer.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° La courbe donnée est une *tractrice*; le segment MT vaut 1; φ désigne l'angle de cette tangente MT avec Ox . L'arc s vaut $L(\sin \varphi)$. Les équations paramétriques des développantes sont

$$(1) \quad \begin{cases} x = L \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi + (C - L \sin \varphi) \cos \varphi. \\ y = \sin \varphi + (C - L \sin \varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

2° Les courbes cherchées sont ces développantes à une translation près, le long de Ox .

3° Leur équation différentielle ne contient que y et y' ; une première intégration conduit à l'équation indiquée au n° 4°.

4° Le changement de variable indiqué permet de retrouver les équations (1) à une constante additive près pour x .

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° On considère le cercle (C) $x^2 + y^2 = 1$. On pose $x + iy = z$, $Z = \sqrt{z} = X + iY$. Indiquer le position du point Z correspondant à un point z pris sur C; on prend pour $(x = 1, y = 0)$, $X = 1, Y = 0$ et le point $m(x, y)$ parcourt le cercle C dans le sens direct une fois à partir de $x = 1, y = 0$; quel chemin a parcouru le point $M(X, Y)$?

2° Soit φ l'argument de M ; on projette M sur Om en μ ; trouver, en fonction de φ , les coordonnées de μ . Évaluer l'aire balayée par $O\mu$ quand m parcourt la demi-circonférence supérieure C; construire la courbe lieu de μ .

3° Calculer avec approximation par défaut et excès l'arc décrit par μ quand m parcourt la demi-circonférence supérieure. Partager l'intervalle d'intégration en six parties égales.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Le point M est le milieu de l'arc am , a désignant le point $z = 1$. Le point μ décrit la courbe

$$\rho = \cos \frac{\theta}{2}.$$

L'aire demandée vaut $\frac{\pi}{4}$.

(Lille, novembre 1925.)

SUR LA CONSTANTE C D'EULER ;

PAR PAUL APPELL.

On peut poser, d'après la définition même de C,

$$C = H(h) - \log h + S(h),$$

où h est un entier ≥ 2 ,

$$H(h) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{h-1},$$

$S(h)$ tendant vers zéro quand h croît indéfiniment. M. Ser a donné l'expression de $S(h)$ dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (2^e série, t. IV, novembre-décembre 1925, p. 126-128):

$$S(h) = \frac{p_2}{h} + \frac{p_3}{h} \frac{1}{h+1} + \frac{p_4}{h} \frac{1.2}{(h+1)(h+2)} + \dots,$$

$$S(h) = \frac{p_2}{h} + \frac{1}{h} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} p_{\nu+2} \frac{1.2\dots\nu}{(h+1)(h+2)\dots(h+\nu)},$$

où

$$p_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x(1-x)(2-x)\dots(\nu-1-x)}{1.2\dots\nu} dx.$$

On a aussi, en vertu de l'identité

$$\frac{1.2\dots\nu}{(h+1)\dots(h+\nu)} = \frac{1.2\dots h}{(\nu+1)\dots(\nu+h)},$$

$$S(h) = \frac{p_2}{h} + (h-1)! \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{p_{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+h)};$$

on peut également calculer les quantités

$$\lambda_h = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{p_{\nu+1}}{\nu+h},$$

dont M. Ser donne les deux premières λ_0 et λ_1 (*loc. cit.*, p. 127) en retrouvant la formule de Fontana-Bessel :

$$C = \lambda_0 = S(1) = \frac{p_2}{1} + \frac{p_3}{2} + \frac{p_4}{3} + \dots$$

Nous ferons ici quelques remarques sur $S(h)$. On a aussi

$$C = H(k) - \log k + S(k),$$

où k est un entier différent de h ($k \geq 2$). Alors en retranchant, on a, quel que soit C ,

$$H(k) - H(h) - \log \frac{k}{h} + S(k) - S(h) = 0.$$

Donc, comme $H(k) - H(h)$ est commensurable, $\log \frac{k}{h}$ incommensurable, le logarithme étant népérien,

$$(1) \quad S(k) - S(h) = \text{incomm.} \quad (k \neq h).$$

Dans ces conditions il est impossible que $S(h)$ soit commensurable pour deux valeurs différentes de l'entier h , $h = h_1$, $h = h_2$, car

$$S(h_1) - S(h_2),$$

qui devrait être incommensurable, d'après (1), serait commensurable. Il peut exister une seule valeur de h , $h = h_1$, rendant $S(h)$ commensurable. Si cette valeur existe, C est incommensurable d'après l'équation de définition où $h = h_1$. Mais il est probable que h_1 n'existe pas et que $S(h)$ est incommensurable pour toutes les valeurs de l'entier h .

On conclut de là que, quel que soit C , commensurable ou incommensurable, $C + \log h$ est incommensurable pour toutes les valeurs de h , sauf une $h = h_1$ au plus. Si h_1 existe, C est incommensurable; s'il n'existe pas, on ne peut rien dire sur la nature arithmétique de C .

SUR UN POINT DU PROGRAMME DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES;

PAR G. VALIRON.

Les remarques suivantes, faites après l'audition d'une leçon d'un candidat à l'agrégation, intéresseront peut-être quelques lecteurs. Il s'agit de la démonstration des théorèmes qui servent dans l'étude de la variation des fonctions, tels que le suivant : *Une fonction $f(x)$ dérivable sur le segment a, b , $a \leq x \leq b$, et dont la dérivée est positive, est croissante.* Dans la classe de mathématiques, cette

proposition doit être admise sans démonstration; mais dans certains Ouvrages à l'usage de cette classe, celui de M. Commissaire par exemple, elle est établie comme dans les cours d'analyse en s'appuyant sur la formule des accroissements finis, rendue intuitive par des considérations graphiques. Dans un cours où l'emploi des dérivées est restreint à l'étude de la variation des fonctions élémentaires et à la recherche des extrema, la méthode directe suivante est peut-être plus instructive (1). On s'appuie sur ce lemme, qui est une conséquence immédiate de la définition de la dérivée et de l'hypothèse faite sur son signe :

Si x_0 est un point du segment a, b , il existe un intervalle $I(x_0)$ ayant pour centre ce point, dont les points x (appartenant à a, b) donnent à $f(x) - f(x_0)$ le signe de $x - x_0$.

On peut alors admettre que le segment a, b peut être couvert par un nombre fini d'intervalles $I(x)$, alors $f(a) < f(b)$, ce qui est bien la proposition à démontrer. La proposition admise est le théorème de Borel-Lebesgue.

On peut se ramener à une proposition plus intuitive en utilisant le procédé des subdivisions. Supposons que l'on ait $f(b) \leq f(a)$. Si c est la moyenne arithmétique de a et b , l'une au moins des différences $f(c) - f(a)$, $f(b) - f(c)$ est encore négative ou nulle; on a donc un nouveau segment a_1, b_1 , qui coïncide avec a, c ou c, b , pour lequel on a les mêmes hypothèses que pour a, b . On le divise en deux, et ainsi de suite, ce qui donne une suite infinie de segments

$$a_n, b_n,$$

pour lesquels

$$f(b_n) \leq f(a_n),$$

$$a_{n-1} \leq a_n, \quad b_n \leq b_{n-1}, \quad b_n - a_n = 2^{-n}(b - a).$$

On peut admettre que les nombres a_n et b_n ont un même point limite ξ tel que

$$a_n \leq \xi \leq b_n \quad (2).$$

Le point ξ est le centre d'un intervalle $I(\xi)$ dans lequel les points

(1) La démonstration qui suit est à rapprocher des considérations développées par M. Denjoy dans son Mémoire *Sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*J. de Math.*, 1915, p. 105-240, en particulier p. 176).

(2) C'est ce que l'on admet déjà, dans la même classe, dans la définition de la longueur de la circonférence.

a_n et b_n sont compris à partir d'une valeur de n ; d'après le lemme on a, à partir de cette valeur,

$$f(a_n) < f(b_n).$$

Cette contradiction établit le théorème.

La proposition relative aux fonctions dont la dérivée est nulle sur un segment a, b est une conséquence de la précédente. Car, si l'on supposait $f(b) < f(a)$, la fonction

$$g(x) = f(x) + \frac{x-a}{b-a} [f(a) - f(b)]$$

aurait une dérivée positive sur a, b , alors que $g(a) = g(b)$, ce qui est impossible. En changeant $f(x)$ en $-f(x)$, on voit de même que l'on ne peut avoir $f(a) > f(b)$.

SUR LES CONGRUENCES DE CUBIQUES PLANES CUSPIDALES ;

PAR L. GODEAUX

(Liège).

Si l'on considère, dans un plan, une famille ∞^1 de cubiques cuspidales (c'est-à-dire possédant chacune un point de rebroussement), on sait que le lieu des points de rebroussement fait partie de l'enveloppe de la famille. De plus, en général, les cubiques ne touchent pas l'enveloppe en leur point de rebroussement. Des propriétés analogues existent pour les systèmes ∞^2 ou congruences de cubiques planes cuspidales de l'espace; c'est ce que nous allons montrer dans cette Note, en examinant la distribution des points focaux sur les courbes d'une telle congruence. Auparavant, nous ferons une remarque sur le problème dans le plan.

1. Une cubique plane possédant un point de rebroussement, ne possède qu'un seul point d'inflexion. Par conséquent, étant donnée une cubique plane cuspidale, la tangente de rebroussement, la tangente d'inflexion et la droite qui joint les points de rebroussement et d'inflexion sont rationnellement déterminées.

Si $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$ désignent respectivement les équations de ces droites en coordonnées cartésiennes, dans un plan, la cubique sera, comme on sait, représentée par

$$(1) \quad \alpha^2 \gamma + \beta^3 = 0.$$

Une famille ∞^1 de cubiques cuspidales dans un plan pourra par suite être représentée par l'équation (1), où l'on supposera les coefficients des coordonnées dans α , β , γ , fonctions (dérivables) d'un paramètre u .

Les points caractéristiques de la famille, situés sur une cubique (1), seront déterminés par la courbe

$$(2) \quad 2\alpha \alpha'_u \gamma + \alpha^2 \gamma'_u + 3\beta^2 \beta'_u = 0.$$

Ces points seront donc au nombre de neuf. Voyons combien de ces points seront absorbés au point de rebroussement P ($\alpha = \beta = 0$). Si, dans l'équation (2), nous faisons $\beta = 0$, nous trouvons que la droite représentée par cette équation rencontre la courbe (2), en un point P et en deux autres points en général distincts du premier. De même, la tangente de rebroussement $\alpha = 0$ rencontre la courbe (2) en trois points dont deux sont confondus en P . Il en résulte que la courbe (2) passe en général simplement par P en y touchant la tangente de rebroussement. Par suite, sur une cubique de la famille, trois points caractéristiques sont en général confondus au point de rebroussement.

Pour que les cubiques de la famille soient tangentes au lieu du point de rebroussement, il faut que ce lieu soit également l'enveloppe de la tangente de rebroussement $\alpha = 0$. Les équations du lieu du point de rebroussement s'obtiennent en éliminant u entre $\alpha = 0$ et $\beta = 0$; il faut donc que la droite $\alpha'_u = 0$ passe constamment par l'intersection des droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et cette condition est évidemment suffisante.

Mais lorsque cette circonstance se présente, la courbe (2) est rencontrée par toute droite passant par P en deux points confondus en P , c'est-à-dire qu'elle possède un point double en P . Il est d'ailleurs aisé de vérifier que les tangentes à la courbe (2) en P sont distinctes de la droite $\alpha = 0$. Il en résulte que les courbes (1) et (2) ont quatre points d'intersection confondus en P . Donc, lorsque la courbe (1) touche son enveloppe au point

de rebroussement, quatre points caractéristiques sont absorbés en ce point.

2. Soit Σ une congruence formée de cubiques planes cuspidales. Si nous désignons par $\delta = 0$ l'équation cartésienne du plan d'une courbe de Σ , par $\alpha = \delta = 0$ les équations de la tangente de rebroussement, par $\beta = \delta = 0$ les équations de la droite joignant les points de rebroussement et d'inflexion, par $\alpha = \gamma = 0$ la tangente d'inflexion, les équations de la courbe envisagée seront

$$(3) \quad \alpha^2 \gamma + \beta^3 + \delta f = 0, \quad \delta = 0,$$

f étant le premier membre de l'équation d'une quadrique. Toute courbe de Σ pouvant être représentée par des équations telles que (3), nous pourrions supposer que la congruence est elle-même représentée par les équations (3), où les coefficients des coordonnées dans α , β , γ , δ , f sont des fonctions (dérivables) de deux paramètres u , v (tout au moins pour u , v variant dans un certain domaine).

Cela étant, les points focaux de la congruence Σ seront déterminés (1) par les équations (3) et l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} (\alpha^2 \gamma + \beta^3 + \delta f) & \frac{\partial \delta}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} (\alpha^2 \gamma + \beta^3 + \delta f) & \frac{\partial \delta}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire, en effectuant les dérivations,

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 2\alpha\gamma\alpha'_u + \alpha^2\gamma'_u + 3\beta^2\beta'_u + \delta f'_u & \delta'_u \\ 2\alpha\gamma\alpha'_v + \alpha^2\gamma'_v + 3\beta^2\beta'_v + \delta f'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (4) représente une surface du quatrième ordre et il y a donc, sur chaque courbe de la congruence Σ douze points focaux. Voyons combien de ces points sont confondus au point de rebroussement P ($\alpha = \beta = \delta = 0$) de la cubique (3).

Les points d'intersection de la surface (4) avec la droite $\beta = \delta = 0$ sont donnés par

$$(5) \quad \alpha \begin{vmatrix} 2\gamma\alpha_u + \alpha\gamma'_u & \delta_u \\ 2\gamma\beta'_v + \alpha\gamma'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0.$$

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, 1889, p. 3 et suiv.

Il y en a donc un qui tombe au point P et, en général, il n'y en aura qu'un seul. Le point P est donc en général simple pour la surface (4).

Les points d'intersection de la surface (4) avec la droite

$$\alpha = \delta = 0$$

sont donnés par

$$(6) \quad 3\beta^2 \begin{vmatrix} \beta'_u & \delta'_u \\ \beta'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Il y a donc deux confondus en P. Observons que l'équation

$$\begin{vmatrix} \beta'_u & \delta'_u \\ \beta'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0$$

représente une quadrique qui détermine, sur la droite $\beta = \delta = 0$, les points focaux de la congruence engendrée par cette droite lorsque u, v varient. Par suite, la droite $\alpha = \delta = 0$ rencontre la surface (4) en deux points confondus en P et en deux seulement lorsque le lieu des points de rebroussement des cubiques de Σ n'est pas une nappe de la surface focale de la congruence engendrée par la droite $\beta = \delta = 0$.

Enfin, les points d'intersection de la surface (4) avec la droite

$$\alpha = \beta = 0$$

sont donnés par l'équation

$$(7) \quad \delta \begin{vmatrix} f'_u & \delta'_u \\ f'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Il y en a un seul en P.

Il résulte de tout ceci que parmi les points focaux de Σ situés sur une courbe de cette congruence, il y en a en général trois confondus en P.

Dans une congruence de cubiques planes cuspidales, le point de rebroussement compte pour trois points focaux.

Observons qu'en général, le point d'inflexion ($\beta = \gamma = \delta = 0$) n'est pas un point focal de la congruence Σ .

3. L'équation de la nappe de la surface focale lieu des points de rebroussement des courbes de Σ s'obtiendra en éliminant u, v entre les équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \delta = 0.$$

En général, la droite $\alpha = \delta = 0$ ne sera pas tangente à cette surface, c'est-à-dire que les courbes de Σ ne seront pas tangentes à la surface focale en leur point de rebroussement.

Pour qu'il en soit autrement, il faut et il suffit que l'on ait

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \alpha'_u & \delta'_u \\ \alpha'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire que la congruence formée par les droites $\alpha = 0, \delta = 0$ ait la surface considérée comme nappe de sa surface focale.

S'il en est ainsi, le point P est encore simple pour la surface (4), car l'équation (7) n'est pas modifiée; mais le plan $\delta = 0$ est tangent en P à la surface (4). La droite $\alpha = \delta = 0$ rencontre encore la surface (4) en deux points confondus en P; la droite

$$\beta = \delta = 0$$

rencontre la surface (4) également en deux points confondus en P, car le second facteur du premier membre de l'équation (5) s'annule pour $\alpha = \beta = \delta = 0$ en vertu de l'équation (8). Il en résulte donc que la section de la surface (4) par le plan $\delta = 0$ possède un point double en P, les tangentes étant d'ailleurs distinctes de la droite $\alpha = \delta = 0$.

Dans une congruence de cubiques planes cupidales, les courbes ne touchent pas, en général, la surface focale au point de rebroussement. Si ce contact a lieu, le point de rebroussement absorbe quatre points focaux et en général quatre seulement.

4. Les développements précédents supposent que le lieu des points de rebroussement des cubiques de Σ est une surface proprement dite. Supposons maintenant que ce lieu soit une courbe C. Dans ces conditions, les droites $\alpha = \delta = 0$ et $\beta = \delta = 0$ s'appuient sur la courbe C et cette courbe intervient donc comme une nappe de la surface focale de chacune des congruences rectilignes engendrées par ces droites lorsque u, v varient. En d'autres termes, le long de la courbe C on a

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \alpha'_u & \delta'_u \\ \alpha'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \beta'_u & \delta'_u \\ \beta'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Les résultats précédents doivent donc être modifiés.

L'équation (7) montre que la droite $\alpha = \beta = 0$ rencontre la surface (4) en un seul point confondu avec P, donc P est encore simple pour cette surface.

Nous allons voir que la section de la surface (4) par le plan $\delta = 0$ présente actuellement en P un point de rebroussement, la tangente de rebroussement étant la droite $\alpha = \delta = 0$.

L'équation (5) montre, comme plus haut, que la droite $\beta = \delta = 0$ rencontre la surface (4) en deux points confondus en P.

L'équation (6) représente actuellement une surface dégénérée en deux plans et une quadrique passant tous les trois par P. Il y a donc trois des intersections de la surface (4) et de la droite $\alpha = \delta = 0$ confondus en P.

Les points d'intersection de la surface (4) avec la droite $\delta = 0$, $\alpha = \lambda\beta$ sont donnés par l'équation

$$\beta \begin{vmatrix} 2\lambda\gamma \alpha'_u + \lambda^2\beta \gamma'_u + 3\beta \beta'_u & \delta'_u \\ 2\lambda\gamma \alpha'_v + \lambda^2\beta \gamma'_v + 3\beta \beta'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2\beta^2 \begin{vmatrix} \gamma'_u & \delta'_u \\ \gamma'_v & \delta'_v \end{vmatrix} + 2\lambda\beta\gamma \begin{vmatrix} \alpha'_u & \delta'_u \\ \alpha'_v & \delta'_v \end{vmatrix} + 3\beta^2 \begin{vmatrix} \beta'_u & \delta'_u \\ \beta'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Il y a donc toujours, en vertu des équations (9), deux de ces points confondus en P. Il ne pourra y en avoir trois que si l'on a $\lambda = 0$, donc la section de la surface (4) par le plan $\delta = 0$ possède un point de rebroussement en P, la tangente de rebroussement étant la droite $\alpha = 0$, $\delta = 0$.

Les intersections de la courbe (3) et de la surface (4) absorbées en P sont donc au nombre de six, par suite :

Si, dans une congruence de cubiques planes cuspidales, le lieu des points de rebroussement est une courbe, chaque point de rebroussement absorbe six points focaux.

En particulier, si la congruence Σ est linéaire, c'est-à-dire s'il passe, en général, une et seule courbe de Σ par un point de l'espace, les nappes de la surface focale se réduisent toutes à des courbes, donc :

Les courbes d'une congruence linéaire de cubiques planes cuspidales s'appuient en sept points sur une courbe (ou ensemble de courbes) fixe, l'un des points d'appui étant le point de rebroussement.

SUR UN THÉORÈME DE CALCUL VECTORIEL ET SES APPLICATIONS ;

PAR J. SUDRIA.

1. Soient une grandeur scalaire u , fonction d'un point P , et d'autre part une surface S ayant deux côtés et limitée par un contour C orienté; considérons le côté de cette surface tel que les sens de la demi-normale et du contour forment une association sinistrogire; \mathbf{n} désignant un vecteur unité dirigé suivant cette demi-normale, on a

$$(\alpha) \quad \int_S \text{grad } u \wedge \mathbf{n} \, dS = \int_C u \, dP.$$

Nous avons donné une démonstration directe de ce théorème⁽¹⁾ sans faire intervenir les axes de coordonnées; signalons, pour éviter des redites, une autre démonstration qui consiste à *projeter* l'égalité vectorielle sur les trois axes; on trouve ainsi trois égalités qui résultent simplement du théorème de Stokes.

La formule de Stokes et la formule que nous donnons plus haut ont donc la même origine, mais leurs formes différentes peuvent les rendre diversement propices à certaines applications.

2. Considérons deux surfaces S_1 et S_2 : la première, lieu d'un point P_1 ; la deuxième, d'un point P_2 . Ces surfaces étant limitées par des contours C_1 et C_2 , on établit le sens de parcours d'après les conventions précédentes.

Dans ce qui suit, l'opération grad ou rot sera affectée des indices 1 ou 2, suivant que cette opération sera faite par rapport à un point P_1 ou un point P_2 ; r est la distance de ces deux points.

Posons

$$\mathbf{v} = \text{grad}_1 \frac{1}{r} \times \mathbf{n}_1$$

et

$$\mathbf{q} = \mathbf{n}_1 \wedge \text{grad}_1 \frac{1}{r},$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 15 février 1926.

nous allons démontrer que

$$(\beta) \quad \text{grad}_2 v = \text{rot}_2 \mathbf{q}.$$

Mais on vérifie aisément, puisque \mathbf{n}_1 ne dépend pas des points P_2 , que

$$v = - \text{grad}_2 \frac{1}{r} \times \mathbf{n}_1 = - \text{div}_2 \left(\frac{\mathbf{n}_1}{r} \right),$$

$$\mathbf{q} = - \mathbf{n}_1 \times \text{grad}_2 \frac{1}{r} = - \text{rot}_2 \left(\frac{\mathbf{n}_1}{r} \right);$$

il s'agit de montrer que

$$\text{grad}_2 \text{div}_2 \left(\frac{\mathbf{n}_1}{r} \right) = \text{rot}_2 \text{rot}_2 \left(\frac{\mathbf{n}_1}{r} \right).$$

Or, la différence des deux membres est

$$\Delta_2 \left(\frac{\mathbf{n}_1}{r} \right),$$

lequel se réduit, puisque \mathbf{n}_1 ne dépend pas de P_2 , à

$$\mathbf{n}_1 \Delta_2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0,$$

.....

Application des théorèmes précédents. — Supposons que les surfaces S_1 et S_2 soient celles de deux feuillettes de puissances Π_1 et Π_2 ; la face choisie sur chacune d'elles étant celle chargée de magnétisme positif; le potentiel créé par un élément de S_1 en P_2 est, d'après un résultat dont l'interprétation, sinon la forme, est classique :

$$\Pi_1 \mathbf{n}_1 \times \text{grad}_1 \left(\frac{1}{r} \right) dS_1,$$

et, pour tout le feuillet,

$$V = \Pi_1 \int_{S_1} \mathbf{n}_1 \times \text{grad}_1 \left(\frac{1}{r} \right) dS_1.$$

Le vecteur induction en P_2 , provenant du feuillet S_1 , est

$$\mathbf{B} = - \text{grad}_2 V.$$

Le flux de \mathbf{B} sortant par la face positive de S_2 peut se remplacer par une circulation

$$\Phi_1 = - \Pi_1 \int_{C_2} \mathbf{Q} \times dP_2,$$

Q étant, d'après (β),

$$\int_{S_1} \mathbf{n}_1 \wedge \text{grad}_1 \left(\frac{1}{r} \right) dS_1,$$

c'est-à-dire, d'après (α),

$$- \int_{C_1} \frac{dP_1}{r},$$

ou enfin

$$\Phi_1 = \Pi_1 \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{dP_1 \times dP_2}{r}.$$

L'énergie potentielle des deux feuillets en présence est

$$- \Pi_2 \Phi_1 = - \Pi_1 \Pi_2 M$$

avec

$$M = \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{dP_1 \times dP_2}{r}.$$

C'est la formule de Neumann démontrée sans l'intervention des coordonnées.

QUESTION PROPOSÉE.

2494.

Deux plans parallèles P et P' tournent respectivement autour d'axes X et X', perpendiculaires à ces plans, avec des vitesses angulaires constantes ω et ω' , d'ailleurs quelconques. Entre les deux plans se trouve une bille sphérique, dont le diamètre est égal à leur distance et qui roule sur ux. On demande le lieu du centre de cette bille. R. B.

BIBLIOGRAPHIE.

Le *Précis de Mécanique rationnelle* de G. BOULIGAND (1), dont le Tome I a paru l'an dernier, est d'une conception originale et très heureuse.

L'Auteur s'est préoccupé d'amener le plus rapidement possible l'étudiant

(1) Vuibert. Le Tome II, à paraître, concerne le frottement et la dynamique des systèmes continus.

aux problèmes sur la dynamique des systèmes. Aussi, après quelques chapitres d'introduction, consacrés à la cinématique, la géométrie des masses et les principes, aborde-t-il la dynamique analytique, en se plaçant d'emblée au point de vue du calcul des variations. L'exposé prend ainsi une grande unité, il est fort bien gradué et de très nombreux exercices, traités dans le détail, viennent le compléter : l'Ouvrage peut être chaudement recommandé aux étudiants et, tout particulièrement, à ceux d'entre eux qui doivent travailler seuls.

Si le *précis* de M. Bouligand réalise ainsi, et de la façon la plus pratique, la préparation à la Licence et à l'Agrégation, ce serait bien mal connaître l'Auteur qu'imaginer qu'il a pu négliger, un seul instant, la solide formation scientifique qui, par delà parchemins et programmes, doit être le but de l'enseignement. Nous trouvons là les plus précieuses qualités du Livre et, même en une analyse rapide, il faut y insister. Ce sera d'abord pour noter l'élégant exposé des principes, où se détache la notion de relativité du système de référence et pour relever combien texte et exercices sont propres à assurer le développement de l'esprit géométrique. Il faut enfin, à cet égard, signaler tout particulièrement le dernier chapitre : compléments de dynamique analytique. En ce qui concerne les équations canoniques et leurs transformations, l'Auteur a suivi le remarquable exposé de M. Cartan, dans ses *Leçons sur les invariants intégraux* (1); il résume ensuite quelques-uns des résultats de M. Painlevé sur les trajectoires réelles pour insister surtout sur les travaux de M. Hadamard concernant les systèmes dynamiquement équivalents et les différences profondes qu'ils peuvent comporter du point de vue de l'*Analysis Situs*. Le Livre contribuera grandement à faire entrer dans l'enseignement classique ces importantes théories.

M. Bouligand a tenu à marquer, dans la préface de son Livre tout ce qu'il doit (et que nous devons tous) à l'enseignement de M. P. Appell dont le grand *Traité* donne le plus parfait exposé d'ensemble de la Mécanique rationnelle actuelle. Un Tome V de ce traité vient de paraître (2) et témoignerait à nouveau s'il en était besoin, combien l'œuvre du Maître, image très fidèle de développement actuel de la Mécanique, marque aussi les possibilités d'extension ultérieure de cette science : ce Tome V, écrit en collaboration avec M. Thiry, est en effet consacré aux éléments et aux applications du calcul tensoriel et constitue une introduction à la Mécanique de la relativité.

Nul n'ignore que le Calcul tensoriel (ou calcul différentiel absolu) créé par Ricci et Levi-Civita, s'est révélé comme l'instrument mathématique indispensable au développement des théories d'Einstein. Un progrès essentiel dans l'exposé de ce Calcul a été réalisé par M. Levi-Civita lorsqu'il a introduit la notion du transport parallèle d'un vecteur dans une variété d'élément linéaire quelconque.

(1) Hermann.

(2) Gauthier-Villars et C^{ie}, éditeurs; 1 vol. de 197 pages; prix 14^{fr}.

Dans le Livre de MM. Appell et Thiry l'étude même du Calcul tensoriel est précédée d'un élégant résumé des propriétés des formes linéaires et quadratiques. Les chapitres suivants conduisent le lecteur jusqu'aux délicates théories géométriques de MM. Weyl et Eddington et aux remarquables travaux de M. Cartan, tandis qu'un dernier chapitre « Aperçus de Géométrie cayleyenne », inspiré (comme le premier) d'un cours de M. Borel, en dégage les propriétés essentielles.

Il est impossible, ici, d'entrer dans le détail, mais il faut noter du moins les nombreuses applications traitées, tirées du domaine de la Géométrie ou de la Mécanique rationnelle classique. Ces applications rattachent le lumineux exposé des auteurs à des questions déjà connues de l'étudiant. Elles convaincront le lecteur que si même, comme le pensent de bons esprits, les théories relativistes ont peu d'avenir, la physique mathématique future ne pourra ignorer les développements donnés, par Ricci et M. Levi-Civita, à la pensée de Riemann. J. P.

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.63.

(Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en mai 1926, p. 253.)

SOLUTION.

1° Les équations finies des multiplicités caractéristiques de l'équation proposée

$$(1 + q^2)z = px$$

peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} x &= a \sin \varphi, & y &= ab \cos^2 \varphi + c, & z &= ab \sin \varphi \cos \varphi; \\ p &= b^3 \sec \varphi, & q &= \tan \varphi. \end{aligned}$$

2° Pour déterminer, en suivant la *méthode de Cauchy*, les surfaces intégrales passant par la parabole $x^2 = 2z$, $y = 0$, on notera que, sur cette parabole, c'est-à-dire pour

$$(1) \quad a \sin \varphi = 2b \cos \varphi \quad \text{et} \quad ab \cos^2 \varphi + c = 0,$$

on doit avoir

$$x \delta x = \delta z, \quad \delta y = 0,$$

équations qui entraînent $p = x$, ou

$$(2) \quad b = a \sin \varphi \cos \varphi.$$

On tire de (1) et (2)

$$a = 2\varepsilon b \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad \sin 2\varphi = \varepsilon, \quad 2 \cos^2 \varphi = 1,$$

et $c = -\varepsilon b^2$, ce qui donne les deux surfaces

$$x = a \sin \varphi, \quad y = \frac{\varepsilon a^2}{4} \cos 2\varphi, \quad z = \frac{\varepsilon a^2}{4} \sin 2\varphi$$

d'équations

$$(3) \quad x^4 + 4\varepsilon x^2 y - 4z^2 = 0.$$

Si l'on suit la *méthode de Lagrange*, on partira, par exemple, de l'intégrale complète

$$(4) \quad (y - c)^2 + z^2 = b^2 x^2;$$

la condition de contact de cette surface avec la parabole de l'énoncé s'écrit $b^2 = \varepsilon c$; et l'enveloppe de la famille ∞^1 de surfaces ainsi obtenues s'obtient immédiatement sous la forme (3).

3° Les surfaces intégrales développables vérifient une relation

$$F(p, q) = \text{const.};$$

or les seules fonctions F admissibles sont des intégrales premières de

$$\frac{dp}{pq} = \frac{dq}{1+q^2}$$

déduite des équations différentielles des caractéristiques et l'intégration de cette dernière équation ramène aux surfaces intégrales (4). Ainsi les seules surfaces intégrales développables sont des cônes de révolution de sommets sur Oy , d'axes parallèles à Ox .

Autre solution par M. J. LAUREAU.

Question C.64.

(Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en mai 1926, p. 253.)

SOLUTION,

Par M. R. ODILE.

1° On donne les équations

$$(1) \quad x = \frac{u-v}{2} + \rho \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u+v}{2} - \rho \frac{u-v}{2}, \quad z = \rho \frac{u^2+v^2}{2a},$$

où ρ est paramètre variable, et qui représentent une droite (D) dépendant

des deux paramètres u et v et l'on demande d'abord d'établir entre u et v une relation telle que les droites D correspondantes soient tangentes à une courbe (Γ).

Les équations de la droite (D) étant prises sous la forme

$$x = \alpha z + p, \quad y = \beta z + q$$

avec

$$\alpha = a \frac{u+v}{u^2+v^2}, \quad \beta = -a \frac{u-v}{u^2+v^2}, \quad p = \frac{1}{2}(u-v), \quad q = \frac{1}{2}(u+v),$$

la condition demandée est

$$d\alpha dq - d\beta dp = 0,$$

d'où aisément

$$[(u+v) du - (u-v) dv][(u-v) du + (u+v) dv] = 0.$$

On est donc amené aux deux équations différentielles

$$(2) \quad (u+v) du - (u-v) dv = 0,$$

$$(3) \quad (u-v) du + (u+v) dv = 0,$$

pour définir les développables de la congruence (1).

L'une ou l'autre s'intègre immédiatement, l'équation (2) ayant pour intégrale générale

$$(2') \quad \frac{u}{v} = \text{tang} \left(\log \frac{k}{\sqrt{u^2+v^2}} \right),$$

tandis que (3) conduit à

$$(3') \quad \frac{u}{v} = \text{tang} \left(\log \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{k} \right).$$

Dans l'un ou l'autre cas la droite D touche son enveloppe en un point dont le z est donné par

$$z = - \frac{dp}{d\alpha},$$

c'est-à-dire, après un calcul simple et s'il s'agit de l'équation (2),

$$z = - \frac{u^2+v^2}{2a}, \quad \text{ou encore} \quad \rho = -1.$$

Dans ce cas le point de contact de (D) avec son enveloppe a les coordonnées

$$x = -v, \quad y = u, \quad z = - \frac{u^2+v^2}{2a}$$

et l'équation (2') donne la projection de la courbe enveloppe sur le plan xOy : c'est une spirale logarithmique.

On a des résultats tout à fait analogues dans le cas de l'équation (3), les coordonnées du point de contact étant

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2a} \quad (\rho = +1).$$

2° On demandait l'équation des nappes focales de la congruence des droites D. Ce qui précède montre que ce sont les deux paraboloides

$$x^2 + y^2 - 2az = 0, \quad x^2 + y^2 + 2az = 0.$$

3° On demandait s'il existe des surfaces (Σ) admettant pour normales les droites (D). Or les plans focaux passant par une droite (D), c'est-à-dire les plans passant par cette droite et tangents respectivement à chacun des paraboloides en leurs points de contact avec (D), ont pour coefficients $v, -u, -a$ et $u, v, -a$. La somme des doubles produits est $+a^2$, nécessairement différente de zéro.

Autrement dit, les plans focaux passant par une droite (D) ne sont pas rectangulaires; ce qui serait la condition nécessaire et suffisante pour que les droites (D) forment une congruence de normales. Conclusion : il n'y a pas de surfaces Σ admettant pour normales les droites (D).

CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1926 (SUJETS DE COMPOSITION).

[Nous avons un peu retardé la date de parution de ce numéro des Nouvelles Annales pour pouvoir y publier les sujets qui suivent; nous en publierons les solutions dès les premiers numéros de la prochaine année scolaire. — L. R.]

Mathématiques élémentaires.

I. Nous conviendrons d'appeler cycle d'ordre n l'ensemble des nombres obtenus en permutant circulairement, de toutes les façons possibles, les chiffres d'un nombre N .

On caractérise un cycle par la donnée de son ordre et celle du plus petit de ses nombres. Par exemple le cycle d'ordre 3 du nombre 58 est formé des nombres 058, 580, 805.

1° Montrer qu'un diviseur commun à $10^n - 1$ et à l'un des
Ann. de Mathémat., 6^e série, t. I. (Juillet 1926.)

nombres d'un cycle d'ordre n divise les autres nombres du cycle.

Énoncer une réciproque de cette proposition.

2° Déterminer tous les cycles d'ordre 3 dont les nombres sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.

3° On considère les cycles d'ordre 6 dont les nombres sont, à l'ordre près, six termes consécutifs d'une progression arithmétique.

Établir que les six chiffres composant ces nombres sont distincts, que la raison R de la progression est un diviseur de $10^6 - 1$, et que le plus petit des nombres du cycle est un multiple du quotient de R par 9.

On recherchera enfin les limites entre lesquelles R doit être compris, et l'on en déduira la détermination des cycles considérés.

II. On donne, dans un plan, trois points O, A, ω . Après une rotation d'angle α et de centre ω , les points O et A prennent respectivement les positions O_α et A_α .

La droite AA_α coupe la circonférence de centre O_α et qui passe en A_α aux points A_α et M_α .

1° Étudier comment varie, avec α , le vecteur $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$.

2° Déterminer l'amplitude et le centre de la rotation qui permet, en général, de faire coïncider les vecteurs \overrightarrow{OA} et $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$. Lieu du centre de cette rotation quand α varie.

3° Montrer que la perpendiculaire menée de O_α à AA_α passe par un point fixe I . Lieu de ce point I quand, O et A restant fixes, ω décrit une circonférence donnée, passant par A , ou une circonférence donnée dont le centre est le milieu de AO .

4° Les points O et A étant donnés, ainsi qu'une droite D , construire les points ω et I sachant qu'ils sont sur la droite D . Discuter.

Mathématiques spéciales.

Un point M a pour coordonnées, par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy d'un plan $x = a \frac{t^3 - 3t}{t - \alpha}$ $y = a \frac{3t^2 - 1}{t - \alpha}$; (a est une constante positive donnée).

Quand α est fixe et que t varie, le point M décrit une courbe C_α .

Quand α varie à son tour, les courbes C_α constituent une famille.

1° Construire le lieu du point double et le lieu du point d'inflexion réel de C_α .

2° Soient respectivement Δ_α , Δ'_α , Δ''_α , la tangente d'inflexion réelle, la droite qui joint les points d'inflexion, et l'asymptote de C_α . Construire les enveloppes de ces trois droites.

Il y a trois courbes C_α dont les asymptotes ont la même direction. Étudier la configuration des droites Δ'_α qui leur correspondent.

3° Pour quelles valeurs de α la courbe C_α possède-t-elle une boucle fermée? α étant choisi convenablement, exprimer par deux intégrales définies l'aire de cette boucle et la longueur de l'arc qui la limite.

4° Par un point N de Δ_α , on peut mener à une courbe C_α deux tangentes dont les points de contact A et B sont distincts du point d'inflexion considéré. La courbe C_α restant fixe, montrer que lorsque N varie sur Δ_α , la droite AB enveloppe une conique Γ_α .

On demande de trouver, quand α varie, le lieu des foyers des coniques Γ_α , de discuter leur genre, de trouver leur enveloppe.

Chaque conique Γ_α coupe son enveloppe en deux points. On demande l'enveloppe de la droite qui joint ces deux points.

5° Par un point M de C_α , on peut mener à cette courbe deux tangentes T , T' autres que la tangente en M . Soit γ_M la conique de foyer O , tangente aux trois droites Δ_α , T , T' . Trouver l'enveloppe de γ_M quand M se déplace sur C_α .

Calcul différentiel et intégral.

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(1) \quad x'' + xA(t) = 0,$$

où $A(t)$ désigne une fonction analytique de la variable indépendante t , réelle et régulière pour toutes les valeurs réelles et finies de t .

1° Démontrer que toute solution de cette équation peut se mettre sous la forme

$$x = \rho \cos \varphi,$$

ρ satisfaisant à l'équation différentielle

$$(2) \quad \rho'' - \frac{c^2}{\rho^3} + \rho A(t) = 0,$$

où c désigne une constante à laquelle on peut donner une valeur arbitraire, autre que zéro (1 par exemple), tandis que φ a pour valeur

$$\int \frac{c dt}{\rho^2}.$$

Réciproquement, si ρ est une intégrale quelconque de (2) et φ une fonction primitive de $\frac{c}{\rho^2}$, l'intégrale générale de (1) est de la forme

$$C\rho \cos(\varphi + h),$$

C et h étant des constantes d'intégration. Toute solution $\rho(t)$ de l'équation (2) est régulière et de signe constant quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2° Il résulte de ce qui précède que l'équation (2) s'intègre au moyen d'une quadrature dès qu'on en connaît une solution particulière. Sous quelle forme les constantes d'intégration ρ_0 et ρ'_0 figurent-elles dans l'expression de l'intégrale générale? Interpréter le résultat en considérant les trajectoires du point analytique

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

et le lien qui existe entre les trajectoires correspondant aux diverses solutions de l'équation (2). Examiner le cas où A est une constante positive.

3° On suppose, dans cette troisième partie du problème, que $A(t)$ reste compris entre deux constantes positives M et m . Démontrer que les intégrales réelles de $x(t)$ de l'équation (1) sont *oscillantes*, les zéros et les points stationnaires se succédant alternativement à des intervalles moindres que $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$ et plus grands que $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$. Établir, dans les mêmes conditions, quelques propriétés des intégrales réelles $\rho(t)$ de l'équation (2). Montrer notamment que, si ρ_1 et ρ_2 sont deux valeurs stationnaires consécutives, on a

$$\frac{c}{\sqrt{M}} < \rho_1 \rho_2 < \frac{c}{\sqrt{m}}$$

et que, dans le cas où les amplitudes d'oscillation $\rho_2 - \rho_1$ deviennent infiniment grandes, les intervalles $|t_2 - t_1|$ correspondants ne deviennent pas infiniment grands, ni infiniment petits.

4° Examiner ensuite le cas où $A(t)$ est fonction périodique, de période égale à π . Montrer que, parmi les intégrales de (1), il en existe alors en général deux, linéairement distinctes, qui sont multipliées par les facteurs λ et $\frac{1}{\lambda}$ quand on change t en $t + \pi$, λ étant racine de l'équation du second degré à coefficients réels

$$\lambda^2 - k\lambda + 1 = 0.$$

Quelles sont les propriétés des intégrales réelles de (1) et (2) qui correspondent aux diverses hypothèses

$$k > 2 \quad \text{ou} \quad k < -2 \quad \text{ou} \quad k^2 < 4 \quad \text{ou} \quad k = \pm 2?$$

Montrer que la condition $k^2 < 4$ est suffisante, et la condition $k^2 \leq 4$ nécessaire, pour que (2) admette une solution périodique. [On dit alors que les solutions de (1) sont stables.]

5° Démontrer que $A(t)$ étant toujours supposée périodique, le nombre N des zéros d'une intégrale réelle de (1), contenus dans l'intervalle $(0, T)$ est donné par la formule

$$N = \alpha T + r,$$

α étant fixe et r restant borné.

6° On pose en particulier

$$A = q^2 + q_1 \cos 2t,$$

q et q_1 étant des constantes réelles, qui vérifient l'inégalité $|q_1| < q^2$. Démontrer que si l'intervalle $(q^2 - q_1, q^2 + q_1)$ ne renferme le carré d'aucun nombre entier, l'équation (1) n'admet que des solutions stables.

Mécanique rationnelle.

Étude de certains mouvements d'une toupie. — *La toupie est constituée par un disque circulaire plan homogène, de rayon $2a$ et de masse m , d'épaisseur négligeable, fixé à une aiguille perpendiculaire, de masse et d'épaisseur négligeables,*

de longueur a en dessous du disque jusqu'à la pointe et $2a$ au-dessus. L'action de la pesanteur est supposée assimilable à celle d'un champ uniforme, vertical, d'intensité g par unité de masse; on ne tiendra pas compte de la résistance de l'air.

Les candidats pourront traiter les diverses parties dans l'ordre qui leur conviendra.

I. La toupie étant animée d'un mouvement de rotation de grande vitesse angulaire autour de son axe repose par sa pointe sur un plan horizontal. On supposera que le frottement maintient cette pointe immobile et que la résistance du plan peut se traduire par une réaction unique appliquée à la pointe.

a. Étudier et décrire succinctement le mouvement de la toupie dans le cas où, à certains instants de ce mouvement, l'aiguille a une vitesse nulle, la vitesse angulaire de la toupie étant alors ω . En se limitant à une période de temps qui sépare deux repos successifs de l'aiguille, étudier le mouvement d'une façon plus précise en développant les éléments qui le déterminent suivant les puissances de $\lambda = \frac{g}{a\omega^2}$ supposé petit et en se bornant aux termes du premier degré en λ .

b. Étudier et décrire succinctement le mouvement dans le cas où, à un certain instant de ce mouvement, l'aiguille passe par la verticale avec une vitesse angulaire ϵ . En supposant ϵ petit, donner des valeurs approchées de la variation du temps et de la précession entre deux passages successifs par la verticale. Que devient le mouvement si l'on fait abstraction de l'action de la pesanteur?

c. Déterminer les conditions d'un mouvement où l'aiguille garde une inclinaison constante sur la verticale; chercher le système des forces d'inertie et la réaction du plan horizontal. Ce mouvement étant réalisé, on suppose qu'on applique au centre de gravité de la toupie une force horizontale perpendiculaire à l'axe, d'intensité f ; comment tendent à varier les vitesses? Quel serait de même l'effet d'une percussion qui aurait même point d'application, même direction et pour intensité P ?

II. La pointe de la toupie est engagée dans une rainure

circulaire horizontale, de rayon ρa , qui permet tout déplacement angulaire de l'aiguille et tout déplacement de la pointe dans la rainure; la résistance de cette rainure peut ainsi se traduire par une réaction normale, appliquée à la pointe. Chercher des équations différentielles définissant le mouvement, en prenant pour variables l'abscisse angulaire de la pointe dans la rainure et les angles d'Euler qui définissent la position de la toupie. Chercher s'il existe un mouvement tel que l'aiguille ou son prolongement rencontre l'axe de la rainure en un point fixe.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Déterminer les courbes $y = f(x)$ telles que le segment TN intercepté sur Ox entre T pied de la tangente sur Ox, N pied de la normale sur Ox, soit constant, égal à $2a$, où a est une longueur donnée;

2° Construire la courbe C d'équation

$$x = t + L(1-t), \quad y = \sqrt{1-t^2}.$$

Calculer le segment TN. La courbe rencontre l'axe Ox en A, l'axe Oy en B. Donner sans calcul la valeur numérique du rayon de courbure en A. Calculer avec les tables de logarithmes le segment OA;

3° Calculer l'intégrale $\int y dx$, où y et x sont les fonctions du numéro précédent. Calculer l'aire limitée par OA, l'arc AB et BO. Calculer l'aire comprise entre Ox, Oy et l'arc infini issu de B (valeurs numériques à calculer avec les tables).

4° Calculer le volume engendré en tournant autour de Ox par un arc de la courbe C; valeur numérique correspondant à l'arc AB où à l'arc infini issu de B.

5° Calculer, en fonction de t , l'arc s de la courbe C compté à partir de B pour origine. Valeur numérique de l'arc AB.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° La famille de courbes de l'énoncé est définie par l'équation différentielle

$$y = \frac{2ay'}{1+y'^2}.$$

Posant $y' = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$, on l'intègre sous la forme

$$y = a \sin \varphi, \quad x = a[\cos \varphi + L(1 - \cos \varphi)] + K.$$

2° La courbe C est une courbe de cette famille, pour $a = 1$, $K = 0$. Elle présente sur Oy un point de rebroussement B d'où partent, à 45° sur les axes, une branche infinie asymptote à Ox et un arc AB rencontrant normalement Ox en A. Le segment TN vaut $2a = 2$; le rayon de courbure en A est 2;

$$\overline{OA} = L_2 - 1 = -0,30685 \dots$$

$$3^\circ \quad \int y \, dx = \int \cos \varphi (1 + \cos \varphi) \, d\varphi = \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}.$$

L'aire limitée par OA, l'arc AB, BO a pour valeur

$$\left[\sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

L'aire comprise entre Ox , Oy et l'arc infini issu de B a pour valeur

$$\left[\sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

4° Le volume engendré par cette aire dans sa rotation autour de Ox a pour valeur

$$\int \pi y^2 \, dx = -\pi \left[\frac{\cos^2 \varphi}{2} + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{6}.$$

5° La différentielle de l'arc est définie par

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2} = \frac{dx}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

L'arc s compté à partir de B a pour valeur

$$s = \left[4 \cos \frac{\varphi}{2} + 2L \operatorname{tang} \frac{\varphi}{4} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}.$$

L'arc AB s'obtient en faisant $\varphi = \pi$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Les séries*

$$C(x) \equiv 1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2!} + \dots + \frac{\cos nx}{n!} + \dots,$$

$$S(x) \equiv \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2!} + \dots + \frac{\sin nx}{n!} + \dots$$

sont-elles convergentes? Trouver leur somme pour $x = \frac{\pi}{2}$. Calculer

$$\text{arc cos} \left[C \left(\frac{\pi}{2} \right) \right], \quad \text{arc sin} \left[S \left(\frac{\pi}{2} \right) \right].$$

2° La série

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{2} + \dots + \frac{\sin \left(\frac{x}{n} \right)}{n} + \dots$$

est-elle convergente?

3° La série

$$\sin^2 x + 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) + \dots + n \sin^2 \left(\frac{x}{n} \right) + \dots$$

est-elle convergente?

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Les séries $\frac{\cos nx}{n!}$ et $\frac{\sin nx}{n!}$ sont convergentes, car le terme général de chacune d'elles est inférieur en valeur absolue au terme général de la série e .

On a

$$C \left(\frac{\pi}{2} \right) = \cos 1; \quad S \left(\frac{\pi}{2} \right) = \sin 1.$$

2° La série $\frac{\sin \left(\frac{x}{n} \right)}{n}$ est convergente, son terme général étant équivalent à $\frac{x}{n^2}$, terme général d'une série convergente.

3° La série $n \sin^2 \left(\frac{x}{n} \right)$ est divergente, son terme général étant équivalent à $\frac{x^2}{n}$, terme général d'une série divergente.

(Lille, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Construire la courbe C définie par les équations

$$\begin{cases} x = 4 \cos u - \cos 4u, \\ y = 4 \sin u - \sin 4u. \end{cases}$$

On prend sur C , pour origine des arcs, le point A fourni par $u = 0$, pour sens positif, celui des u croissants. Soit MT la demi-tangente positive en un point M de C . Calculer en fonction de u : l'abscisse curviligne $\widehat{AM} = s$, l'angle $\left(\widehat{Ox, MT} \right) = \alpha$, le rayon de courbure.

Construire la développée de C .

II. On pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Déterminer deux fonctions $f(r)$

et $\varphi(\theta)$ de manière que les expressions

$$f(r) dx - \varphi(\theta) dy \quad \text{et} \quad \varphi(\theta) dx + f(r) dy$$

soient simultanément des différentielles totales.

C. 68. — III. Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy , une courbe C sur laquelle on a fixé un sens positif des arcs, MT la demi-tangente dans ce sens, Ou l'une des demi-droites qu'on peut distinguer sur le rayon vecteur du point M (indéfiniment prolongé), r la valeur algébrique (rapportée à Ou) de \overline{OM} . On pose

$$(\widehat{Ox, MT}) = \alpha, \quad (\widehat{Ou, MT}) = V, \quad (\widehat{Ox, Ou}) = \theta.$$

A l'aide des formules qui permettent d'exprimer les coordonnées cartésiennes de M en fonction de r et de θ et à l'aide des expressions classiques de $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, R (rayon de courbure affecté d'un signe), calculer $\cos V$, $\sin V$ et R en coordonnées polaires. Calculer la distance OK du point O au centre de courbure K , relatif au point M . Déterminer la courbe C de manière que la longueur OK et la longueur MK soient toujours égales.

C. 69. — ÉPREUVE PRATIQUE. — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires, M un point de coordonnées (x, y, z) , V le volume intérieur à la sphère de centre O et de rayon un. On pose $x + y + z = u\sqrt{3}$. Transformer l'intégrale triple

$$I = \iiint_V f(x + y + z) dx dy dz$$

en une intégrale simple $\int_{+2}^{+1} \varphi(u) du$.

Calculer complètement I , lorsqu'on fait successivement

$$f = L \left(1 + \frac{x + y + z}{\sqrt{3}} \right),$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{3 - (x + y + z)^2}}.$$

(Poitiers, juin 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — On a une surface fermée S limitant un volume V . Établir la formule qui remplace l'intégrale triple

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz$$

appliquée à ce volume par une intégrale de surface appliquée à S.
Interprétation vectorielle.

Deuxième question. — Axes rectangulaires. Déterminer les courbes telles que le milieu de la normale en M, MN limitée à l'axe des x soit sur la parabole

$$y^2 = 2px.$$

Position de ces courbes par rapport à la parabole. Peut-on donner n'importe quelle valeur à la constante entrant dans l'équation de la famille de courbes trouvée.

C.70. — MÉCANIQUE. — Une plaque ayant la forme d'un triangle rectangle isocèle OAB tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour du côté de l'angle droit OA placé suivant la verticale ascendante.

Une masse pesante de valeur m glisse sur le côté hypoténuse AB, elle ne peut quitter son support et elle est reliée au point A par un fil inextensible de masse négligeable.

La longueur naturelle du fil sans tension est l ; si l'on exerce une tension T, le fil s'allonge de x et la tension est proportionnelle à l'allongement : $T = kx$, k constante donnée.

A l'instant initial la longueur du fil est l et la vitesse relative de la masse m sur AB est nulle.

1° Former en projetant sur AB l'équation définissant le mouvement relatif de la masse pesante m sur le support mobile AB.

Étudier et caractériser ce mouvement suivant la grandeur de la rotation d'entraînement ω .

2° La plaque tournant à la vitesse de 300 tours à la minute, on constate que la masse m a un mouvement relatif d'oscillation de 150 tours à la minute.

Le poids de la masse m étant de 5^{kg} , on demande de calculer la constante k et l'amplitude de l'oscillation en supposant l'allongement x exprimé en mètres, la tension T en kilogrammes et en prenant

$$g = 10 \text{ m\grave{e}t./sec.}^2, \quad l = 5^{\text{m}}.$$

On définira la position de la masse m en prenant comme origine la position initiale m_0 et un axe m_0x descendant.

(Nancy, octobre 1923.)

C.71 ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Déterminer r de façon que la dérivée de $e^{rx} \cos x$ soit $ae^{rx} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, a étant une constante. Quelle est, pour cette valeur de r , la dérivée d'ordre m de $e^{rx} \cos x$? Trouver le

développement en série entière de cette fonction et montrer que, pour x négatif, en négligeant les termes nuls, on a une série alternée.

II. Pour tout point M d'une ellipse donnée de foyers A et B , on pose

$$\left(\widehat{AB, AM}\right) = \alpha, \quad \left(\widehat{BA, BM}\right) = \beta.$$

Trouver la relation qui existe entre α et β . Calculer $\frac{d\beta}{d\alpha}$ en fonction de α . Trouver les points pour lesquels l'angle géométrique AMB est maximum.

III. On considère la courbe définie, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, par l'équation

$$x(x^2 - 3y^2) = ay^2.$$

où a est une constante. Construire cette courbe. Trouver le lieu des points M tels que les tangentes menées de M à la courbe aient leurs points de contact en ligne droite. En appelant Δ la droite des points de contact, trouver l'enveloppe des droites Δ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un pendule est constitué par une sphère, de 12^{cm} de diamètre, fixée à l'extrémité d'une tige cylindrique, de 0^m,90 de long et de 4^{mm} de diamètre. Cette tige est elle-même fixée à un couteau prismatique, de 6^{cm} de long et dont la section droite est un triangle isocèle, ayant 15^{mm} de base et 20^{mm} de hauteur. Ces trois pièces sont construites avec le même métal.

1° Calculer, à $\frac{1}{10}$ de seconde près, la durée de 1000 oscillations du pendule.

2° Calculer approximativement l'erreur que l'on commettrait en négligeant la masse du couteau et celle de la tige.

On donne $g = 9^m,81$.

(Clermont-Ferrand, novembre 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Les axes étant rectangulaires et θ étant un paramètre arbitraire, on donne la surface Σ définie par

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 \theta + z \sin \theta, \\ y &= \sin^3 \theta + z \cos \theta. \end{aligned}$$

1° Montrer que Σ est une surface développable et trouver son arête de rebroussement Γ . Quelle est la projection Γ' de Γ sur xOy et la relation de cette courbe Γ' avec la trace de Σ sur ce plan ;

2° Quelle est la pente du plan tangent à Σ par rapport au plan xOy . Montrer que la courbe Γ est une hélice (au sens général de ce mot); peut-on déduire ce résultat sans nouveau calcul de ce qui précède, ou, inversement, peut-on déduire certains des résultats précédents de cette dernière propriété établie directement;

3° On limite Σ à Γ et au plan xOy et l'on ne considère que la portion pour laquelle x, y, z sont positifs. Calculer la longueur de l'arc correspondant de Γ et l'aire de Σ .

C. 72. — II. Soit le trièdre de référence trirectangle $Oxyz$. Un point matériel M , de masse m , est soumis à une force constante F parallèle à Ox et à une force F' obtenue de la manière suivante. Par M , on mène le vecteur vitesse \vec{MV} et, par V , un vecteur \vec{VH} parallèle à Oz et de mesure algébrique constante h . La force F' est le moment de \vec{VH} par rapport au point M .

Cela posé, on lance M , au temps zéro, à partir de l'origine et avec le vecteur vitesse \vec{V}_0 , de composantes a, b, c .

1° Calculer les coordonnées de M au temps t . Calculer également sa vitesse en fonction de son abscisse x . Chercher l'hodographe. Dire dans quels cas la trajectoire Γ de M est une hélice ou bien une cycloïde.

2° On suppose V_0 dans le plan xOy . Calculer le rayon de courbure R de la trajectoire Γ en O . Montrer que si \vec{V}_0 tourne autour de O , en gardant une grandeur constante v_0 , le centre de courbure de Γ en O décrit une conique de foyer O . Vérifier que le produit du paramètre de cette conique par son excentricité est indépendant de v_0 .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Construire la courbe.

$$y = e^{-x} \sin x$$

dans l'intervalle $0 < x < \pi$.

On déterminera, en particulier, le point le plus haut, le point d'inflexion, les tangentes en ces points et les tangentes aux deux extrémités de la courbe. On prendra pour échelles :

Pour $x = 1$, $u = 20^{\text{mm}}$; pour $y = 1$, $u = 20^{\text{cm}}$.

Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x , en supposant cette aire homogène. Marquer ce point sur le graphique.

(Clermont, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1. Calculer l'intégrale $\int \int \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$

étendue à l'aire de l'ellipse

$$(E) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

- 1° En rassemblant les éléments situés sur chaque parallèle à Oy ;
- 2° En rassemblant les éléments situés sur chaque ellipse E_λ , homothétique et concentrique à E , dans le rapport λ ;
- 3° En ramenant l'intégrale double proposée à une intégrale curviligne, prise le long de E , et calculant cette dernière à l'aide d'une représentation paramétrique.

C. 73. — II. Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy . Sur chaque axe $u'Ou$ mené par O , tel que $\widehat{Ox, Ou} = \omega$, on prend un point M tel que $\overline{OM} = \rho$. Soit $v'Ov$ l'axe mené par O , tel que $\widehat{Ou, Ov} = +\frac{\pi}{2}$. Le point M décrivant une courbe $\rho = f(\omega)$, on appelle K le centre de courbure en M , MT la demi-tangente dans le sens des arcs croissants, V l'angle $\widehat{Ou, MT}$.

- 1° Rappeler les expressions de $\cos V, \sin V, dV$, en précisant les conventions de signe. En déduire les composantes de \vec{MK} suivant Ou et Ov .
- 2° En appelant H la projection orthogonale de O sur la normale en M , évaluer les composantes de MH suivant Ou et Ov .
- 3° Déterminer la courbe $\rho = f(\omega)$ de manière qu'on ait $\vec{MK} = \frac{8}{9} \vec{MH}$.
- 4° Pour quelle valeur de m l'enveloppe de la droite

$$x \cos \theta + y \sin \theta = a \cos m \theta$$

répond-elle à la question ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Faire le changement de fonction inconnue $z = \frac{x}{y}$ dans l'équation différentielle

$$2 \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 - z \frac{d^2 z}{dx^2} + 3z \frac{dz}{dx} + 2z^2 = e^x z^3.$$

En déduire l'intégrale générale de cette équation.

(Poitiers, juin 1926.)

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Corrections à apporter aux observations faites à l'aide du théodolite, pour tenir compte des défauts du réglage.*

II. *Démontrer les lois de Képler. Définir les éléments d'une orbite. Calculer l'anomalie vraie en fonction de l'anomalie excentrique. Étudier les variations de l'équation du centre. Calculer le développement de son maximum, suivant les puissances croissantes de l'excentricité, jusqu'au troisième ordre inclus.*

C. 74. — ÉPREUVE PRATIQUE. — *Résoudre, par la méthode des moindres carrés, le système*

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0,425, \\ -x + y + z &= -2,026, \\ x - y + z &= -1,538, \\ x + 2y + z &= 1,401, \\ 2x - y - z &= 3,237, \\ x - y + 2z &= -3,316,\end{aligned}$$

en supposant que les seconds membres sont les moyennes respectives de 10, 10, 20, 20, 10, 10 mesures de même précision. Dédire du résultat l'erreur probable imputable à chacune de ces mesures, ainsi que les erreurs probables dont sont entachées les valeurs trouvées pour x, y, z .

(Clermont, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Équation du temps : définition ; calcul des termes périodiques prépondérants ; allure générale de la variation de l'équation au cours d'une année. Comparer les durées du matin et du soir en un point de la France, de longitude L par rapport à Greenwich pendant la période d'adoption de l'heure d'été.*

II. *Théorème de Jacobi sur l'intégration des équations canoniques au moyen d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles associée.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer le rayon vecteur et l'anomalie vraie de Mercure à l'instant où l'anomalie moyenne est*

$$140^{\circ}8'55'',$$

sachant que pour cette planète, on a

$$a = 0,38710, \quad e = 0,20560.$$

Réponses :

$$u = 146^{\circ}37'42''5,$$

$$r = 0,45357,$$

$$v = 152^{\circ}39'0''.$$

(Poitiers, juin 1926.)

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

C.75. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une circonférence homogène, de masse m et de rayon R , peut tourner sans frottement autour d'un de ses diamètres, supposé vertical. Une tige pesante homogène, de masse m' et de longueur $2a$ ($a < R$) s'appuie par ses deux extrémités à l'intérieur de la circonférence, sur laquelle elle peut glisser sans frottement.

1° Déterminer le mouvement du système.

2° Montrer que si la tige a pour longueur le côté du triangle équilatéral inscrit dans la circonférence, son mouvement relatif (c'est-à-dire par rapport à la circonférence) est un mouvement pendulaire, dont on calculera le pendule synchrone. Quel est alors le mouvement de la circonférence ?

3° On revient au cas général. Montrer que les positions horizontales de la tige sont des positions d'équilibre relatif. Discuter leur stabilité et calculer la période des petites oscillations au voisinage des positions stables.

4° Étant donné une position quelconque de la tige, dire dans quel cas l'on peut trouver une vitesse angulaire initiale de la circonférence telle que cette position soit une position d'équilibre relatif. Discuter sa stabilité.

C.76. — ÉPREUVE PRATIQUE. — Un gyroscope est constitué par un disque circulaire de 20^{cm} de diamètre et de 6^{mm} d'épaisseur et par un tore, dont le centre coïncide avec celui du disque et dont les rayons équatoriaux sont respectivement 10^{cm} et 14^{cm} . Le point de suspension est à 10^{cm} du centre. Le disque et le tore sont homogènes et de même densité. La masse de l'axe est négligeable. Sachant que le gyroscope est soumis à la seule action de la pesanteur et qu'il fait 3000 tours à la minute, calculer le temps que met l'axe pour faire un tour complet dans le mouvement de précession. On donne $g = 9,81$.

(Clermont, juin 1926.)

SUR L'ÉGALITÉ ET LA SIMILITUDE DES FIGURES DANS L'ESPACE ;

PAR J. LEMAIRE.

Dans tout ce qui va suivre, nous appellerons *éléments homologues* de deux figures, égales ou semblables, les éléments, points, plans, droites, lignes, qui se correspondent dans les deux figures; deux tels éléments seront désignés par une même lettre, accentuée dans l'une des figures; deux éléments homologues qui coïncident sont dits *doubles*.

I. — Figures directement égales.

(F) et (F') étant deux figures directement égales, c'est-à-dire superposables, on sait que si elles ont deux points homologues confondus, elles ont une droite de tels points, et peuvent être superposées par une rotation de l'une d'elles autour de cette droite.

Rappelons aussi que, dans le cas général, (F) peut être amenée à coïncider avec (F') par un *déplacement hélicoïdal* autour d'un axe X, et cela d'une seule manière, la translation et la rotation qui constituent ce déplacement pouvant être permutées.

Si A, B, C, ... et A', B', C', ... sont des points homologues des deux figures, les vecteurs (AA'), (BB'), (CC'), ... ont pour projections sur X des vecteurs équipollents. De plus, si d'un point O quelconque comme origine, on mène les vecteurs (Oa), (Ob), (Oc) équipollents aux trois vecteurs (AA'), (BB'), (CC') la perpendiculaire menée de O sur le plan abc donne la direction de l'axe X, et la distance de O à ce plan donne la grandeur de la translation.

Observons encore que les dièdres tels que $\widehat{MXM'}$ sont tous égaux et de même sens, et que les vecteurs (Om), (On), ... équipollents à (MM'), (NN'), ... ont leurs extrémités, m, n, ... dans le plan abc.

Éléments doubles. — L'égalité de deux figures de l'espace étant

un cas particulier de l'homographie, la transformation qui permet de passer de (F) à (F') possède quatre points doubles, dont aucun n'est situé, d'après ce qui précède, à distance finie.

L'axe X glissant sur lui-même, les points homologues des deux figures qui appartiennent à cet axe forment deux divisions égales dont les points doubles sont confondus à l'infini sur l'axe; les deux autres points doubles appartiennent à la droite de l'infini des plans perpendiculaires à X , qui est évidemment une droite double de la transformation; et comme les angles homologues situés dans deux tels plans sont égaux et de même sens, ces points doubles sont les points cycliques communs à ces plans.

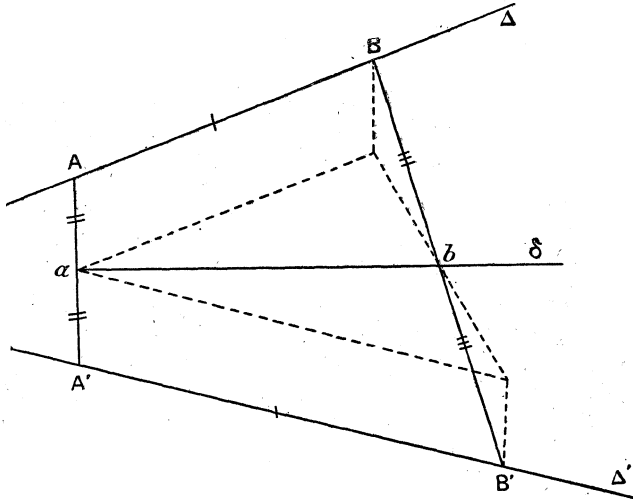
Les plans doubles de la transformation sont les plans cycliques passant par X et le plan de l'infini compté deux fois.

Groupe de points homologues. — A un groupe de points homologues M, M' , correspond un point, milieu de MM' , que nous appellerons le *point médian* du groupe. Inversement, à un point arbitraire m correspond un système de points homologues dont m est le point médian : nous verrons en effet plus loin que deux figures *inversement égales*, c'est-à-dire dont l'une est superposable à la symétrique de l'autre par rapport à un point ou à un plan quelconque de l'espace, possèdent un point double à distance finie et un seul. Ceci admis, si nous considérons la figure (F_1) symétrique de (F) par rapport à m , les figures (F_1) et (F') sont inversement égales et ont un point double M_1M' et un seul; donc il existe bien, dans (F) et (F') , un système de points homologues M, M' et un seul, admettant m pour point médian.

Groupe de droites homologues. — Si A, B, C, \dots et A', B', C', \dots sont des points homologues de deux droites homologues Δ et Δ' , les droites AA', BB', CC', \dots sont des génératrices d'un même système d'un paraboloidé, dont Δ et Δ' sont génératrices de l'autre système; les milieux a, b, c, \dots des segments AA', BB', CC', \dots se trouvent sur une génératrice du même système que Δ et Δ' , de sorte que *les milieux des segments AA', BB', \dots joignant les points homologues de deux droites homologues Δ et Δ' appartiennent à une droite δ , nous l'appellerons la droite médiane de Δ et Δ' .*

Il est aisé de voir que δ est également inclinée sur Δ et Δ' , ces trois droites étant d'ailleurs parallèles à un même plan (*fig. 1*). Les segments homologues tels que AB et $A'B'$ ont sur δ des projec-

Fig. 1.



tions orthogonales équivalentes; il en est donc de même des segments AA' , BB' , En particulier, si AA' est perpendiculaire à δ , il en est de même pour BB' , CC' , Ce qui précède s'applique aussi au cas où Δ et Δ' se coupent.

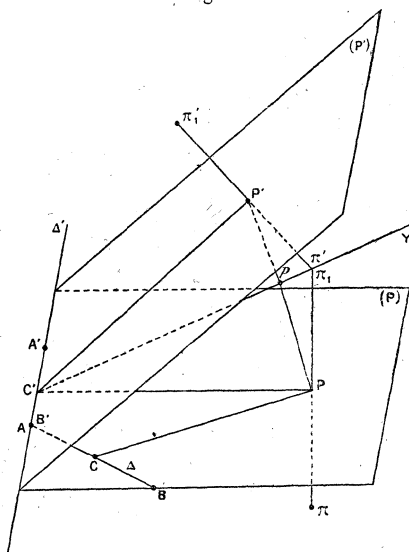
Inversement, montrons qu'à une droite quelconque δ de l'espace correspondent deux droites homologues Δ , Δ' pour lesquelles δ est la droite médiane : a et b étant en effet deux points arbitraires de δ , a est le point médian de deux points homologues A et A' , b le point médian de deux points homologues B et B' ; les droites AB et $A'B'$ sont deux droites homologues, et les seules, pour lesquelles δ est la droite portant les milieux des segments AA' , BB' ,

Groupe de plans homologues. — Considérant enfin deux plans homologues (P) et (P') , on verra facilement, en s'appuyant sur ce qui précède, que les segments MM' joignant les points homologues de ces plans ont leurs milieux sur un même plan (p) , que nous appellerons *plan médian* de (P) et (P') ; inversement à

un plan (p) donné arbitrairement, correspond un groupe, et un seul, de deux plans homologues pour lesquels (p) est le plan médian.

Précisons les positions relatives des trois plans : (P) et (P') étant deux plans homologues, considérons leur intersection Δ' comme une droite de (F') , son homologue Δ est dans (P) ; A , point commun à Δ et Δ' , considéré comme appartenant à Δ , a pour homologue un point A' de Δ' ; de même ce point, considéré comme appartenant à Δ' et appelé B' , a pour homologue un point B de Δ ; les segments AB et $A'B'$ sont homologues et par suite égaux, et leurs milieux C et C' sont homologues; la droite CC' n'est autre chose que la droite médiane δ de Δ et Δ' , elle est dans le plan médian (p) de (P) et (P') (*fig. 2*).

Fig. 2.



Soient P le point de (P) qui se projette en C et C' sur Δ et Δ' , P' son homologue dans (P') ; les triangles PAB et $P'A'B'$ sont homologues et isocèles, leurs hauteurs PC et $P'C'$ sont égales; par conséquent $PC' = P'C'$ et ces droites sont toutes deux perpendiculaires à Δ' . Si la bissectrice $C'Y$ de $\widehat{PC'P'}$ coupe PP' en p , ce point p appartient au plan médian (p) de (P) et (P') . Observons

que $C'Y$ est la droite médiane de AP et $A'P'$ et qu'elle est perpendiculaire aux droites joignant les points homologues de ces deux droites.

Le plan (p) est déterminé par le point p et la droite δ ; il coupe de même (P') suivant la droite δ_1 , médiane de Δ_1 et Δ'_1 , en appelant Δ_1 la droite commune aux plans (P) et (P') considérée comme faisant partie de (F) .

Les plans (P) et (P') étant symétriques par rapport à la droite $C'Y$ de (p) , ce plan médian des deux premiers est également incliné sur chacun d'eux; δ et δ_1 sont aussi symétriques par rapport à $C'Y$.

Remarque. — A et A' étant deux points homologues quelconques, et δ une perpendiculaire à AA' en son milieu, δ est la droite médiane de deux droites homologues Δ et Δ' symétriques par rapport à δ ; une symétrie par rapport à δ permettra de passer de (F) à (F_1) ; les figures égales (F_1) et (F') ayant une droite de points doubles Δ' , une rotation autour de cette droite amènera (F_1) en (F') : ainsi l'on peut passer de (F) à (F') , d'une infinité de manières, par un renversement, ou symétrie par rapport à une droite, suivi d'une rotation autour d'une autre droite.

Montrons que le déplacement hélicoïdal permettant de passer de (F) à (F') peut être remplacé, d'une infinité de manières, par deux renversements (voir Cinématique Kœnigs, note de Darboux): δ étant une droite coupant à angle droit, en un point arbitraire a , l'axe X du déplacement hélicoïdal, a est le point médian de deux points homologues A et A' de l'axe, δ est par suite la droite médiane de deux droites homologues Δ et Δ' aussi perpendiculaires à l'axe: car si B et B' sont deux autres points homologues de ces droites, le milieu b de BB' est sur δ , a pour projection a sur X , et comme la projection de BB' est égale à AA' , les points B et B' se projettent en A et A' , Δ et Δ' sont bien perpendiculaires à l'axe. Ceci posé, un renversement autour de δ amène (F) en (F_1) , et Δ sur Δ' , points homologues confondus; une seconde rotation, autour de Δ' , amènera (F_1) en (F') ; le renversement ayant ramené l'axe X sur lui-même, en changeant son sens, la seconde rotation doit remettre finalement cet axe sur sa position primitive à un glissement près, et cela exige que cette

rotation soit aussi un renversement, ce qui démontre la propriété énoncée.

Revenons aux plans homologues (P) et (P') considérés plus haut : une rotation convenable autour de leur droite commune peut amener (P) en coïncidence avec (P') , le point P en P' ; (F) entraînée dans le mouvement vient en (F_1) ; la figure (f) , intersection de (F) et de (P) , égale à la figure homologue (f') , intersection de (F') et de (P') , vient occuper une position (f_1) dans (P') , et il est clair que la rotation peut être choisie telle que (f_1) et (f') soient directement égales.

Ces figures ayant un point double en P' , une rotation convenable autour de la perpendiculaire en ce point à (P') pourra amener (f_1) en coïncidence avec (f') , et par suite (F_1) en coïncidence avec (F') . On voit ainsi qu'on peut, d'une infinité de manières, amener (F) en (F') , à l'aide de deux rotations autour de deux droites rectangulaires.

COMPLEXES ATTACHÉS AUX DEUX FIGURES.

Nous allons étudier brièvement deux complexes attachés aux deux figures : le complexe des axes des segments MM' , et le complexe des droites qui portent ces segments.

Complexe (C_1) des axes des segments MM' . — Pour chaque groupe de points homologues M, M' , il existe un nombre infini d'axes, c'est-à-dire de perpendiculaires au segment MM' en son milieu; comme ces points sont eux-mêmes en nombre triplement infini, on serait tenté de penser que les axes des segments tels que MM' sont en nombre quadruplement infini, et par conséquent ne forment pas un complexe; mais il n'en est rien, puisque nous avons vu plus haut que tout axe d'un segment MM' est aussi axe d'une infinité de segments pareils, et se trouve par suite compté un nombre ∞^1 de fois, de sorte que ces axes sont en nombre ∞^3 , et constituent bien un complexe.

Tous les axes passant par un point a sont des axes pour le segment AA' dont a est le point médian, sont par suite perpendiculaires à AA' , et appartiennent tous au plan axial du segment. Par conséquent, les axes des segments MM' forment un complexe linéaire; nous l'appellerons (C_1) .

Plan polaire d'un point. Pôle d'un plan. — Le plan polaire d'un point est aussi le plan axial du segment de droite dont les extrémités ont ce point pour point médian.

Inversement étant donné un plan (P), considérons la figure (F₁) symétrique de (F) par rapport à ce plan; les figures inversement égales (F') et (F₁) admettent un point double π' , π_1 et un seul à distance finie, par suite il existe dans (F) et (F') un groupe de deux points homologues π , π' et un seul, qui sont symétriques par rapport à (P). Le point médian P de ces deux points est le pôle du plan (P). Si nous nous reportons à la figure 2, nous voyons que les points P, P' de cette figure sont les projections sur les deux plans d'un même point π' de Y, lequel est équidistant des plans; considéré comme appartenant à la figure (F'), ce point π' a dans (F) un homologue π qui est précisément son symétrique par rapport au plan (P), de sorte que le plan (P) a pour pôle le point P de cette figure 2. Ce point π' considéré comme appartenant à (F), et désigné, à ce titre, par π_1 , a pour homologue son symétrique π'_1 par rapport à (P'), et P' est le pôle du plan (P') : ainsi *deux plans homologues ont pour pôles deux points homologues; corrélativement, deux points homologues ont pour plans polaires deux plans homologues.*

Il serait aisé d'adapter au complexe (C₁) toutes les propriétés des complexes linéaires et d'en déduire de nombreuses propriétés de deux figures égales. Bornons-nous à montrer que l'axe de (C₁) est l'axe X du déplacement hélicoïdal permettant de passer de (F) à (F') : en effet tout point a de X est le point médian de deux points A, A' de l'axe, est par suite le pôle du plan perpendiculaire à X et passant par a, de sorte que X, étant le diamètre conjugué, par rapport à (C₁) des plans qui lui sont perpendiculaires, est bien l'axe du complexe.

On obtiendrait cet axe sur la figure 2 en observant qu'il coupe à angle droit la perpendiculaire commune Y aux deux droites conjuguées rectangulaires Δ' et PP', et cherchant directement une telle droite qui puisse servir d'axe à un déplacement hélicoïdal permettant d'amener P en P', en même temps que (P) sur (P').

Complexe (C₂) des droites MM'. — Pour qu'une droite porte deux points homologues des deux figures (F) et (F'), il faut et il

suffit que cette droite, considérée comme appartenant à l'une des figures, rencontre son homologue; les droites MM' forment donc un complexe. Ce complexe est identique au complexe des droites d'intersection de deux plans homologues : soit en effet Δ' une droite portant deux points homologues M et M' ; considérons-la comme faisant partie de la figure (F') , elle a une homologue Δ passant en M et déterminant avec Δ' un plan (P) ; ce plan passant par Δ , son plan homologue (P') passe par Δ' : cette droite MM' est donc aussi l'intersection de deux plans homologues. La proposition corrélatrice se démontre aussi aisément.

Faisons voir que ce complexe coïncide avec le *complexe des droites perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport au complexe* (C_1) . Soient en effet MM' une droite du complexe (C_2) , m le milieu de MM' ; le plan polaire de m par rapport à (C_1) étant perpendiculaire à MM' et contenant la droite conjuguée de MM' , cette droite MM' et sa conjuguée sont bien orthogonales.

Inversement, D et Δ étant deux droites conjuguées supposées rectangulaires, menons par Δ le plan (P) perpendiculaire à D , il a pour pôle le point m où D le coupe; ce point est par suite le point médian de deux points homologues M et M' , symétriques par rapport à (P) , donc appartenant à D , qui est bien ainsi une droite de (C_2) ; il en est de même de Δ .

Courbe du complexe. — Cherchons l'enveloppe des droites du complexe (C_2) contenues dans un plan (P) ; la droite Δ' commune à ce plan et à son homologue (P') , considérée comme appartenant à (F') , a son homologue Δ située dans (P) ; la courbe du complexe n'est autre que l'enveloppe des droites qui joignent les points homologues de Δ et Δ' ; comme ces points forment sur ces droites des divisions égales, la courbe est une parabole Π , et (C_2) est un complexe du second ordre. Si nous nous reportons à la figure 2, nous voyons que Π touche Δ en B , Δ' en A' , a pour tangente au sommet la droite médiane CC' de Δ et Δ' , et pour foyer le pôle P du plan (P) par rapport au complexe (C_1) .

Cône du complexe. — Ce cône est donc du second degré; déterminons-le d'une manière précise pour un point donné P : une première génératrice est la perpendiculaire en ce point à son plan

polaire (P). Les droites du complexe situées dans ce plan et passant par P sont les tangentes menées de ce point à la courbe du complexe, c'est-à-dire les droites isotropes du point, de sorte que (P) donne une direction de sections circulaires du cône.

Les points doubles de la transformation de (F) en (F') étant le point à l'infini, compté deux fois, sur l'axe X du déplacement hélicoïdal, et les points cycliques I, J des plans perpendiculaires à cet axe, le cône du complexe passe par la parallèle PY à X, et par les droites isotropes PI, PJ des plans perpendiculaires à l'axe, qui donnent ainsi les autres sections circulaires du cône.

Finalement, le cône du complexe n'est autre que le *lieu de l'arête d'un dièdre droit dont les faces contiennent respectivement la perpendiculaire au plan (P) menée par P, et le diamètre du complexe (C₁) qui passe par ce point.*

Remarque. — Revenons à la courbe Π du complexe (C₂) située dans un plan (P), parabole ayant pour foyer le pôle P du plan et tangente aux droites Δ et Δ' , symétriques par rapport à son axe; ces deux droites homologues font un même angle avec tout plan (R) perpendiculaire à l'axe X, et les points homologues M, M' de ces droites déterminent sur elles des divisions égales; δ et δ' , m et m' étant les projections sur (R) de Δ et Δ' , M et M', les points m et m' déterminent sur δ et δ' des divisions égales, et comme le dièdre $\widehat{MXM'}$ est de sens et de grandeur invariables, il en est de même de son angle plan $\widehat{mxm'}$, d'où il résulte que mm' enveloppe une parabole, projection de Π , tangente à δ et δ' , ayant pour foyer la trace x de l'axe X sur (R) : ainsi toute parabole Π du complexe (C₂) se projette sur tout plan perpendiculaire à X suivant une parabole dont le foyer est la trace de l'axe sur ce plan.

Cela résultait d'ailleurs aussi du fait que la conique du complexe est tangente aux plans isotropes passant par l'axe du déplacement, plans doubles de la transformation.

En résumé, tout point P de l'espace est le pôle d'un plan (P) par rapport au complexe (C₁) et le foyer d'une parabole Π du complexe (C₂), située dans ce plan, et ayant pour tangente au sommet la trace sur (P) du plan médian (p), des plans homologues (P)

et (P'). Signalons encore que deux points homologues P et P' sont les foyers de deux paraboles du complexe (C_2), paraboles égales, situées dans les plans homologues (P) et (P'), de pôles P et P' par rapport à (C_1), et que ces paraboles touchent la droite commune à leurs plans, respectivement en A' et A , points homologues portés par cette droite (*fig. 2*).

Cubiques attachées au complexe (C_2). — S et S' étant deux points homologues des figures (F) et (F'), MM' une droite de (C_2) passant en (S), cette droite Δ considérée comme appartenant à (F) a pour homologue Δ' la droite $S'M'$; les lieux géométriques de Δ et Δ' sont les cônes (S) et (S') du complexe, cônes ayant SS' pour génératrice commune, de sorte que le lieu de M' est une cubique gauche passant par S et S' ; le lieu de M est la cubique homologue, laquelle passe en S et au point Σ homologue, dans (F), du point Σ' de (F') qui coïncide avec S ; appelons (M) et (M') ces deux cubiques.

(M) par exemple contient aussi les points doubles de la transformation de (F) en (F'); elle a donc pour asymptote l'axe X du déplacement hélicoïdal, et passe aux points cycliques des plans perpendiculaires à cet axe; elle se trouve par suite sur le cylindre de révolution déterminé par l'axe X et par les deux points S' et S ou Σ' .

L'autre cubique (M') appartient de même au cylindre de révolution déterminé par X et par les deux points Σ' ou S et Σ . Comme $S'\Sigma'$ est la position que vient occuper $S\Sigma$ après le déplacement hélicoïdal qui amène (F) en (F'), les deux cylindres sont symétriques par rapport au plan déterminé par l'axe et le point $S\Sigma'$; cela n'a rien d'étonnant puisque ces cylindres projettent, sur un même plan, deux cubiques égales et semblablement placées; d'ailleurs ces cylindres sont amenés à coïncider après le déplacement hélicoïdal, lequel fait coïncider aussi la cubique (M) avec la cubique (M').

On sait que, étant données deux figures homographiques quelconques à trois dimensions, les droites qui portent deux points homologues, les droites communes à deux plans homologues, les droites qui rencontrent leurs homologues forment un même complexe tétraédral qui a pour tétraèdre fondamental le tétraèdre des points doubles de la transformation. Cela est vrai pour deux

figures égales, et le complexe (C_2) est un complexe tétraédral, auquel on appliquerait sans peine les propriétés des complexes tétraédraux.

DÉPLACEMENT CONTINU D'UNE FIGURE.

Si, dans tout ce qui précède, nous supposons les figures (F) et (F') infiniment voisines, nous obtenons des propriétés du déplacement continu d'une figure.

C'est ainsi que les complexes (C_1) et (C_2) deviendront le *complexe des normales* aux trajectoires des points du système mobile pour une position du système, et le *complexe des tangentes aux trajectoires*, qui coïncide avec le *complexe des caractéristiques* des plans du système.

Les propriétés du déplacement sont bien connues (voir *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique*, I, p. 294, par M. d'Ocagne).

Bornons-nous à énoncer le théorème suivant dont la première partie est due à Chasles :

Le lieu des tangentes aux trajectoires des points d'un système indéformable mobile qui, pour une position du système, passent en un point donné S, est un cône du second degré; ce cône contient la parallèle SY à l'axe instantané du déplacement et la tangente en S à la trajectoire de ce point, et peut être obtenu par l'intersection de deux plans rectangulaires tournant respectivement autour de ces droites. Le lieu des points de contact des tangentes est une cubique gauche tangente en S à la trajectoire de ce point, et ayant pour asymptote l'axe instantané; cette cubique se projette sur le plan mené par S perpendiculairement à l'axe suivant un cercle coupant l'axe et tangent en S à la projection de la tangente à la trajectoire de ce point.

Ce théorème est une conséquence immédiate de ce qui a été établi plus haut.

II. — Figures inversement égales.

Ce sont deux figures dont l'une est superposable à la symétrique de l'autre par rapport à un plan ou à un point quelconque de l'espace.

A et A', B et B', C et C' étant trois couples de points homologues de deux telles figures (F) et (F'), les plans axiaux des segments AA', BB', CC' ont un point commun OO', les tétraèdres OABC et O'A'B'C' ayant leurs arêtes respectivement égales, sont directement ou inversement égaux; ils ne peuvent l'être directement, car alors (F) et la figure directement égale définie par les points A', B', C' considérés comme homologues de A, B, C auraient un point double, ce qui n'est pas. Les deux tétraèdres étant donc inversement égaux, OO' est un point double de la transformation de (F) en (F'), et il est évidemment le seul à distance finie.

Ceci posé, considérons la figure (F₁) symétrique de (F) par rapport à ce point OO', les deux figures (F₁) et (F') sont directement égales, et ont deux points homologues confondus en O, de sorte que (F₁) peut être amenée en coïncidence avec (F') par une rotation autour d'un certain axe OX (*fig. 3*).

La transformation de (F) en (F') est appelée *un retournement*. Nous voyons donc qu'*un retournement équivaut à une symétrie par rapport à un certain point OO', suivie d'une rotation autour d'un axe OX passant par ce point*.

Il est d'ailleurs manifeste que la symétrie par rapport au point double peut être remplacée par une symétrie par rapport au plan (R) perpendiculaire en O à OX, l'axe de rotation restant le même, mais l'angle de rotation étant augmenté de π .

On déduit immédiatement de là ce *théorème de Chasles* : *Tous les segments tels que MM' ont leurs milieux m dans le plan (R). Om est la perpendiculaire commune à MM' et à OX; ainsi la perpendiculaire commune à OX et à toute droite MM' est située dans le plan (R).*

Observons encore que *l'angle dièdre $\widehat{MXM'}$ est le même*, en grandeur et en sens, *pour tous les groupes de points homologues*, étant l'angle dont il faut faire tourner (F₁) pour l'amener en (F').

Conséquence. — Considérons deux plans homologues (P) et (P') de deux figures directement égales (F) et (F') : les intersections respectives (*f*) et (*f'*) de ces figures et de ces plans sont des figures égales qui peuvent être regardées comme appartenant

à deux figures *inversement* égales à trois dimensions, par exemple (F) et la symétrique (F') de (F) par rapport à (P'); et alors, en vertu du théorème de Chasles, on peut dire que les milieux des segments MM' joignant les points respectivement homologues des plans homologues (P) et (P') sont dans un même plan; c'est ce plan que nous avons appelé le *plan médian* des deux plans (P) et (P') dans l'étude des figures directement égales.

Éléments doubles. — Revenons à deux figures inversement égales; nous avons deux points doubles sur OX, le point OO' trouvé plus haut, et le point à l'infini sur cet axe, puisque les points homologues des deux figures qui appartiennent à cette droite forment deux divisions symétriques par rapport à OO'. Les deux autres points doubles de la transformation sont les points cycliques des plans perpendiculaires à OX.

Les plans doubles sont le plan (R) obtenu plus haut, le plan de l'infini, et les plans isotropes passant par OX.

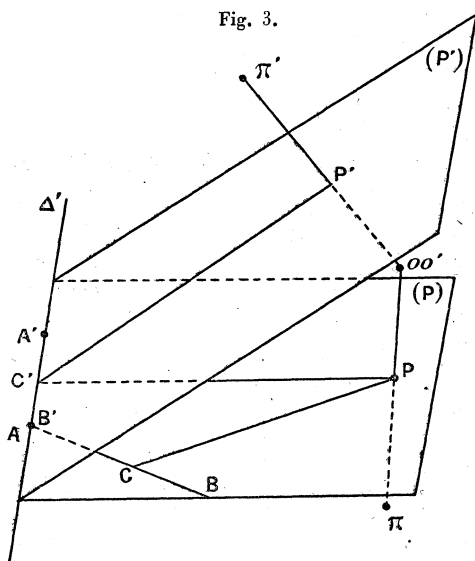
COMPLEXE ATTACHÉ A DEUX FIGURES INVERSEMENT ÉGALES.

Il n'y a pas lieu de considérer ici les éléments médians relatifs aux éléments homologues des figures, ces éléments médians appartenant au plan double (R) d'après le théorème de Chasles. Il n'existe donc pas, pour deux figures inversement égales, de complexe linéaire analogue au complexe (C₁) de deux figures directement égales.

Complexe des droites MM'. — Mais les droites qui portent deux points homologues et les droites communes à deux plans homologues forment encore, comme pour deux figures homographiques, un même complexe tétraédral (C₂).

Courbe du complexe. — La courbe du complexe située dans un plan quelconque (P) est une conique tangente aux traces des plans doubles sur ce plan, donc une parabole II tangente à l'intersection *r* de (P) et du plan double (R); cette parabole, étant aussi tangente aux plans isotropes passant par l'axe OX, se projette sur le plan (R) suivant une parabole de foyer O et tangente à *r*.

Nous pouvons reprendre en la modifiant légèrement la figure 2 faite plus haut : (P) étant le plan considéré, (P') son homologue, Δ' leur droite commune, Δ son homologue, A le point commun à ces droites, A' son homologue, B' le point A considéré comme appartenant à (F') , B son homologue, C et C' les points homologues milieux de AB et $A'B'$, la courbe du complexe du plan (P) est la parabole Π enveloppe des droites joignant les points homologues de Δ et Δ' ; cette parabole touche Δ en B et Δ' en A' , A est



sur son axe, son foyer P est commun aux axes de symétrie de AB et $A'B'$; C et C' étant les milieux de AA' et BB' , la droite qui joint ces deux points n'est autre que la trace r de (P) sur (R) ; cette droite est, comme on voit, la *tangente au sommet* de Π , et par suite aussi de la projection de cette parabole sur le plan double (R) . (P') étant le plan homologue de (P) , la parabole Π' de ce plan sera égale à Π et placée par rapport à $A'B'$ comme Π par rapport à AB , de sorte que le foyer de Π' sera le point P' homologue du foyer P de Π ; le plan double est le plan $(pC'C)$, p milieu de PP' . Si π et π' sont les symétriques, par rapport à (P) et (P') , du point O projeté en P et P' sur ces plans, les tétraèdres πPAB et $\pi' P'A'B'$ sont inversement égaux, π et π' sont homologues; il s'ensuit que

le point O , qui est symétrique de π par rapport à P et de π' par rapport à P' , est à lui-même son homologue, n'est autre que le point double OO' des deux figures. Finalement, nous obtenons pour la courbe du complexe située dans un plan (P) la *parabole qui a pour foyer la projection du point double sur ce plan et pour tangente au sommet la droite commune au plan (P) et au plan double (R)* .

Cône du complexe. — Ce cône est du second degré; si S est son sommet, il est déterminé par SS' et par les droites joignant S aux points doubles de la transformation : droite SO , parallèle SY à l'axe OX , et droites isotropes passant par S dans le plan perpendiculaire à SY . Par suite, les plans perpendiculaires à l'axe donnent des sections circulaires de ce cône. Le plan perpendiculaire en S à SO a pour courbe du complexe une parabole de foyer S , de sorte que les génératrices du cône appartenant à ce plan sont isotropes, et que les plans perpendiculaires à SO donnent la deuxième direction de sections circulaires du cône. Finalement, *le cône du complexe relatif à un point S est le lieu de l'arête d'un dièdre droit dont les faces contiennent respectivement SO et la parallèle SY à l'axe OX* ; sa trace sur le plan (R) est le cercle déterminé par le point O , par la trace de SS' et par la projection de S sur ce plan double.

III. — Figures directement semblables.

On donne ce nom à deux figures dont l'une est égale à une figure directement homothétique de l'autre; de même deux figures sont inversement semblables quand l'une est égale à une figure inversement homothétique de l'autre.

Les positions de deux telles figures dans l'espace sont déterminées dès que l'on connaît trois points A, B, C non en ligne droite de l'une d'elles en même temps que leurs homologues A', B', C' dans l'autre, ce qui exige que les triangles ABC et $A'B'C'$ soient semblables.

La sphère (a) lieu des points dont le rapport des distances à A et A' est égal au rapport de similitude $\frac{AB}{A'B'}$ des deux triangles et

les deux sphères analogues (*b*) et (*c*) ont deux points communs (OO') et ($\omega\omega'$); chacun de ces points détermine avec les deux groupes de trois points donnés deux tétraèdres semblables; cette similitude ne peut être de même nature pour les deux points, car deux figures semblables ne peuvent avoir deux points doubles; par conséquent, les tétraèdres $OABC$ et $O'A'B'C'$ par exemple sont directement semblables, ωABC et $\omega'A'B'C'$ inversement semblables; OO' est un point double, et le seul, pour les figures directement semblables (F) et (F') définies par les deux groupes de trois points considérés.

On peut montrer comme il suit que les deux points OO' et $\omega\omega'$ sont réels : (F) et (F') étant directement semblables, à l'aide d'une homothétie convenable, avec un centre quelconque, on peut déduire de (F) une figure (F_1) directement égale à (F'), figure qu'on peut amener en F' par un déplacement hélicoïdal d'axe X ; de là résulte que tout plan (P) de (F) perpendiculaire à cet axe a un plan homologue (P') qui lui est parallèle; les cercles de (P) ont pour homologues des cercles de (P'), de sorte que les points cycliques de ces plans sont des points doubles de la transformation; le point à l'infini sur X est un autre point double, qui est réel; par conséquent le quatrième point double doit être réel, et les trois sphères considérées plus haut se coupent bien en des points réels.

Ceci posé, et OO' étant le point double à distance finie de (F) et (F'), k le rapport de similitude de (F') à (F), de sorte que

$$\frac{O'M'}{OM} = k,$$

M et M' désignant deux points homologues, construisons la figure (F_1) directement homothétique de (F) par rapport à OO' dans le rapport k ; les figures (F_1) et (F') sont directement égales et ont un point double, et l'on peut passer de la première à la seconde par une rotation autour d'un axe OX passant par ce point.

Ainsi, on peut passer de (F) à (F'), par une homothétie directe par rapport à un certain point O , suivie d'une rotation autour d'un axe contenant ce point; ces deux transformations partielles sont d'ailleurs permutable.

Éléments doubles. — Les points doubles sont le point OO' , le point à l'infini sur l'axe X , et les points cycliques communs aux plans perpendiculaires à X .

Les plans doubles sont le plan (R) perpendiculaire en O à X , le plan de l'infini, et les plans cycliques passant par X . Deux points homologues M et M' des deux figures étant tous deux du même côté, par rapport au plan double (R) , que leur homologue commun M_1 dans (F_1) , sont eux-mêmes *du même côté de ce plan*.

Si m est la trace de MM' sur (R) , on peut écrire

$$\frac{\overline{mM'}}{\overline{mM}} = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = k,$$

donc *la trace du plan OMM' sur le plan (R) est la bissectrice de l'angle extérieur en O du triangle OMM' , et (R) contient les points tels que m des droites MM' déterminées par $\frac{\overline{mM'}}{\overline{mM}} = k$; c'est une généralisation du théorème de Chasles vu plus haut.*

Les dièdres $\widehat{MXM'}$ sont égaux et de même sens, leur valeur commune étant l'angle dont il faut faire tourner (F_1) autour de X pour amener cette figure en coïncidence avec (F') .

Les dièdres formés par deux plans homologues (P) et (P') avec le plan double (R) , étant homologues, sont égaux; autrement dit *deux plans homologues sont également inclinés sur le plan double*. Il en est de même de deux droites homologues.

COMPLEXE DES DROITES MM' .

Comme pour deux figures homographiques quelconques, les droites qui portent deux points homologues, ou qui appartiennent à deux plans homologues, ou qui coupent leurs droites homologues, forment un complexe tétraédral dont le tétraèdre fondamental est le tétraèdre des points doubles.

Courbe du complexe. — Elle est de seconde classe, c'est la parabole tangente à l'intersection du plan donné (P) et de son homologue, à la trace de (P) sur le plan double, et aux intersections de ce même plan (P) avec les plans isotropes passant par

l'axe X. Cette parabole se projette sur le plan (R) suivant une parabole de foyer O.

Cône du complexe. — Le cône de sommet S est du second degré, et déterminé par SS' et par les droites joignant S aux points doubles de la transformation : droite SO, parallèle SY à l'axe OX, et droites isotropes passant par S dans le plan perpendiculaire à SY. Les plans perpendiculaires à SY donnent donc des sections circulaires du cône, qui se trouve ainsi défini par son sommet et le cercle du plan (R) qui passe par O, par la projection de S sur (R), et par la trace de SS' sur ce même plan.

VARIATION CONTINUE DE GRANDEUR D'UNE FIGURE DE FORME INVARIABLE.

On peut concevoir qu'une figure à trois dimensions varie en grandeur d'une façon continue en restant directement semblable à elle-même, ses divers points décrivant des trajectoires; on a ainsi une sorte de généralisation du déplacement continu d'une figure. En prenant deux positions infiniment voisines de la figure, et appliquant ce qui a été dit plus haut, on est conduit à considérer le complexe des tangentes aux trajectoires pour une position déterminée de la figure, lequel coïncide avec le complexe des caractéristiques des plans de la figure : c'est encore un complexe du second ordre.

Comme pour une figure mobile de grandeur invariable, *le lieu des points dont les tangentes aux trajectoires, pour une position de la figure, passent par un point donné S, est une cubique gauche circulaire, et le lieu de ces tangentes est encore un cône orthogonal.*

IV. — Figures inversement semblables.

Il résulte de ce qui a été dit plus haut que deux telles figures admettent un point double à distance finie et un seul.

En raisonnant comme pour deux figures directement semblables, nous verrions qu'on peut passer d'une figure (F) à une figure (F') qui lui est inversement semblable par une homothétie inverse par rapport à un certain point O, suivie d'une rotation autour

d'un axe X contenant ce point; ces deux transformations partielles sont permutables.

Éléments doubles. — Les éléments doubles sont les mêmes que dans le cas de deux figures directement semblables. Mais ici deux points homologues M et M' sont *de part et d'autre du plan double* (R).

On démontrera aisément les propriétés suivantes : *la trace du plan OMM' sur le plan double (R) est la bissectrice de l'angle MOM'*; *le plan double (R) contient les points m des droites MM' déterminés par $\frac{mM'}{mM} = -k$* , en appelant *k* le rapport de similitude de (F') à (F); c'est l'extension aux figures inversement semblables du *théorème de Chasles* obtenu plus haut pour les figures inversement égales.

Corollaire. — Considérons deux figures planes semblables (*f*) et (*f'*) situées dans deux plans (P) et (P'); si nous les regardons comme appartenant à deux figures à trois dimensions (F), (F') directement semblables, puis comme appartenant à deux figures à trois dimensions inversement semblables, par exemple (F) et la symétrique (F₁) de (F') par rapport au plan (P') et si nous appliquons le théorème de Chasles généralisé, nous pouvons dire que, *étant données deux figures planes semblables (f) et (f''), si sur chaque droite MM' joignant deux points homologues, on prend les points m et m' déterminés par $\frac{mM'}{mM} = k$, et $\frac{m'M'}{m'M} = -k$* , en désignant par *k* le rapport de similitude de (f') à (f), les points *m* appartiennent à un même plan, ainsi que les points *m'*.

On pourrait être tenté de croire que les figures (*m*) et (*m'*) formées par l'ensemble des points *m* et l'ensemble des points *m'* sont semblables aux figures données : cela est vrai pour des figures directement semblables situées dans un même plan, mais non pour des figures inversement semblables d'un même plan, car alors (*m*) et (*m'*) sont deux droites, quelles que soient les figures primitives.

A plus forte raison, le théorème n'est pas vrai pour deux figures

non en même plan; sinon, en amenant à coïncider les deux plans de manière que les figures deviennent inversement semblables, la propriété serait encore vraie à la limite pour deux telles figures, ce qui n'est pas.

Complexe des droites MM'. — Les droites qui portent deux points homologues de deux figures inversement semblables et les droites communes à deux plans homologues constituent encore un complexe tétraédral auquel s'applique tout ce qui a été dit dans le cas des figures directement semblables, relativement à la courbe et au cône du complexe.

Signalons cette différence entre deux figures à trois dimensions directement ou inversement semblables : deux telles figures sont déterminées si l'on se donne le plan double, le point double de ce plan, et deux points homologues M et M' , *du même côté du plan double ou de part et d'autre*, suivant que la similitude est directe ou inverse.

Remarque générale. — Dans les divers modes de transformation étudiés ci-dessus, un plan, les cercles de ce plan et sa droite de l'infini ont pour homologues un plan, les cercles de ce plan et sa droite de l'infini; par conséquent, *le cercle de l'infini se transforme en lui-même*. On démontre que ce sont les seuls modes de transformation qui conservent le cercle de l'infini (*Leçons de Cinématique*, Kœnigs, p. 334).

On a remarqué les propriétés communes aux quatre transformations. Signalons en particulier la suivante : *les droites joignant les points homologues de deux droites homologues sont les génératrices d'une même famille d'un paraboloid hyperbolique*; dans le cas particulier où ces droites homologues se coupent, les droites MM' joignant deux points homologues enveloppent la parabole du complexe des droites MM' de ce plan.

Dans le cas de deux figures directement égales infiniment voisines, on a ce théorème : *Les tangentes aux trajectoires des points d'une droite Δ de la figure mobile, pour une position de cette figure, la droite n'appartenant pas au complexe des tangentes, sont les génératrices d'un même système d'un paraboloid.*

Si la droite appartient au complexe des tangentes, les tangentes aux trajectoires de ses points sont dans un même plan, et enveloppent la courbe du complexe située dans ce plan, laquelle est la parabole ayant la droite pour tangente au sommet, et pour foyer le pôle du plan par rapport au complexe des normales, c'est-à-dire le point du plan qui, pour la position considérée de la figure mobile, se déplace normalement au plan.

N. B. — On pourra lire une étude élémentaire analogue à la précédente, et relative aux figures planes, dans la *Revue de l'enseignement des sciences* (année 1919, librairie Alcan).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1926.

Composition de Géométrie analytique.

PREMIÈRE QUESTION.

Deux points P et P' décrivent une ellipse (E) , de foyer F , et qui, rapportée à ses axes, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La somme des distances $FP + FP'$ est constante :

$$FP + FP' = k.$$

1° Montrer que le milieu M du segment PP' décrit une droite d'équation $x = h$. Relation entre k et h .

2° Trouver l'enveloppe (G) de la droite PP' .

3° Trouver les tangentes communes à (E) et à (G) , ainsi que les points d'intersection de ces deux courbes.

4° Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes menées à (E) aux points P et P' (1).

(1) Prière de faire la figure.

SOLUTION PAR M. PH. DU PLESSIS.

1° Si F est le foyer d'abscisse c , on a, comme il est bien connu,

$$FP = a - \frac{cx}{a}, \quad FP' = a - \frac{cx'}{a},$$

d'où, en faisant la somme, et si h est l'abscisse du milieu M de PP',

$$k = 2a - \frac{2ch}{a}.$$

Le point M décrit donc la perpendiculaire à l'axe focal AA', menée par le point H d'abscisse

$$(1) \quad h = \frac{a(2a - k)}{2c}.$$

Lorsque les points P et P' viennent se confondre avec l'un des points C de rencontre de cette droite avec l'ellipse (E), on a

$$k = 2FC,$$

ce qui montre que la solution n'est réelle que si

$$2(a - c) \leq k \leq 2(a + c).$$

2° Transformons la figure par dilatation des ordonnées dans le rapport $\frac{a}{b}$.

A l'ellipse (E) correspond le cercle (E₁) de diamètre AA', aux points P et P' de (E) les points P₁ et P'₁ de (E₁), et le milieu M₁ de P₁P'₁ décrit aussi la droite HC. Comme OM₁ est perpendiculaire à P₁P'₁, l'enveloppe de cette droite est la parabole (G₁) de foyer O et de sommet H, dont l'équation est

$$(2) \quad y^2 + 4h(x - h) = 0.$$

L'enveloppe (G) de PP' est donc la parabole obtenue en réduisant les ordonnées de la première dans le rapport $\frac{b}{a}$; son équation est

$$(3) \quad a^2y^2 + 4b^2h(x - h) = 0.$$

Son sommet est H et son paramètre $\frac{2b^2h}{a^2}$.

3° Lorsque les points P_1 et P'_1 se confondent en C_1 , point de rencontre de HC et du cercle (G_1) , la droite $P_1 P'_1$ se confond avec la tangente en C_1 à ce cercle. Cette tangente, avec sa symétrique par rapport à AA' , constitue donc un premier couple de tangentes communes à (G_1) et à (E_1) . Pour avoir le second, il suffit de remarquer que les droites isotropes issues de O sont tangentes à la fois au cercle (E_1) de centre O et à la parabole (G_1) de foyer O . Ce sont d'ailleurs les asymptotes de ce cercle.

Donc les tangentes communes à la parabole (G) et à l'ellipse (E) sont : 1° les tangentes à cette ellipse en ses points de rencontre C et C' avec la droite HM ; 2° les asymptotes de l'ellipse, d'équations

$$ay = \pm bx\sqrt{-1}.$$

Quant aux points communs à (G) et à (E) , ils auront mêmes abscisses que les points communs à (G_1) d'équation (2) et au cercle (E_1) d'équation

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

L'élimination de y^2 entre ces équations donne immédiatement

$$(4) \quad x^2 - 4hy + 4h^2 - a^2 = 0$$

ou

$$(x - 2h)^2 = a^2,$$

c'est-à-dire

$$x = 2h \pm a.$$

D'ailleurs la substitution de a et de $-a$ dans le premier membre de (4) donnant $-4h(a-h)$ et $4h(a+h)$ qui sont de signes contraires, une seule de ces racines est comprise entre $-a$ et a et il n'y a que deux points communs réels.

4° Le pôle Q_1 de $P_1 P'_1$ par rapport au cercle (E_1) est situé sur OM_1 et tel que

$$OM_1 \cdot OQ_1 = a^2.$$

Le lieu de ce pôle est donc le cercle inverse de la droite HC_1 par rapport au cercle (E_1) , c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle $OC_1 T$, si T est le point de OA où se coupent les tangentes en C et en C_1 à (E) et à (E_1) . L'équation de ce cercle est

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{h}x = 0.$$

Le lieu du pôle Q de PP' par rapport à l'ellipse (E) est dès lors l'ellipse, semblable à (E), qui a pour axe OT et passe par C. Son équation est

$$x^2 + \frac{a^2 y^2}{b^2} - \frac{a^2 x}{h} = 0$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x}{h} = 0.$$

DEUXIÈME QUESTION.

Un triangle rectangle AOB a pour hypoténuse un rayon variable OB d'un cercle de centre O et pour sommet de l'angle droit un point A variable sur une droite fixe qui rencontre le cercle aux points D et D', H étant le milieu de DD', on désigne par α l'angle \widehat{HOA} et par β l'angle \widehat{HOB} .

1° Relation entre α et β .

2° Déterminer le maximum de l'angle β , ainsi que la valeur de α pour laquelle il y a maximum.

3° Déterminer la position de DD' de telle manière que, lorsque β est maximum, A se trouve au milieu du segment HD. Calculer dans ce cas la valeur numérique de $\cos \beta$ (1).

SOLUTION PAR M. PH. DU PLESSIS.

1° Il suffit d'évaluer OA dans les triangles OAB et OAH pour avoir immédiatement, en posant $OB = r$, $OH = h$,

$$r \cos(\beta - \alpha) = \frac{h}{\cos \alpha}$$

ou

$$\cos \alpha \cos(\beta - \alpha) = \frac{h}{r},$$

qu'on peut écrire

$$\cos \beta + \cos(\beta - 2\alpha) = \frac{2h}{r}.$$

2° Le maximum de β aura lieu lorsque la dérivée partielle du

(1) Prière de faire la figure.

premier membre par rapport à α sera nulle, c'est-à-dire pour

$$\sin(\beta - 2\alpha) = 0$$

ou

$$\beta = 2\alpha.$$

Ce résultat peut d'ailleurs s'obtenir immédiatement par la géométrie. En effet, le point A se trouvant sur le cercle de diamètre OB, le maximum de β aura lieu quand ce cercle sera tangent à la droite DD'. Mais ce cercle passant par le pied I de la perpendiculaire abaissée de B sur OH, et le point de contact A étant alors le milieu de l'arc IB, on a

$$\beta = 2\alpha.$$

L'égalité des angles faits par OH et OB avec la perpendiculaire OA à AB entraîne la conséquence que AB coupe OH à une distance de O égale à OB. Donc, AB passe par l'extrémité C du rayon formé par OH prolongé. Le point A se trouvant, dès lors, sur le cercle de diamètre OC s'obtient par la rencontre de ce cercle et de la droite DD'; puis, le point B par la rencontre de la droite CA avec le cercle donné.

Dans ces conditions,

$$OI = OC - 2HC = r - 2(r - h) = 2h - r,$$

et la valeur correspondante de β est donnée par

$$\cos \beta = \frac{2h - r}{r}.$$

3° Si le point A se trouve au milieu de AD, BD est parallèle et égal à HC puisque A est la projection du milieu de OB sur HD; les points I et H sont symétriques par rapport à O, et l'on a

$$IO = OH = \frac{HC}{2}$$

ou $IO = \frac{OC}{3}$; par suite, $\cos \beta = -\frac{1}{3}$.

CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1926

Mathématiques élémentaires.

(DEUXIÈME QUESTION.)

On donne, dans un plan, trois points O , A , ω . Après une rotation d'angle α et de centre ω , les points O et A prennent respectivement les positions O_α et A_α .

La droite AA_α coupe la circonférence de centre O_α et qui passe en A_α aux points A_α et M_α .

- 1° Étudier comment varie, avec α , le vecteur $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$.
- 2° Déterminer l'amplitude et le centre de la rotation qui permet, en général, de faire coïncider les vecteurs \overrightarrow{OA} et $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$. Lieu du centre de cette rotation quand α varie.

3° Montrer que la perpendiculaire menée de O_α à AA_α passe par un point fixe I . Lieu de ce point I quand, O et A restant fixes, ω décrit une circonférence donnée, passant par A , ou une circonférence donnée dont le centre est le milieu de AO .

4° Les points O et A étant donnés, ainsi qu'une droite D , construire les points ω et I sachant qu'ils sont sur la droite D . Discuter.

SOLUTION PAR M. O.

1° De ce que $O_\alpha M_\alpha = O_\alpha A_\alpha = OA$, résulte que le vecteur $O_\alpha M_\alpha$ conserve la même grandeur.

Si l'on appelle \hat{O} , \hat{A} , $\hat{\omega}$ les angles du triangle $OA\omega$, on a $\widehat{O_\alpha A_\alpha \omega} = \hat{A}$. Mais, dans le triangle isocèle ωAA_α , $\widehat{AA_\alpha \omega} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Donc $\widehat{O_\alpha A_\alpha A} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \hat{A}$. Par suite, dans le triangle isocèle $O_\alpha A_\alpha M_\alpha$, $\widehat{A_\alpha O_\alpha M_\alpha} = \alpha + 2\hat{A}$ et, en désignant par P et N les points où $O_\alpha A_\alpha$ et $O_\alpha M_\alpha$ rencontrent la droite OA , $\widehat{PO_\alpha N} = \pi - \alpha - 2\hat{A}$; et, comme $\widehat{NPO_\alpha} = \alpha$, il vient

$$\widehat{ONM_\alpha} = \pi - 2\hat{A}.$$

Ainsi, l'angle du vecteur $O_\alpha M_\alpha$ avec la direction fixe OA est constant; donc, *la direction de ce vecteur, de même que sa grandeur, est invariable.*

2° On amène le vecteur OA à coïncider avec $O_\alpha M_\alpha$ par deux rotations, l'une d'amplitude α autour de ω qui amène OA en $O_\alpha A_\alpha$, l'autre d'amplitude $-(\alpha + 2\hat{A})$ autour de O_α . D'après la règle connue de la composition des rotations, ces deux rotations peuvent être remplacées par une seule d'amplitude égale à la somme algébrique de leurs amplitudes, c'est-à-dire à $-2\hat{A}$ autour d'un centre C . Ce centre C se trouve d'abord sur la bissectrice de l'angle $O\omega O_\alpha$. De plus, puisque l'angle OCO_α doit être égal à $2\hat{A}$, l'angle $O\omega C$ est égal à \hat{A} , et, par suite, *le centre C doit se trouver sur le cercle circonscrit au triangle $OA\omega$, qui constitue le lieu de ce centre C lorsque α varie.*

3° La droite $O_\alpha H$ perpendiculaire à $A_\alpha M_\alpha$ coupant ωC en J , on a

$$\begin{aligned} \widehat{IO_\alpha\omega} &= \pi - (\widehat{\omega O_\alpha A_\alpha} + \widehat{HO_\alpha A_\alpha}) = \pi - (\hat{O} + \frac{\alpha}{2} + \hat{A}) \\ &= \pi - (\frac{\alpha}{2} + \pi - \hat{\omega}) = \hat{\omega} - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\widehat{IJ\omega} = \widehat{IO_\alpha\omega} + \widehat{J\omega O_\alpha} = \hat{\omega} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \hat{\omega},$$

et

$$\widehat{\omega JO} = \pi - \hat{\omega}.$$

Donc, le lieu de J est un cercle passant par O et ω , et, puisque $\widehat{IJ\omega}$ est aussi constant, *IJ coupe ce cercle en un point I fixe.*

Mais, si $\alpha = 0$, O_α vient en O , A_α en A , et $O_\alpha H$ se confond avec la perpendiculaire menée par O à la tangente en A au cercle de centre ω , ou, ce qui revient au même, avec la parallèle à ωA menée par O . Donc, l'angle $IO\omega$ est égal à $\hat{\omega}$, et le triangle $O\omega I$ est isocèle.

Ainsi, *le point I est le symétrique de O par rapport au pied K de la perpendiculaire abaissée de ω sur la parallèle à ωA menée par O .*

Si, O et A étant fixes, le point ω décrit un cercle passant par A, la perpendiculaire ωK à $A\omega$ passe par le point B, diamétralement opposé à A dans ce cercle. Dès lors, le point K décrit le cercle décrit sur OB comme diamètre, et le lieu du point I est le cercle de centre B passant par O.

De plus, la perpendiculaire élevée à ωK en son milieu passant par le milieu de OA, ce dernier point est à égale distance de ω et K. Si donc ω décrit un cercle autour de ce point, le point I décrit le même cercle, et le point I un cercle homothétique de celui précédent par rapport à O, avec le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$, ce cercle qui a son centre en A.

4° Abaissons de O sur $A\omega$ la perpendiculaire OL. On a

$$\omega L = KO = IK.$$

Le point L se trouve donc sur la droite D' menée parallèlement à la droite D sur laquelle se trouvent I et ω , c'est-à-dire sur la droite homothétique de D par rapport à O, avec le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$.

Si la droite D est donnée, il en est de même de D' sur laquelle doit se trouver L; mais, de plus, l'angle OLA étant droit, le point L est sur le cercle décrit sur OA comme diamètre. Le point L est donc donné par la rencontre de ce cercle et de la droite D'; la droite AL donne ensuite le point ω sur D, et la parallèle à AL menée par O, le point I.

Suivant que la droite D' et le cercle de diamètre OA ont en commun deux points réels ou imaginaires, il y a, ou non, deux solutions réelles qui se réduisent à une lorsque la droite D' est tangente à ce cercle.

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère 2 tiges rectilignes rigides homogènes pesantes OP et OQ, de même longueur l et de même masse m, dont l'extrémité commune O est fixe. Le point P décrit un cercle hori-

3° *Étal* γ de centre O (on admettra que OQ est imperceptiblement plus court que OP pour éviter tout choc de OQ et de γ). En outre, par une liaison (λ), les extrémités P et Q sont maintenues à une distance constante $l\sqrt{2}$ l'une de l'autre. On néglige le frottement.

Décrire les aspects divers du mouvement en supposant que la liaison (λ) soit bilatérale. On prendra pour origine le point O, pour OX, OY deux rayons rectangulaires du cercle γ , pour axe OZ la verticale descendante de O. On posera $\widehat{OX, OP} = \psi$ et

$$\vec{OQ} = i l \cos \omega \sin \theta + j l \sin \omega \sin \theta + k l \cos \theta,$$

où i, j, k les vecteurs unitaires de OX, OY, OZ et ω un angle quelconque exprimé simplement en fonction de ψ lorsque la liaison (λ) est réalisée.

On considère une position initiale du système respectant la liaison correspondant aux valeurs $\psi = 0$ et $\theta = \theta_0$. On imprime au système, dans cette position, des vitesses initiales compatibles avec (λ) correspondant aux valeurs ψ'_0, θ'_0 des dérivées de ψ et θ , par rapport à t . En supposant que la liaison (λ) soit réalisée par un fil flexible, inextensible et sans masse, trouver la condition pour que ce fil demeure tendu, au moins au début du mouvement.

3° Dans le cas où l'inégalité obtenue n'est pas vérifiée, quel sera le mouvement pris au début par le système? Quel sera le sens initial de variation de la distance PQ?

4° On considère un mouvement dans lequel le fil n'est pas initialement tendu, mais tel que la distance PQ ayant atteint en croissant la valeur $l\sqrt{2}$, le fil se tende brusquement. Déterminer en général l'état des vitesses du système qui succède à cette tension. Approfondir le cas où $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, et où l'on donne à ω'_0 une valeur telle que le mouvement de OQ antérieur au choc soit une rotation uniforme autour de OZ, à ψ'_0 une valeur telle que le moment cinétique du système par rapport à OZ soit nul.

SOLUTION. — Si (λ) n'est pas réalisée, on obtient la force vive

$$2T = \frac{ml^2}{3} (\psi'^2 + \theta'^2 + \omega'^2 \sin^2 \theta);$$

si (λ) est réalisée, on peut poser $\omega = \psi + \frac{\pi}{2}$ et l'on a

$$2T = \frac{ml^2}{3} [\psi'^2 (1 + \sin^2 \theta) + \theta'^2].$$

La fonction de forces est $U = mg \frac{l}{2} \cos \theta$.

1° On a les intégrales premières

$$\psi'^2(1 + \sin^2 \theta) + \theta'^2 = \frac{3g}{l} \cos \theta + h,$$

$$\psi'(1 + \sin^2 \theta) = K,$$

d'où

$$\theta'^2 = h + \frac{3g}{l} \cos \theta - \frac{K^2}{1 + \sin^2 \theta}.$$

La discussion conduit à trois aspects principaux du mouvement suivant que θ est une fonction monotone du temps ou oscille, soit symétriquement par rapport à $\theta = 0$, soit entre deux valeurs θ_1 et θ_2 de même signe; sans détriment des cas limites.

2° On pourra désigner par τ la tension du fil, et écrire que OP se meut dans le plan horizontal sous l'action de cette force. En appliquant le moment cinétique par rapport à OZ, on obtiendra aisément la valeur de τ . Tant que cette valeur demeurera positive, le fil restera tendu. On trouve qu'initialement, le signe de cette tension est celui de $-\theta'_0 \psi'_0 \cos \theta_0$.

3° Si (λ) n'est pas réalisée, OP est animé d'un mouvement de rotation uniforme, le mouvement de OQ est celui du pendule sphérique. L'inégalité du 2° n'étant pas satisfaite, PQ est initialement décroissant.

4° En appliquant l'équation générale de la théorie des percussions, on trouve aisément

$$\psi'_1 = \frac{\psi'_0 + \omega'_0 \sin' \theta}{1 + \sin' \theta}, \quad \theta'_1 = \theta'_0.$$

Dans le cas particulier demandé, les vitesses finales sont nulles.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soient trois axes rectangulaires fixes $O_1 x_1 y_1 z_1$. Une sphère de centre O et de rayon R, à laquelle sont liés trois axes rectangulaires $Oxyz$, de même disposition que les précédents, est astreinte à rouler sans glisser le long de $O_1 z_1$: 1° écrire les équations différentielles, entre les coordonnées cylindriques R, ω , ζ du centre O de la sphère et les angles d'Euler ψ , θ , φ , qui traduisent le non-glissement; 2° on étudie le cas particulier où Ox reste parallèle au plan $O_1 x_1 y_1$. Trouver alors la trajectoire (λ) décrite sur la sphère par la molécule au contact. Montrer que chaque point invariablement lié à la sphère décrit une surface. Déterminer cette surface :

- a. Pour un point de la ligne (λ) ;
- b. Pour un point quelconque de la sphère.

SOLUTION. — En écrivant que la vitesse de la molécule au contact est

nulle, on trouve les conditions cherchées

$$d\omega = d\varphi \cos \theta + d\psi,$$

$$\frac{d\kappa}{R} = d\varphi \sin \theta \cos(\psi - \omega) - d\theta \sin(\psi - \omega),$$

si $\varphi = 0$, $\psi - \omega$ conserve une valeur constante. On en déduit que la trajectoire de la molécule au contact sur la sphère est un cercle (ce qu'on pourra aussi établir géométriquement en traduisant la condition qu'un diamètre Ox invariablement lié à la sphère reste orthogonal à la droite O_1z_1 au contact de laquelle la sphère roule sans glissement).

La surface a est une surface de révolution engendrée par la rotation autour de O_1z_1 d'une cycloïde dont la base est O_1z_1 . La surface b est engendrée par la rotation autour de O_1z_1 d'une cycloïde allongée ou raccourcie contenue dans un plan parallèle à O_1z_1 .

(Poitiers, juin 1926.)

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$(E) \quad 4pqxy - z^2 = 0,$$

montrer qu'il existe ∞^1 surfaces intégrales de (E) qui sont des cônes (C) de sommet O.

2° *Trouver l'équation générale des surfaces (S) qui coupent partout à angle droit les cônes (C).*

3° *Montrer que parmi les surfaces (S) il en est ∞^1 qui sont de révolution autour de Oz ; soient (Σ) ces dernières surfaces.*

4° *Trouver les surfaces qui coupent partout à angle droit les surfaces (C) et (Σ).*

5° *Trouver une intégrale complète de (E), et en déduire l'équation générale des caractéristiques.*

II. *On considère les surfaces (\mathcal{S}) dont l'élément linéaire a la forme*

$$ds^2 = U(u) (du^2 + dv^2).$$

1° *Par un changement de variables $u_0 = \varphi(u)$, ramener le ds^2 à la forme géodésique polaire.*

2° *Déduire de là la courbure totale de la surface (qu'on exprimera au moyen de $U, \frac{dU}{du}, \frac{d^2U}{du^2}$).*

- 3° Choisir U pour que (S) soit à courbure totale constante.
 4° Déterminer les géodésiques de (S) dans le cas où $U \equiv u$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. 1° $\frac{z^2}{xy} = a$ [par $px + qy = z$ ou par $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$].

2° $F(2x^2 + z^2, 2y^2 + z^2) = \text{const.}$

3° $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}$

4° $\frac{2x^2 + z^2}{2y^2 + z^2} = \text{const.}$ (ou, si l'on veut, $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const.}$).

5° $z = Ax^{\frac{a}{2}}y^{\frac{1}{2}a}$ (par séparation des variables).

Si l'on veut intégrer le système différentiel caractéristique de (E), on partira de l'intégrale première $\frac{px}{qy} = a^2$. On pourra faire aussi la transformation

$$x = e^X, \quad y = e^Y, \quad z = e^Z.$$

II. 1° $du_1 = \sqrt{U} du$.

2° $K = -\frac{U'}{2U} + \frac{U''}{2U^3}$.

3° $U = \frac{c}{4K \operatorname{ch}^2 \frac{u' \sqrt{C}}{2}}$ ou $U = \frac{+C}{4K \cos^2 \frac{u' \sqrt{C}}{2}}$,

et

$$U = -\frac{1}{Ku^2}$$

(avec $u' = u - u_0$).

4° $v - v_0 = 2a \sqrt{u - a^2}$, et, en général

$$v - v_0 = \int \frac{a du}{\sqrt{U - a^2}}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — En intégrant une fonction monogène analytique le long d'un contour d'intégration formé de deux segments de droite issus de O , et de deux arcs de cercle de centre O , calculer, grâce à la théorie des résidus, les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}, \quad \int_0^\infty \frac{\log x dx}{1+x^n},$$

où n est une constante réelle supérieure à 1.

SOLUTION :

$$I_1 = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}, \quad I_2 = -\frac{\pi^2}{n^2} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}.$$

(Poitiers, juin 1926.)

A PROPOS DU NOUVEAU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES ;

PAR A. GRÉVY.

Le numéro de juin des *Nouvelles Annales* contient un article dans lequel M. Hadamard critique avec quelque vivacité les travaux de la Commission interministérielle chargée de reviser le programme maximum de la classe de Mathématiques spéciales.

Rien de ce qui émane de la plume d'un savant universellement estimé, qui s'intéresse aux choses de l'enseignement et se préoccupe du grave problème de la formation de la jeunesse, ne saurait passer inaperçu. En accueillant cet article, la Direction des *Nouvelles Annales* a mis libéralement ce périodique à la disposition de ceux qui croiraient devoir intervenir dans le débat. Je profiterai de cette offre gracieuse, non pour discuter point par point les arguments présentés, ce qui m'entraînerait à faire une étude systématique des nouveaux programmes ; ce serait abuser de la patience du lecteur et de l'hospitalité qui m'est offerte ; je me bornerai à présenter quelques observations générales qui, je l'espère, montreront à mon camarade et ami que le désaccord qu'il signale est plus apparent que réel.

Je n'ai pas qualité pour présenter la défense de la Commission et la justifier de n'avoir pas adopté le projet qui lui était présenté au nom de l'École Polytechnique ; je ne puis toutefois m'empêcher de faire remarquer qu'il s'agissait en la circonstance d'élaborer un programme maximum, qui ne se prêtât pas à une extension indéfinie, dans lequel les différentes Écoles intéressées pourraient puiser leur programme d'admission.

Il était dès lors naturel que, de l'échange de vues entre leurs représentants et ceux de l'Université, qui est chargée de former leurs futurs élèves, résultât un programme d'ensemble, qui ne fût pas la reproduction intégrale de celui qu'avaient préparé les seuls représentants de l'École Polytechnique ; d'ailleurs, pendant la

longue et minutieuse discussion qui eut lieu, ceux-ci n'ont élevé aucune objection de principe contre les décisions prises; leurs propositions ont été, quoi qu'en pense M. Hadamard, étudiées « avec la plus sérieuse attention » et s'ils se sont inclinés devant l'opinion générale, c'est que, vraisemblablement, les raisons qu'on leur a données leur ont paru avoir quelque poids.

Je comprends d'autant mieux que M. Hadamard, qui n'a pu assister aux séances de la Commission, regrette que certaines modifications proposées n'aient pas été admises, que, sur certains points, je suis d'accord avec lui : je crois qu'il eût été possible de supprimer l'étude, sur les équations réduites, des coniques, voire même des quadriques et de la remplacer par une étude géométrique; je n'aurais vu nul inconvénient à l'introduction de la notion de convergence uniforme qui, j'en parle par expérience, est tout à fait accessible à ceux de nos élèves susceptibles de comprendre le Cours de Mathématiques spéciales; il me semble également qu'il eût été préférable de ne pas laisser de côté quelques équations différentielles dont l'intégration ne présente aucune difficulté. Sur ces points, en particulier, je n'ai pu convaincre la Commission; peut-être aurais-je eu gain de cause, si M. Hadamard eût été là pour appuyer mes arguments de sa haute autorité.

Mais, je l'avoue, mes regrets n'ont pas la même vivacité que les siens et, cela, pour la raison que nos conceptions de l'usage d'un programme sont quelque peu différentes, sinon en théorie, du moins en pratique; je crois même qu'il n'y a pas désaccord véritable entre le point de vue où s'est placée la Commission et celui que soutient M. Hadamard; il y a un simple malentendu, que je voudrais essayer de dissiper.

On peut envisager un programme sous deux angles, suivant qu'il constitue la matière sur laquelle porteront les questions des examinateurs ou la matière qui servira de base au cours du professeur.

L'examineur doit s'assurer que le candidat possède les connaissances nécessaires pour suivre avec fruit les cours de l'École, qu'il est capable de raisonner, que son esprit est assez mûr pour que l'enseignement, qu'il recevra plus tard, lui soit profitable. Ce dont il est juge, c'est des connaissances acquises par le candidat et de

son intelligence, et non pas des méthodes, sur lesquelles on peut juger le professeur, non l'élève, qui n'est pas responsable de l'enseignement qu'il a reçu, mais de la façon dont il a compris les théories et dont il sait en tirer parti.

Il en est autrement de l'attitude du professeur en face d'un programme. Ce que ses élèves peuvent exiger de lui, c'est qu'il les mette en état de répondre aux questions qui leur seront posées; il doit donc passer en revue toutes les parties du programme; mais il est maître de le faire de la façon et dans l'ordre qui lui conviennent, c'est même son devoir de varier les méthodes suivant la qualité de ses élèves. Si ceux-ci sont médiocres, il s'efforcera, sans sacrifier la logique et la rigueur du raisonnement, de donner des démonstrations aussi simples que possible, même si elles ne paraissent pas présenter sous leur vrai jour les sujets traités; à des élèves bien doués, il exposera les mêmes questions d'un point de vue plus général, plus compréhensif; il pourra, et il devra même au besoin, sortir des limites littérales du programme, s'inspirant surtout de son esprit, s'il y a profit pour l'intelligence vraie du sujet traité, qui apparaîtra ainsi, non plus isolé, mais rattaché par des liens étroits à d'autres sujets. Il ne faut pas oublier, en effet, que le professeur ne prépare pas uniquement ses élèves à subir avec succès un examen; il a pour tâche principale de former leur esprit; de leur faire pénétrer la raison profonde des choses; de mettre en lumière les liens qui unissent des parties, en apparence hétérogènes les unes aux autres, de la science; de leur ouvrir, à propos d'une question, des horizons nouveaux et d'éveiller, par là, leur curiosité scientifique.

Le programme, impératif sous sa forme littérale pour l'examineur, n'est pour le professeur qu'une table des matières, dont il peut, à son gré, modifier l'ordre et, au besoin, étendre l'objet. Qu'on ne voie pas dans cette liberté, que je réclame pour le professeur, une licence de n'agir qu'à sa fantaisie; il a des supérieurs devant lesquels il est justiciable de son enseignement.

Les idées, que je viens d'émettre seront, je crois, admises par tous ceux qui savent ce qu'est l'enseignement; elles semblent être, sous cette forme ou sous une forme légèrement atténuée, celles de M. Hadamard, puisqu'il admet qu'un professeur puisse enseigner la convergence uniforme, qui n'a jamais figuré au pro-

gramme; les seules craintes qu'il exprime sont que ce professeur soit une exception et que les autres « seront impressionnés par l'ordre qui leur est indiqué ». C'est là que git le malentendu dont j'ai parlé; que M. Hadamard soit rassuré: je connais la plupart des professeurs de Spéciales, je n'en connais pas un seul qui ait la préoccupation de suivre l'ordre du programme, d'autant moins qu'on ne l'exige nulle part; s'il est quelquefois question de cet ordre, ce n'est le plus souvent que pour faire ce que fait M. Hadamard, c'est pour le critiquer, quel que soit d'ailleurs cet ordre, qui ne saurait plaire à tous.

Nous serions donc tout à fait d'accord et il ne resterait rien qu'un article intéressant, plein d'idées suggestives, si le pauvre théorème de Rouché n'était venu se mettre à la traverse; qu'il soit ou non « la plus belle chose du monde », qu'il soit ou non « utile », je n'ai pas l'intention de le rechercher; je constaterai simplement que les raisons données pour le condamner sont peu probantes. C'est aller un peu loin que le rendre responsable des maladresses des « taupins »; je retrouve là une erreur assez répandue et d'ailleurs toute naturelle de la part de personnes qui n'ont de lointains contacts avec nos élèves; M. P. Lévy, ici même, n'a-t-il pas attribué à des causes du même genre les bévues des candidats à l'École des Mines.

Il suffit de faire une classe pendant une année pour les voir défiler les unes après les autres et pour constater que, malgré des observations journalières, malgré une insistance fastidieuse, le professeur le plus écouté ne peut obtenir que rarement qu'un élève moyen réfléchisse à la question posée, regarde avec ses yeux; il est si commode, en apparence, d'énoncer un résultat général que l'on ne sait pas, d'ailleurs, toujours utiliser. Celui qui est responsable, c'est l'élève qui ne devrait pas suivre un cours au-dessus de ses forces, et cet élève est légion; ce n'est pas le professeur, qui se débat en vain; ce n'est pas le théorème général; ce n'est pas « la méthode pédagogique théoriquement parfaite, en réalité uniquement propre à déformer l'esprit ».

Il faut le dire bien haut, puisqu'on semble parfois l'ignorer⁽¹⁾, les maîtres de l'enseignement secondaire ne connaissent pas la loi

(1) Je n'ai pas besoin de dire que ce reproche ne s'adresse pas à M. Hadamard, qui a si nettement rendu justice aux professeurs de l'Enseignement secondaire.

du moindre effort, savent qu'une théorie n'est comprise que si l'on sait l'appliquer, que si elle a été exposée, vérifiée sur des exemples concrets; mais, je l'avoue à leur grande honte, il faut qu'ils soient d'une rare maladresse puisqu'ils n'obtiennent pas qu'un élève, qui ne comprend pas plus le cas concret que la théorie générale, donne au moins l'illusion de les comprendre.

Que l'on enseigne ou que l'on n'enseigne pas le théorème de Rouché, on peut être sûr que le résultat sera le même; et pourtant non, car de bons élèves, qui ont la curiosité éveillée, qui éprouvent le besoin d'avoir une réponse à une question qu'ils sont amenés naturellement à se poser, chercheront si l'étude d'un système d'équations linéaires peut être faite simplement dans le cas général et seront heureux de savoir que les résultats de cette étude peuvent être aisément résumés par ce théorème. Que cela soit important ou ne le soit pas, peu importe; ne vaut-il pas mieux, à peu de frais d'ailleurs, satisfaire une curiosité légitime d'un bon élève, que céder à la crainte chimérique qu'un mauvais élève puisse se tromper ou faire preuve de maladresse uniquement parce qu'on lui aura enseigné un théorème général? On peut être tranquille; avec ou sans théorème le résultat sera le même.

J'aurais voulu borner là des remarques déjà trop étendues; mais, comment ne pas signaler un reflet de la pensée de M. Hadamard dans certaines modifications apportées au programme d'admission à l'École Polytechnique pour 1927?

Toujours à propos des équations linéaires, il est dit explicitement que le « théorème de Rouché » ne figure pas au programme et que la théorie des formes linéaires devra précéder celle des équations linéaires.

Je ferai d'abord remarquer que le théorème de Rouché ne figurait pas explicitement au programme, qui laissait le maître libre de traiter ces questions comme il l'entendait. D'autre part, il semblait entendu que les programmes d'admission devaient être pris dans le programme maximum et ne comporter, vis-à-vis de celui-ci, que des suppressions; je ne suis pas sûr qu'en *imposant* une façon de traiter ces questions, l'École Polytechnique ait observé les conventions qui avaient été faites et en quelque sorte contresignées par toutes les écoles représentées à la Commission.

Il y a là quelque chose de grave, contre quoi je crois devoir protester; que deviendra l'enseignement des lycées, le jour où chaque École croira pouvoir imposer ses préférences pour telle ou telle méthode? J'avais cru jusqu'à ce jour que l'Université était maîtresse chez elle; il paraît que je me suis trompé.

Je serais curieux aussi de savoir ce que pense M. Hadamard de la réduction de la Dynamique au seul mouvement du point libre; comment concilier cela avec son souci, que je partage entièrement, de ne pas perdre de vue le concret, la réalité? En dehors du mouvement des projectiles et du mouvement des astres, quelles questions posera-t-on aux élèves? Nous verrons éclore une suite de points soumis à des forces étranges, dont toute la réalité consistera en ceci qu'elles donneront naissance à des équations différentielles que l'on sait intégrer ou discuter. Par un singulier renversement des choses, celles-ci, qui avaient été introduites en vue de la Dynamique, vont, pour justifier leur raison d'être, susciter une série de problèmes qui n'auront aucun rapport avec ceux que l'on rencontre réellement.

SUR LE CONTACT A RUGOSITÉ PARFAITE;

PAR ET. DELASSUS.

I.

1. On a l'habitude, dans beaucoup de questions, de dire que l'on suppose les corps parfaitement rugueux ou que l'on suppose le coefficient de frottement infini de façon à empêcher tout glissement et à assurer ainsi le roulement. C'est une conséquence immédiate de la loi de frottement

$$|F| = f|N|$$

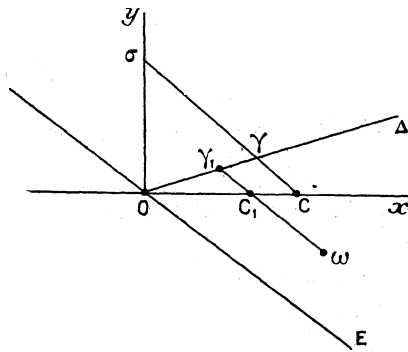
puisque la force de frottement devient alors infinie. Comme en bien d'autres questions de mécanique, on est là en présence d'une chose évidente... , mais fausse.

2. Pour s'en convaincre, reprenons la discussion géométrique du contact plan avec coefficient de frottement très grand ⁽¹⁾.

Nous avons une *droite d'échappement* E ⁽²⁾ et un seul côté Δ de l'angle de frottement au-dessus de E. Ce côté est d'ailleurs très voisin de Ox.

Si les conditions initiales donnent $V_0 < 0$ et un point σ sur Oy, on a un mouvement M_g de réaction $O\gamma$ donnée par la construction connue.

Si l'on a $V_0 = 0$, il faut supposer le point ω , extrémité de la



réaction du roulement forcé situé dans l'angle ΔOE, et il donne un mouvement M_g de réaction $O\gamma_1$.

Dans les deux cas, on voit que le mouvement M_g obtenu donnera une réaction tangentielle finie et une *réaction normale très petite*.

Il est facile de passer à la limite pour f infini, car la droite E, ainsi que les points σ et ω , sont absolument indépendants de f . Δ viendra se confondre avec Ox, et γ, γ_1 viendront en C, C_1 , de sorte que l'on aura *un mouvement limite caractérisé par une réaction tangentielle finie et une réaction normale nulle*.

L'idée, signalée au début, que la croissance indéfinie de f avait pour effet de faire croître indéfiniment F^i était donc fautive puisque

⁽¹⁾ Voir DELASSUS, *Considérations sur le frottement de glissement* (N. A., 1920).

⁽²⁾ C'est la droite D de l'article cité, mais à laquelle nous donnons un nom pour rappeler sa propriété de limite de la région d'échappement.

L'effet véritable est de faire tendre N vers zéro, ce qui permet à F de rester fini.

3. L'étude précédente nous conduit donc à dire que, aussi bien dans l'espace que dans le plan, quand le coefficient de frottement est infini, les mouvements de glissements sont caractérisés par une réaction normale nulle et une force de frottement finie satisfaisant à la condition d'être opposée à la vitesse de glissement. Toutes les constructions données pour f quelconque s'appliquent avec leurs conséquences à ces mouvements.

Le cas du mouvement plan vient d'être étudié et ne donne lieu à aucune simplification; il n'en est pas de même dans le cas de l'espace.

Si l'on a $V_0 = 0$, il existe, pour l'extrémité ω de la réaction du roulement forcé, trois régions :

R_p , côté négatif du plan E d'échappement, c'est la région d'échappement;

R_r , région de roulement, portion de l'espace intérieur au cône positif de frottement et du côté positif de E ;

R_g , région de glissement extérieure au cône de frottement et du côté positif de E .

J'ai montré ⁽¹⁾ que, ω étant dans R_g , la réaction $O\gamma$ du mouvement M_g était déterminée par une équation du quatrième degré et que, dans certains cas, il était absolument impossible de caractériser la racine qui donnait le véritable mouvement M_g .

Dans le cas actuel ($f = \infty$), rien de tout cela ne se produit. On pourrait le voir comme conséquence limite des calculs de l'article que nous venons de citer, mais il est aisé de le voir directement. Soit

$$\varphi(x, y, z) = 1$$

la quadrique qui se retrouve dans toutes ces questions et qui est celle employée par M. PÉRÈS dans ses articles sur le choc avec frottement ⁽²⁾.

⁽¹⁾ DELASSUS, *Sur les lois du frottement de glissement* (Bulletin de la Société mathématique de France. 1923).

⁽²⁾ PÉRÈS, *N. A.*, 1923 et 1924.

Si nous désignons par x, y, z la réaction $O\gamma$ de M_g et par x_1, y_1, z_1 la réaction $O\omega$ de M_r , on établit aisément les deux conditions

$$\frac{x}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x - x_1, y - y_1, -z_1)} = \frac{y}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x - x_1, y - y_1, -z_1)} < 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x - x_1, y - y_1, -z_1) = 0.$$

Pour la commodité de l'interprétation, nous remplacerons dans la première z_1 par sa valeur tirée de la seconde et l'on verra que le système pourra s'écrire

$$\frac{x}{\frac{\partial U}{\partial x}(x - x_1, y - y_1)} = \frac{y}{\frac{\partial U}{\partial y}(x - x_1, y - y_1)} < 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x - x_1, y - y_1, -z_1) = 0,$$

U étant une nouvelle forme quadratique à deux variables définie positive. On est ramené à l'intersection d'une droite Ω , intersection de xOy avec E' menée par ω parallèlement à E , et de l'hyperbole d'Apollonius relative au point O et à l'ellipse

$$U(x - x_1, y - y_1) = 1.$$

Cette hyperbole passe par O et par $\omega'(x_1, y_1)$, projection horizontale de ω . Ces deux points sont sur une même branche et l'inégalité exprime que le point γ doit être sur l'arc $O\omega'$.

La région R_g se réduit ici au dièdre défini par le côté négatif de xOy et le côté positif de E ; par hypothèse, ω y est situé, et, sans perdre notre temps à le démontrer, on voit immédiatement que ω' et O sont alors forcément de part et d'autre de E' , donc de part et d'autre de son intersection Ω avec xOy . L'arc $O\omega'$ d'hyperbole traverse Ω en un point et un seul, de sorte que l'on a en définitive à résoudre une équation du second degré dont une racine ne convient pas et dont l'autre donne la solution cherchée.

Si $V_0 \neq 0$, les conditions initiales étant supposées donner un point σ sur l'axe Oz lui-même, il n'y correspondra un mouvement M_g que si V_0 est dans le demi-plan xOy opposé à la face xOy de R_g . Dans le cas contraire, il y a choc (1).

(1) DELASSUS et PÉRÈS, *N. A.*, 1924.

II.

4. Le choc avec coefficients de frottement infini s'étudie sans aucune difficulté, comme cas limite, en appliquant la discussion de M. Pérès.

Mais il y a des simplifications.

Le point le plus haut de l'ellipse φ (cas du plan) ou de l'ellipsoïde φ (cas de l'espace) se trouve toujours à l'intérieur du cône de frottement qui est ici le dessus de xOy de sorte que, si le choc débute par roulement, il se fera entièrement par roulement.

Dans le cas de l'espace ⁽¹⁾ le cercle C de M. Pérès a un rayon infini, les points limites sont à l'infini, aucun d'eux n'est sur l'arc B*h* de l'hyperbole d'Apollonius, de sorte que, quelle que soit la vitesse de glissement du début du choc, on a une courbe (M) allant rencontrer Oz, donc choc à une seule période ou choc à deux périodes, la seconde étant de roulement.

Il est à remarquer que, dans ce cas, on peut effectuer explicitement les quadratures qui donnent la courbe (M). Supposons que l'on ait choisi pour Ox et Oy les axes de la section horizontale de la quadrique φ ; on a alors

$$\varphi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx,$$

et en vertu de

$$\frac{X}{U} = \frac{Y}{V} < 0, \quad Z = 0,$$

les équations différentielles de (M) deviennent

$$\frac{dU}{AU} = \frac{dV}{BV} = \frac{dW}{-EU - DV} < 0$$

et donnent les équations finies de la courbe (M) qui permettent de déterminer M₁ dans le cas du choc simple à glissement. Dans tous les autres cas M₁ sera sur Oz et sera déterminé sans passer par ces formules.

Il est à remarquer que le système précédent, intégré, donnerait simplement, pour ce cas particulier, les résultats de M. Pérès sans les déduire du cas général.

(1) Cf. PÉRÈS, *N. A.*, mars 1924, § 6-8.

III.

5. La notion analytique de roulement unilatéral signifie que le roulement est forcé par l'existence même du contact. Quand le contact cesse, il y a échappement sans discontinuité sur les q' , c'est-à-dire sans choc, et nous admettons comme fait expérimental celui que nous admettons dans toutes ces questions de contact, que le mouvement libre se produit dès qu'il est possible.

Nous admettons aussi, comme nous l'avons fait pour le contact à frottement, le principe de la réaction normale positive.

Ceci posé, plaçons-nous dans le cas de l'espace, donnons-nous des conditions initiales de roulement fournissant une réaction $O\omega$ pour le mouvement à contact et roulement forcés. Il ne peut se produire que deux mouvements effectifs : soit le mouvement libre M_p , soit le mouvement de roulement M_r . La région R_p sera toujours le dessous du plan d'échappement

$$(E), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

et le reste de l'espace, c'est-à-dire le côté positif du plan E, semble devoir constituer la région R_r . Mais ce côté positif de E se compose de deux dièdres : l'un au-dessus de xOy , qui est la vraie région R_r et l'autre R' au-dessous de xOy .

Dans cette région R' le mouvement M_p est impossible et il en est de même de M_r qui aurait une réaction normale négative; c'est une *région d'impossibilité*. Que se passe-t-il quand ωy est situé, ce qui peut effectivement arriver comme on peut le vérifier sur des exemples simples? Aucun *mouvement* n'étant possible, il n'y a plus que l'hypothèse d'un choc ramenant brusquement à des conditions initiales de possibilité pour M_r ou pour M_p et, sur ce choc, nous ne savons absolument rien ni théoriquement, ni expérimentalement.

6. On est débarrassé de toutes ces difficultés si l'on admet que le contact est à frottement de coefficient infini. Nous remarquons en effet que le diagramme R_p, R_r, R' que nous venons de former pour le contact à roulement est identique au diagramme R_p, R_r, R_g

que nous avons formé pour le contact à rugosité parfaite, de sorte que, si nous *réalisons* le roulement par cette rugosité parfaite, nous aurons tout naturellement la signification de la région R' , ce sera la région R_g de production de ces mouvements de glissement étudiés dans la première section; mais alors, il faudra abandonner la définition du contact à roulement, ne plus admettre que le contact entraîne forcément le roulement et aussi, conformément à ce qui a été dit au début, perdre la notion fautive de rugosité parfaite assurant le roulement.

Quand ω se trouvera dans R' il n'y aura donc pas de choc mais simplement mouvement M_g à réaction normale nulle, à réaction tangentielle finie et de durée finie, de sorte que ce mouvement lui-même ne pourra pas être assimilé à un choc. Ce sera une première période du mouvement total.

Avec la première conception du roulement, si l'on partait du contact avec une vitesse de glissement V_0 non nulle, il y avait forcément choc sur la liaison de roulement. Avec la réalisation considérée, il ne se produit plus de choc; il y a production sans choc d'un mouvement M_g , pourvu toutefois que les conditions initiales de glissement ne soient pas dans le cas d'impossibilité. Si V_0 se trouve dans la face xOy de R' , il y aura le choc déjà indiqué (fin du paragraphe 3).

Des résultats analogues sont obtenus plus simplement dans le cas du mouvement plan.

De là résulte que la conception abstraite de la liaison unilatérale de roulement conduit à des conséquences inacceptables et qu'il semble que l'on ne puisse avoir une conception véritablement mécanique d'une telle liaison qu'en la considérant comme réalisée par un certain procédé, ce qui change ses propriétés mais supprime les lacunes.

Il y a une infinité de façons de réaliser le roulement. Celle qui a été étudiée ici a l'avantage de ne faire intervenir aucun contact supplémentaire et d'être la limite d'un cas pratiquement réalisable.

IV.

7. Tout ce qui vient d'être dit dans les trois sections précédentes repose sur un fait unique : c'est que, dans le cas du plan,

la droite d'échappement ne coïncide pas avec Ox ; dans le cas de l'espace, le plan d'échappement ne coïncide pas avec xOy .

Si nous reprenons le raisonnement du paragraphe 2, en supposant la droite E confondue avec Ox , l'angle xOE , qui est la région R_g , n'existera plus; des conditions initiales de roulement donneront toujours M_r ou M_p . Des conditions initiales de glissement donneront M_p si σ est au-dessous de O , et, si σ est au-dessus de O , un point C à l'infini sur Ox , c'est-à-dire un mouvement M_g à réaction normale nulle ou indéterminée et à réaction tangentielle infinie; ce mouvement sous l'action de forces infiniment grandes sera en réalité un choc qui ramènera aux conditions de roulement, donc au roulement, d'après l'observation précédente, de sorte que :

La rugosité parfaite donne la réalisation rigoureuse de la liaison unilatérale de roulement lorsque le solide en mouvement est tel que la droite ou le plan d'échappement coïncide toujours avec la tangente ou le plan tangent de contact.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la tangente de contact soit axe de symétrie de la conique φ

$$K^2(X^2 + Y^2) + (bX - aY)^2 = 1;$$

donc

$$a = 0,$$

ce qui signifie que la plaque est un disque circulaire avant son centre de gravité au centre et, dans le cas de l'espace, que le plan des xy soit plan de symétrie pour la quadrique φ

$$\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{M} + f(cY - bZ, aZ - cX, bX - aY) = 1,$$

ce qui exige

$$a = b = 0,$$

c'est-à-dire que le solide soit une sphère ayant son centre comme centre de gravité.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(SESSION DE 1926).

Composition de Mathématiques élémentaires (Arithmétique).

Nous conviendrons d'appeler cycle d'ordre n l'ensemble des nombres obtenus en permutant circulairement, de toutes les façons possibles, les chiffres d'un nombre N .

On caractérise un cycle par la donnée de son ordre et celle du plus petit de ses nombres. Par exemple, le cycle d'ordre 3 du nombre 58 est formé des nombres 058, 580, 805.

1° Montrer qu'un diviseur commun à $10^n - 1$ et à l'un des nombres d'un cycle d'ordre n divise les autres nombres du cycle.

Énoncer une réciproque de cette proposition.

2° Déterminer tous les cycles d'ordre 3 dont les nombres sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique;

3° On considère tous les cycles d'ordre 6 dont les nombres sont, à l'ordre près, six termes consécutifs d'une progression arithmétique.

Établir que les six chiffres composant ces nombres sont distincts, que la raison R de la progression est un diviseur de $10^6 - 1$ et que le plus petit nombre du cycle est un multiple du quotient de R par 9.

On recherchera enfin les limites entre lesquelles R doit être compris et l'on en déduira la détermination des cycles considérés.

SOLUTION PAR M. B. GAMBIER.

1° Soit $N_1 = a_1 a_2 \dots a_n$ un nombre du cycle, écrit sous forme décimale : chaque a_i est un entier compris entre 0 et 9 inclus. On écrira de même

$$(1) \quad N_2 = a_2 a_3 \dots a_n a_1, \quad N_3 = a_3 a_4 \dots a_n a_1 a_2, \quad \dots, \quad N_n = a_n a_1 \dots a_{n-1}.$$

On voit que R est divisible par 9; on écrira $R = 9\rho$ puis

$$(5) \quad N_1 - \rho = 111a_1, \quad N_1 + 8\rho = 111a_2, \quad N_1 + 20\rho = 111a_3;$$

$$(6) \quad 9\rho = 111(a_2 - a_1), \quad 21\rho = 111(a_3 - a_1).$$

Les égalités (6) divisées par 3 donnent

$$(7) \quad \rho = 37\rho', \quad a_2 = a_1 + 3\rho', \quad a_3 = a_1 + 7\rho'.$$

Comme $a_3 \leq 9$, on a $\rho' = 1$ et $a_1 = 0, 1$ ou 2 .

On obtient ainsi trois cycles ($R = 333$)

037	148	259
370	481	592
703	814	925

Si l'on supposait, comme au n° 3, que les nombres du cycle donnent une progression, à l'ordre près, il y aurait lieu d'envisager l'hypothèse

$$N_2 = N_1 + 2R, \quad N_3 = N_1 + R$$

qui conduit par le même procédé aux trois cycles ($R = 333$)

074	185	296
740	851	962
407	518	629

3° On a, en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les nombres 1, 2, 3, 4, 5 pris dans un ordre inconnu

$$(8) \quad N_{i+1} = N_1 + \lambda_i R \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

On écrit, par la même méthode que plus haut,

$$(9) \quad \begin{cases} 9N_1 - \lambda_1 R = 999999a_1, \\ 9N_1 + (10\lambda_1 - \lambda_2)R = 999999a_2, \\ 9N_1 + (10\lambda_2 - \lambda_3)R = 999999a_3, \\ 9N_1 + (10\lambda_3 - \lambda_4)R = 999999a_4, \\ 9N_1 + (10\lambda_4 - \lambda_5)R = 999999a_5, \\ 9N_1 + 10\lambda_5 R = 999999a_6. \end{cases}$$

L'égalité de $a_\alpha = a_\beta$ ($\alpha \neq \beta$) entraînerait

$$10\lambda_{\alpha-1} - \lambda_\alpha = 10\lambda_{\beta-1} - \lambda_\beta$$

(en posant $\lambda_0 = \lambda_6 = 0$), ce qui revient à l'égalité

$$(10) \quad \lambda_{\alpha-1} \lambda_\beta = \lambda_{\beta-1} \lambda_\alpha,$$

où les deux membres doivent être lus comme nombres du système décimal; or $\lambda_{\alpha-1} \neq \lambda_{\beta-1}$ et $\lambda_\beta \neq \lambda_\alpha$ de sorte que l'égalité est impossible, *les nombres a_1, a_2, \dots, a_6 sont donc distincts.*

D'autre part les nombres $\lambda_1, 10\lambda_1 - \lambda_2, 10\lambda_2 - \lambda_3, 10\lambda_3 - \lambda_4, 10\lambda_4 - \lambda_5, \lambda_5$ ne peuvent être tous divisibles par 3, sinon $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ le seraient tous, ce qui est absurde puisqu'à l'ordre près ce sont 1, 2, 3, 4, 5. Donc *l'une des égalités (9) donne $R = 9\rho$ où ρ est un entier* (les deux conclusions qui précèdent valent quelle que soit la valeur de n comprise entre 2 et 10 inclus). On remplace donc les égalités (9) par les égalités plus simples

$$(\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6) :$$

$$(9') \quad N_1 + (10\lambda_{\alpha-1} - \lambda_\alpha)\rho = 111111a_\alpha.$$

Par soustraction on a

$$(11) \quad [10(\lambda_{\beta-1} - \lambda_{\alpha-1}) - (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)]\rho = 111111(a_\beta - a_\alpha).$$

Or les nombres $a_1, \dots, a_\alpha, a_\beta, \dots, a_\gamma$ étant supposés rangés en ordre croissant, on a cinq intervalles qui ne peuvent être tous égaux ou supérieurs à 2, car $a_1 \geq 0, a_\gamma \leq 9$; donc l'un au moins des intervalles est égal à 1, et si, dans (11), on suppose $a_\beta - a_\alpha = 1$ on voit que ρ *divise 111111 et R divise 999999.*

(Le raisonnement est valable pour $n = 6, 7, 8, 9, 10$: R est multiple de 9 et divise $10^n - 1$.) Écrivons donc

$$(12) \quad 111111 = \rho\rho',$$

puis, quels que soient α et β , distincts, compris entre 1 et 6

$$(13) \quad \rho' = \frac{10(\lambda_{\beta-1} - \lambda_{\alpha-1}) - (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)}{a_\beta - a_\alpha}.$$

Cherchons le minimum de ρ' : utilisons encore une différence $a_\beta - a_\alpha$ égale à l'unité, on a

$$(14) \quad \lambda_{\beta-1} - \lambda_{\alpha-1} \geq 1, \quad \lambda_\beta - \lambda_\alpha \leq 5, \quad \rho' \geq 5.$$

Pour avoir le maximum de ρ' , remarquons que la plus grande différence $a_\beta - a_\alpha$ s'obtient en prenant $\alpha = 1$, et choisissant pour a_β le plus grand des a .

La différence $a_\beta - a_1$ est au moins égale à 5; N_β est le plus grand nombre, donc $\lambda_{\beta-1} = 5$

$$\rho' = \frac{10\lambda_{\beta-1} + \lambda_1 - \lambda_\beta}{a_\beta - a_1} \leq \frac{50 + 4 - 0}{5},$$

d'où

$$(15) \quad \rho' \leq 10.$$

La décomposition de 1111111 en facteurs premiers, à savoir 3. 7. 11. 13. 37 montre que ρ' est égal à 7, ρ à 15873, R à 142857. On a

$$(16) \quad N_1 = \lambda_1 \rho + a_1 1111111;$$

donc N_1 est multiple de ρ ou $\frac{R}{9}$ (d'ailleurs N_2, \dots, N_6 aussi). Dans la formule (16), on ne peut donner à λ_1 que les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et à a_1 que les valeurs 0, 1, 2, 3, 4; cela réduit donc les essais à un total de 25. J'écris les nombres en question, entre lesquels on doit choisir N_1 :

	0.	1.	2.	3.	4.
1.	015873	126984	238095	349206	460317
2.	031746	142857	253968	365079	476190
3.	047619	158730	269841	380952	492063
4.	063492	174603	285714	396825	5.....
5.	079365	190476	3.....	4.....	5.....

Le chiffre marqué à gauche est la valeur de λ_1 ; le chiffre placé en haut est la valeur de a_1 et doit coïncider avec le premier chiffre du nombre, ce qui dispense d'écrire certains nombres; la première colonne exige seule un calcul, les autres s'obtenant par l'addition de 1111111.

Dans N_1 le chiffre de gauche doit être le plus petit: ce critérium oblige à ne garder que le tableau T :

$$(T) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 015873 & 126984 \\ 031746 & 142857 \quad 253968 \\ 047619 \\ 063492 \\ 079365 \end{array} \right.$$

D'autre part, si l'on essaie pour N_1 le nombre 031746 qui se ter-

mine par 6, puisque R se termine par 7, les chiffres terminaux de $N_1, N_1 + R, \dots, N_1 + 5R$ seront respectivement 6, 3, 0, 7, 4, 1 et doivent coïncider (à l'ordre près) avec les chiffres de N_1 , ce critérium réussit pour 031746, 142857, 253968 et échoue pour les autres comme le montre le tableau

296307	630741
307418	741852
418529	852963
529630	963074

borné aux seuls chiffres 2, 3, . . . , 9 terminaux des divers nombres du tableau T.

Les trois nombres cités réussissent, on vérifie que pour eux

$$\begin{aligned} N_2 &= N_1 + 2R, & N_3 &= N_1 + R, & N_4 &= N_1 + 5R, \\ N_5 &= N_1 + 3R, & N_6 &= N_1 + 4R \end{aligned}$$

(vérification nécessaire uniquement pour 031746, nombre dont tous les chiffres sont au plus égaux à 7, de sorte que l'addition de 111111 ou 222222 à un nombre quelconque du cycle se fait sans retenue).

BIBLIOGRAPHIE.

Il a déjà paru, depuis 1924, six fascicules du grand *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* (1), que publie M. Émile Borel. L'Ouvrage complet comportera 17 fascicules, mais on peut, dès maintenant, en apprécier toute l'importance.

La nouvelle œuvre de M. Borel nous paraît, à quelques égards, devoir être mise en parallèle avec sa *Collection de Monographies*, dont nul n'ignore l'influence décisive sur le développement actuel de la *Théorie des fonctions*. Nous n'oublions point, en faisant ici ce rapprochement, que lorsque parut, en 1898, le premier volume de la collection de Monographies, la Théorie des fonctions était bien loin d'être constituée, tandis que, depuis plus d'un siècle, Laplace dans sa *Théorie analytique des probabilités* « a fourni un modèle à tous ceux qui ont abordé le sujet ». Mais il faut ajouter que le Calcul des probabilités prend de nos jours, par

(1) Gauthier-Villars, éditeur.

ses applications, une extension que ses fondateurs ne pouvaient prévoir. Il intéresse, et très profondément, les branches les plus diverses de la Science, de sorte qu'une synthèse générale répond aux besoins de l'heure présente et ne peut manquer de donner une vigoureuse impulsion à tout un ensemble de recherches.

Cet exposé d'ensemble, qui doit mettre en évidence, sous la diversité des applications, l'unité du Calcul des probabilités et qui seul peut assurer l'heureuse réaction des nécessités pratiques sur le développement des recherches théoriques, nous le trouvons dans le *Traité* de M. Borel. Pour sa publication, l'auteur a obtenu le concours de spécialistes distingués : c'est ainsi par exemple (et cela caractérise bien l'ample synthèse que doit réaliser le *Traité*) qu'un éminent naturaliste comme Blaringhem a été appelé à collaborer aux fascicules (à paraître) concernant les applications à la Biologie.

Les 17 fascicules que comprendra le *Traité* complet se groupent en quatre tomes : I. Principes de la théorie; II. Applications mathématiques et physiques; III. Applications aux Sciences économiques et biologiques; IV. Applications diverses (tir, jeux) et conclusion philosophique. Le seul fascicule paru du tome premier : *Principes et formules classiques* (1), rédigé par R. Lagrange d'après le Cours de M. Borel, donne l'exposé le plus sûr et le plus limpide des bases mathématiques du calcul des probabilités. Les principes fondamentaux (des probabilités totales et de la probabilité composée) sont d'abord posés comme axiomes caractéristiques de la notion de probabilité, axiomes dont la valeur pratique se précise immédiatement par d'intéressants exemples. L'auteur étudie ensuite les méthodes permettant de traiter les problèmes du premier et du second ordre, tant pour les probabilités rationnelles que pour les probabilités dénombrables ou continues; enfin, dans un dernier Chapitre, la considération des fonctions de la statistique l'amène à un suggestif exposé de la résolution du *problème des moments* de Stieltjes.

Le tome second du *Traité* débute par un volume d'*applications à l'Arithmétique et à la Théorie des fonctions* (2) (rédigé par P. Dubreil d'après des leçons de l'auteur). Les recherches qu'y développe l'auteur sont des plus attrayantes et il semble que le champ qu'il ouvre ainsi à l'activité des chercheurs doive être des plus féconds. Pour donner au lecteur le désir de connaître ce petit Livre, il suffira de citer ici l'un des premiers résultats : soit f_n la fréquence d'un chiffre donné dans les n premiers chiffres du développement décimal d'un nombre; si l'ensemble E des f_n admet deux points limites f et f' , il admet aussi pour point limite tout point du segment ff' ; de plus, l'ensemble des nombres pour chacun desquels E admet un point limite autre que $\frac{1}{10}$ a une mesure nulle.

L'étude des probabilités géométriques qu'expose M. R. Deltheil dans le

(1) 1 volume de 160 pages; prix 18^{fr.}

(2) 1 volume de 100 pages; prix 17^{fr.}

second fascicule du même tome (1), n'est pas moins attrayante. Si les premiers résultats sur ce sujet (solution de Buffon pour le problème de l'aiguille) sont déjà très anciens, la théorie générale en est par contre récente et l'on doit rapporter ses progrès aux travaux de Poincaré introduisant dans la définition de la probabilité élémentaire une fonction arbitraire et à la thèse de M. Deltheil, qui détermine cette fonction par l'invariance de la probabilité pour certains groupes de transformations. Il faut signaler, dans l'excellent Ouvrage de M. Deltheil, l'intéressante étude du problème de Sylvester (probabilité pour que quatre points pris dans un domaine forment un quadrilatère convexe) et l'élégant exposé des résultats de Barbier et Crofton.

Le dernier Chapitre : Problèmes sur la sphère de l'espace à m dimensions, nous amène tout naturellement au fascicule suivant du Traité : *Mécanique statistique classique*, fascicule qui est dû à M. Borel (leçons rédigées par F. Perrin) (2). Les positions et vitesses d'un système mécanique étant définies par des variables canoniques, le point de départ de la Mécanique statistique est la notion d'*extension en phase*

$$\int \dots, \int dp_1 dp_2 \dots dp_n dq_1 dq_2 \dots dq_n$$

intégrale invariante pour les changements de coordonnées et indépendante du temps quand on suit le mouvement du système. On verra d'abord dans le livre de M. Borel comment l'extension en phase (multipliée par une fonction de l'énergie, en général seule intégrale première uniforme des équations) intervient dans la définition de la probabilité élémentaire; cela résulte des propriétés précédentes et de l'*étalement* de l'extension en phase qui fait que, pour de petites variations des données initiales, les trajectoires correspondantes recouvrent entièrement une hypersurface d'énergie constante. Cette importante notion se trouve remarquablement mise en lumière par des exemples concernant le cas où se produisent des réflexions. Le problème général de la théorie cinétique des gaz équivaut, comme le montre alors l'auteur, au mouvement, à vitesse constante, d'un point P dans un hyperespace limité par certaines surfaces, le point se réfléchissant sur les surfaces limites : l'étalement des trajectoires entraîne que toutes directions sont également probables pour la vitesse de P, et M. Borel en déduit, de façon particulièrement satisfaisante, la loi fondamentale de répartition des vitesses d'une masse gazeuse (loi de Maxwell). Il développe ensuite la théorie cinétique et le fascicule s'achève sur une substantielle étude de la notion d'entropie.

Pour terminer cette revue rapide, il nous reste à signaler ici le volume de M. H. Galbrun (t. III, fasc 1) (3) consacré aux assurances sur la vie

(1) 1 volume de 123 pages; prix 22^{fr.}

(2) 1 volume de 148 pages; prix 18^{fr.}

(3) 1 volume de 310 pages; prix 35^{fr.}

(calcul des primes) et le volume de M. J. Haag : *Applications au tir* (t. IV, fasc. 4) (1). M. Galbrun dégage idées et méthodes générales dans des questions qui sont parmi les plus importantes applications pratiques du calcul des probabilités. M. Haag s'est occupé des problèmes de probabilité de tir, d'abord à la Commission de Gâvre, puis au Centre d'études d'artillerie; il donne de ce vaste sujet un exposé parfaitement documenté et très accessible, exposé très original et où l'on trouvera en particulier les travaux personnels de l'auteur sur le calcul de la portée moyenne et de l'écart probable, sur le réglage et le rendement, sur la probabilité d'efficacité et le tir sur zone.

J. P.

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.59.

[*Mathématiques générales; épreuve théorique; énoncé publié en avril 1926, p. 224.*]

SOLUTION

Par M. R. WEINZAEFFEL.

On demandait d'abord d'évaluer, en exprimant r et θ en fonction d'un paramètre, l'intégrale

$$(1) \quad \theta = \int_a^r \sqrt{\frac{4a^2 - r^2}{r^2 - a^2}} \frac{dr}{2r}.$$

En posant

$$u = \sqrt{\frac{4a^2 - r^2}{r^2 - a^2}},$$

on trouve, après des calculs faciles,

$$(2) \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tang} u - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{u}{2}$$

et

$$(3) \quad r = a \sqrt{\frac{4 + u^2}{1 + u^2}}$$

Les formules (2) et (3) définissent r et θ en fonctions du paramètre u et, par suite, θ en fonction de r .

On envisageait ensuite, sur le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, deux points M et M'

(1) 1 volume de 183 pages; prix 25^{fr.}

ayant des vitesses angulaires respectives + 3 et - 1 et partant simultanément du point $x = a, y = 0$ et l'on demandait l'enveloppe de la droite MM' . On trouve pour équation de cette droite

$$x \cos t + y \sin t - a \cos 2t = 0,$$

et l'enveloppe est définie par le système

$$\begin{aligned} x &= a \cos t(1 + 2 \sin^2 t), \\ y &= -a \sin t(1 + 2 \cos^2 t). \end{aligned}$$

La construction de cette courbe est immédiate; c'est, comme il est connu, une astroïde ou hypocycloïde à quatre rebroussements ayant ses rebroussements sur les bissectrices des axes. Pour le voir géométriquement soient A et B les points où MM' rencontre respectivement les bissectrices $y = x$ et $y = -x$. L'angle $M'OA$ vaut $t + \frac{\pi}{4}$. Il en est de même de l'angle $M'AO$ parce que, si l'on abaisse de O la perpendiculaire OH sur MM' , on a

$$\widehat{xOH} = t,$$

donc

$$\widehat{M'AO} = \frac{\pi}{2} - \widehat{HOA} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{\pi}{4} + t.$$

Le triangle $M'OA$ est donc isocèle et l'on a

$$M'A = M'O = a;$$

de même on a

$$M'B = M'O = a;$$

d'où

$$AB = 2a.$$

L'enveloppe en question est donc celle d'un segment de droite de longueur $2a$ dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires; c'est un astroïde que l'on placera sans peine sur la figure.

Enfin si r et θ sont les coordonnées polaires d'un point de l'enveloppe, on a

$$\operatorname{tang} \theta = -\frac{\sin t}{\cos t} \frac{1 + 2 \cos^2 t}{1 + 2 \sin^2 t}, \quad r^2 = a^2(1 + 3 \sin^2 2t),$$

d'où par différentiation

$$d\theta = \frac{3(\sin^2 2t - 1)}{1 + 3 \sin^2 2t} dt = \frac{r^2 - 4a^2}{r^2} dt$$

et

$$dt = \frac{r dr}{2\sqrt{r^2 - a^2} \sqrt{4a^2 - r^2}},$$

d'où, entre r et θ , la relation précédente (1) qu'indiquait l'énoncé.

Autres solutions par MM. J. DEVISME et PARIS.

Question C.71.

[*Mathématiques générales; épreuve théorique; énoncé publié en juillet 1926, p. 315.*]

SOLUTION

Par M^{lle} Odette DEVISME.

Il s'agit de déterminer les constantes r et a pour que l'on ait la relation

$$(e^{rx} \cos x)' = ae^{rx} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

ou, en effectuant et divisant par e^{rx} ,

$$r \cos x - \sin x = a \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x),$$

d'où l'on tire

$$a = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad r = 1.$$

Dans ces conditions, la dérivée $m^{\text{ième}}$ de l'expression

$$f(x) = e^{rx} \cos x$$

sera égale à

$$a^m e^{rx} \cos \left(x + m \frac{\pi}{4} \right) = (\sqrt{2})^m e^x \cos \left(x + m \frac{\pi}{4} \right)$$

et l'application de la formule de Mac Laurin conduit au développement de $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{ax}{1} \cos \frac{\pi}{4} + \dots + \frac{a^m x^m}{m!} \cos m \frac{\pi}{4} + \dots \\ &= 1 + \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \dots \end{aligned}$$

ou enfin, en groupant les termes qui correspondent à $8k \leq m < 8k + 8$,

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_0^{\infty} 2^{4k} x^{8k} \left[\frac{1}{(8k)!} + \frac{x}{(8k+1)!} - \frac{2x^3}{(8k+3)!} \right. \\ \left. - \frac{4x^4}{(8k+4)!} - \frac{4x^5}{(8k+5)!} + \frac{8x^7}{(8k+7)!} \right]. \end{aligned}$$

Cette dernière expression montre bien que, pour x négatif, le développement de $f(x)$ (où l'on néglige les termes nuls) est une série alternée.

Question C.49.

[*Physique Mathématique; épreuve pratique; énoncé publié en février 1926, p. 153.*]

SOLUTION.

par un ANONYME.

On considère dans un plan vertical un point pesant attiré par un point O du plan (origine des coordonnées, axe Oy vertical) avec une force égale à $\frac{k}{r^2}$ (OM = r, k > 0). On demande d'étudier son mouvement en utilisant les paramètres

$$2\lambda = r + y,$$

$$2\mu = r - y.$$

Les courbes $\lambda = \text{const.}$ et $\mu = \text{const.}$ forment évidemment un faisceau de paraboles homofocales; la force vive sera

$$2T = \left(\frac{\lambda'^2}{\lambda} + \frac{\mu'^2}{\mu} \right) (\lambda + \mu)$$

et la fonction des forces

$$U = \frac{k - g(\lambda^2 - \mu^2)}{\lambda + \mu}.$$

Le calcul classique conduit à l'équation de Jacobi suivante :

$$\frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left[\lambda \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial W}{\partial \mu} \right)^2 \right] - \frac{k}{\lambda + \mu} + g(\lambda - \mu) = h,$$

qui permet (après multiplication par $\lambda + \mu$) de séparer les variables et donne

$$W = \int \sqrt{\frac{L(\lambda)}{\lambda}} d\lambda + \int \sqrt{\frac{M(\mu)}{\mu}} d\mu,$$

en posant

$$L(\lambda) = -2g\lambda^2 + 2h\lambda + k + \alpha,$$

$$M(\mu) = +2g\mu^2 + 2h\mu + k - \alpha,$$

d'où les équations du mouvement sous la forme

$$\int \sqrt{\frac{\lambda}{L(\lambda)}} d\lambda + \int \sqrt{\frac{\mu}{M(\mu)}} d\mu = t + \beta_1,$$

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda L(\lambda)}} + \int \frac{d\mu}{\sqrt{\mu M(\mu)}} = \beta_2.$$

Application. — Avec les conditions initiales données on a :

1°

$$L(\lambda) = -2g(\lambda - b)^2,$$

$$M(\mu) = +2g(\mu - b)^2 + 2k,$$

λ reste égal à b pendant tout le mouvement et μ varie dans le même sens. La trajectoire est la parabole $\lambda = b$, tournant sa concavité vers le bas. Le

mouvement est stable parce que des données initiales voisines donneront, pour $\lambda L(\lambda)$, un polynôme ayant deux racines très voisines de b et positif entre ces racines.

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad L(\lambda) &= -2g(\lambda + b)^2 + 2k, \\ M(\mu) &= +2g(\mu + b)^2, \end{aligned}$$

μ reste égal $-b$ pendant tout le mouvement et λ oscille entre 0 et $b + \sqrt{\frac{k}{g}}$, la trajectoire est un arc de la parabole $\mu = -b$ (tournant sa concavité vers le haut) décrit d'un mouvement oscillatoire. Le mouvement est stable, pour la même raison que plus haut.

Autres solutions par MM. J. DEVISME, A. MONJALLON.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.77. — On considère la fonction

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(tx) dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

1° Montrer que $J(x)$ est holomorphe pour toute valeur réelle ou imaginaire de x .

2° Montrer que $J(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$(1) \quad xy'' + y' + xy = 0.$$

3° Trouver le développement de $J(x)$ suivant les puissances croissantes de x .

4° Montrer que

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\cos(u^2 - x) du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2x}}};$$

prouver que, si x est réel et positif,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\cos u^2 du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2x}}} = \int_0^\infty \cos u^2 du,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin u^2 du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2x}}} = \int_0^\infty \sin u^2 du;$$

en conclure la valeur de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{x + 2k\pi} J(x + 2k\pi),$$

k étant un entier positif.

5° Trouver la solution générale de l'équation

$$xy'' + \gamma y' + xy = 0,$$

où γ est une constante non entière, et en déduire l'intégrale générale de l'équation (1) par un passage à la limite.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.78. — Calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-a) \sqrt[5]{x^2(1-x)^3}},$$

a étant une constante réelle (méthode des résidus).

(Clermont, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Les surfaces S d'équation

$$y(z+b) = x(x+a),$$

où a et b sont des constantes, vérifient, quelles que soient a et b , une équation E aux dérivées partielles du premier ordre que l'on formera.

2° Trouver la surface Σ intégrale générale de cette équation E . Montrer que Σ est réglée; que sont les génératrices de Σ vis-à-vis de E ?

3° Le long de chaque caractéristique de E , x, y, z, p, q satisfont à un système différentiel D que l'on intégrera complètement en exprimant y, z, p, q , au moyen de x et de trois constantes arbitraires.

4° On considère la surface réglée définie paramétriquement par les équations

$$x = tz + \varphi(t), \quad y = t^2z + t\varphi(t).$$

Former l'équation des asymptotiques, déterminer φ de sorte que $z=0$ donne une asymptotique particulière et intégrer l'équation correspondante.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° L'équation E est linéaire:

$$p \cdot xy + q \cdot y^2 = x^2.$$

2° La surface Σ a pour équation

$$x = \frac{y}{x} \left[z - f\left(\frac{y}{x}\right) \right].$$

En posant $y = tx$, on a des équations de la forme

$$\begin{cases} x = t z + \varphi(t), \\ y = t^2 z + t\varphi(t). \end{cases}$$

Les courbes $t = \text{const.}$ sont les caractéristiques, ce sont des droites.

3° Les équations demandées sont

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{x^2} = \frac{-dp}{-2z + py} = \frac{-dq}{2qy + px}.$$

On a deux intégrales premières

$$\frac{y}{x} = C, \quad z - \frac{x}{C} = C_1;$$

puis

$$\frac{dp}{-2 + pC} + \frac{dx}{Cx} = 0,$$

d'où

$$p = \frac{C_2}{x} + \frac{2}{C},$$

q est tiré de l'équation même

$$q = -\frac{1}{C^2} - \frac{C_2}{Cx}.$$

4° L'équation des asymptotiques s'écrit

$$2(t\varphi' - \varphi) \frac{dz}{dt} + 2(z - \varphi')^2 - \varphi''(tz + \varphi) = 0.$$

La courbe $z = 0$ est asymptotique, si l'on a

$$2\varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{A}{t+B}.$$

Dans ce cas particulier, l'équation devient linéaire en $u = \frac{1}{z}$ et s'intègre sans difficulté.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Quelle est la section de la surface*

$$a^2 y^2 = (a^2 - x^2)(a^2 - z^2)$$

par un plan horizontal? Calculer l'aire $S(z_1)$ de cette section par le plan $z = z_1$, puis le volume limité par la surface et les deux plans $z = -a$ et $z = +a$. Calculer l'intégrale

$$\int_0^a S(z) z^2 dz.$$

II. *Calculer par la méthode des résidus l'intégrale*

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$

prise dans le sens positif le long d'un cercle C de rayon 1 ayant pour centre l'origine, a et b étant des constantes telles que

$$|a| < 1, \quad |b| < 1$$

et n un entier positif.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. L'aire S est celle d'une ellipse

$$S = \pi a \sqrt{a^2 - z_1^2}.$$

Le volume demandé a pour valeur $\pi^2 a^3$, l'intégrale $\frac{\pi^2 a^5}{8}$.

II. La somme des résidus est évidemment nulle, donc l'intégrale est nulle.

(Lille, juin 1926.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un solide pesant S est formé d'un disque circulaire homogène, de rayon R , d'épaisseur négligeable, muni en son centre A d'une tige rectiligne OA , de longueur R , de masse négligeable, qui lui est invariablement fixée normalement à son plan.*

L'extrémité O de cette tige est articulée sans frottement au sommet d'un trièdre trirectangle fixe $Ox_1y_1z_1$ (Oz_1 verticale ascendante).

Le corps S se meut entre les deux plans matériels fixes

$$(P) \quad z_1 = R; \quad (Q) \quad z_1 = -R,$$

qu'il touche, soit en I , soit en J . On supposera le diamètre du disque légèrement inférieur à la distance des deux plans, de telle sorte que le contact ne puisse avoir lieu simultanément en I et en J .

On désignera par f le coefficient de frottement en ces deux points, par ω la vitesse angulaire de la rotation propre du disque, par λ la vitesse angulaire du plan AOz_1 .

1° *Comment faut-il lancer le corps S pour qu'il se meuve sans appuyer sur les plans P et Q ?*

2° *Le corps S étant supposé immobile, quelle percussion faut-il exercer au point J tangentiellement à la circonférence du disque pour que le mouvement ultérieur remplisse les conditions du premier paragraphe?*

3° *Comment faut-il lancer le corps S pour qu'il roule sans glisser : a. sur le plan inférieur; b. sur le plan supérieur? Étudier ces mouvements.*

4° *Étude générale du mouvement du corps entre les deux plans P et Q avec des vitesses initiales (ω_0, λ_0) quelconques. Discussion.*

Examiner en particulier les deux cas

$$\lambda_0 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}; \quad \lambda_0 = \frac{\omega_0}{2} = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

On se bornera à indiquer l'aspect du mouvement, sans insister sur le calcul, d'ailleurs très simple, des expressions de λ et de ω en fonction de t .

Il sera commode de baser l'étude sur l'équation différentielle que vérifie la vitesse de glissement au point (I ou J) où le contact a lieu.

Indications sur la solution. — 1° Mouvement stationnaire d'une toupie de révolution. La condition est

$$R \omega_0 \lambda_0 = 2g.$$

2° Le moment de la percussion P par rapport à O doit avoir pour valeur le moment cinétique à la fin du choc, d'où, la masse de la toupie étant l'unité,

$$P = \pm \frac{\sqrt{5gR}}{2}.$$

3° a. La condition est simplement

$$\omega_0 + \lambda_0 = 0;$$

b. La condition est

$$\omega_0 = \lambda_0 \quad \text{avec} \quad R \omega_0 \lambda_0 > 2g.$$

4° Le théorème du moment cinétique au point O donne les équations du mouvement sous la forme

$$\frac{R}{2} \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon f N; \quad \frac{5R}{4} \frac{d\lambda}{dt} = \varepsilon f N; \quad \frac{R}{2} \omega \lambda = g - N;$$

avec

$$N > 0; \quad \varepsilon(\lambda + \omega) < 0; \quad \varepsilon = \pm 1$$

dans le cas du contact en J.

La vitesse de glissement u vérifie l'équation

$$R \frac{du}{dt} = \varepsilon f \left[2gR - \frac{(2u+k)(5u-k)}{4g} \right]$$

avec $R(5\lambda - 2\omega) = k$.

On en déduit que, si

$$R \omega_0 \lambda_0 < 2g,$$

$|u|$ décroît et atteint la valeur zéro au bout d'un temps fini; il la conserve indéfiniment.

Si le contact a lieu en I, l'équation en u est

$$35R \frac{du}{dt} = \varepsilon f [(K - 5u)(K + 2u) - 98gR],$$

avec

$$R(5\lambda + 2\omega) = K, \quad \varepsilon(\lambda - \omega) < 0, \quad \varepsilon = \pm 1;$$

Si $K^2 < 80gR$, le contact a lieu en J;

Si $80gR < K^2 < 98gR$, le mouvement tend au bout d'un temps fini vers le mouvement étudié dans 1°;

Si $98gR < K^2$, il y a roulement sans glissement en I au bout d'un temps fini.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une sphère homogène pesante, de rayon $R = 10^{\text{cm}}$, est assujettie à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe, en un lieu dont la latitude est 45 degrés.

Étudier son mouvement en tenant compte de la rotation de la Terre.

On prendra comme axes de référence liés à la Terre, l'horizontale Nord-Sud, l'horizontale Est-Ouest et la verticale issues de la position initiale du centre de la sphère.

u, v, o, p, q, r désigneront respectivement les composantes de la vitesse du centre de la sphère, et les composantes de sa rotation instantanée par rapport à la Terre.

On se bornera à étudier le cas où le mouvement initial de la sphère est une rotation de 10 tours par seconde autour de la verticale de son centre ($u_0 = v_0 = p_0 = q_0 = 0$).

1° Déterminer, dans le cas de cette sphère, la correction à apporter aux lois habituelles de la Mécanique terrestre pour tenir compte de la rotation de la Terre.

2° Déterminer avec précision la trajectoire du centre de la sphère. Indiquer sa nature et ses principales dimensions.

Nota : La pesanteur, ou résultante de l'attraction newtonienne et de la force d'inertie d'entraînement sera supposée constante et normale au plan horizontal donné dans la région où l'on étudie le mouvement de la sphère.

Indications sur la solution. — Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X + \varepsilon\sqrt{2}v, & \frac{2R}{5} \frac{dp}{dt} &= Y + qR \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{5} \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \varepsilon\sqrt{2}u, & \frac{2R}{5} \frac{dq}{dt} &= -X + R \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{5} (r - p) & u - qR &= 0, \\ & & & & v + pR &= 0. \\ 0 &= Z - g - \varepsilon\sqrt{2}v; & \frac{2R}{5} \frac{dr}{dt} &= -R \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{5} q \end{aligned}$$

(ε = vitesse de rotation de la Terre; X, Y, Z désigne la réaction du plan; la masse de la sphère est prise pour unité).

L'élimination de X, Y, p, q, r donne deux équations en u et v , d'où les coordonnées x, y du centre de la sphère :

$$x = A(1 - \cos \rho t); \quad y = \frac{6\varepsilon\sqrt{2}}{7\rho} A(\sin \rho t - \rho t),$$

avec

$$7\rho = \varepsilon\sqrt{79}; \quad 79\varepsilon A = 7Rr_0\sqrt{2}.$$

La trajectoire est la projection orthogonale d'une cycloïde.

(Lille, juin 1936.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. C.79. — *Un disque circulaire homogène, de masse m , de rayon r , est soumis aux liaisons suivantes (sans frottements) : le centre O du disque est fixe et, de plus, un diamètre bien déterminé du disque, soit Δ ce diamètre, est assujéti à faire un angle constant et donné α avec la verticale Oz .*

La position du disque dépend donc de deux paramètres. On prendra les suivants : φ , angle du plan que définissent Oz et Δ avec un plan vertical fixe passant par Oz .

θ , angle du plan du disque avec le plan de Oz et Δ .

1° *Discuter le mouvement pour des conditions initiales quelconques.*

On discutera d'abord par rapport au paramètre θ , puis on examinera si φ varie toujours dans le même sens.

Caractériser tous les mouvements dans lesquels $\frac{d\theta}{dt}$ reste constant.

2° *On suppose qu'à un instant t on ait*

$$\theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad (\text{donné});$$

à cet instant on fixe brusquement le plan (Δ, Oz) , le disque restant mobile autour de l'axe Δ . Calculer la valeur que prend la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$.

3° *On impose au plan (Δ, Oz) un mouvement de rotation uniforme autour de Oz : $\varphi = \omega t + \varphi_0$ (où ω est donné et constant), le disque restant librement mobile autour de Δ . Étudier le mouvement relatif du disque par rapport au plan (Δ, Oz) .*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une circonférence matérielle et pesante, de masse $4m$, de rayon a , peut tourner librement autour d'un axe Oz , fixe et horizontal, qui est invariablement lié à cette circonférence et qui lui est tangent au point O . Un point matériel P , de masse m , glisse sur cette circonférence. On néglige les frottements.*

I étant le centre de la circonférence, on désignera par φ l'angle du rayon IP avec le prolongement de OI et l'on appellera θ l'angle de OI avec la verticale descendante :

1° *Écrire et intégrer les équations des petits mouvements du système autour de sa position d'équilibre stable.*

2° *On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ on ait*

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Calculer, à cet instant, les valeurs des dérivées secondes $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ et déterminer, au même instant, la réaction du point P sur la circonférence.

(Marseille, juin 1926.)

FORMULES RELATIVES A LA FONCTION Γ ;

PAR J. SER.

Étant donnée une fonction supposée développable en série de la forme

$$f(x) = f_0 - x f_1 - \frac{x(1-x)}{2!} f_2 - \frac{x(1-x)(2-x)}{3!} f_3 - \dots,$$

la fonction $V(x)$ s'annulant avec x et satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad V(x+1) - V(x) = f(x)$$

a pour expression

$$V(x) = x f_0 + \frac{x(1-x)}{2!} f_1 + \frac{x(1-x)(2-x)}{3!} f_2 + \dots$$

Considérons maintenant le développement valable pour $x + a > 0$,

$$(2) \quad \frac{a}{x+a} = 1 - \frac{x}{1+a} - \frac{x(1-x)}{(1+a)(2+a)} - \frac{x(1-x)(2-x)}{(1+a)(2+a)(3+a)} - \dots$$

que l'on peut déduire entre autres de l'égalité

$$F(1, -x, 1+a, 1) = \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(a+x)}{\Gamma(a)\Gamma(a+x+1)},$$

F désignant le symbole de la série hypergéométrique.

La fonction

$$a \left[\frac{\Gamma'(x+a)}{\Gamma(x+a)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} \right]$$

s'annule avec x et satisfait aussi à la condition (1).

On en déduit la relation

$$(3) \quad \frac{\Gamma'(x+a)}{\Gamma(x+a)} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{x}{a} + \frac{x(1-x)}{2a(1+a)} + \frac{x(1-x)(2-x)}{3a(1+a)(2+a)} + \dots$$

En intégrant de zéro à x , on introduit les polynômes (1),

$$(4) \quad P_{n+1} = \int_0^x \frac{x(1-x) \dots (n-1-x)}{n!} dx$$

(1) *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1925, p. 126; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1926, p. 818.

qui sont positifs pour $0 < x < 1$ et forment une suite convergente dont la somme est x .

La formule ainsi obtenue,

$$(5) \quad \log \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} = x \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{P_2}{a} + \frac{1! P_3}{a(1+a)} + \dots,$$

est très avantageuse pour le calcul de $\log \Gamma(x)$, si l'on prend pour a un entier suffisamment grand.

Lorsque $\frac{1}{2} < x < 1$, on peut employer de préférence la formule

$$(6) \quad \log \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(x+a)} = (1-x) \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{p_2 - P_2}{a} + \frac{1!(p_3 - P_3)}{a(1+a)} + \dots,$$

les nombres p_h désignant les valeurs de P_h pour $x = 1$.

Le développement obtenu en faisant $x = 1$ dans la formule (5) donne une expression de $\log a$ pour toutes les valeurs positives de a ,

$$(7) \quad \log a = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{p_2}{a} + \frac{1! p_3}{a(1+a)} + \frac{2! p_4}{a(1+a)(2+a)} + \dots$$

M. Appell a établi cette formule dans le cas général (*Acta mathematica*, 1926) en partant d'une formule de Joseph Bertrand.

SUR UN THÉORÈME DE STEINER;

PAR V. THÉBAULT,

Inspecteur d'assurances, au Mans.

Dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1922, p. 128-134, nous avons donné des développements assez curieux relativement à des groupes de cercles et de sphères. Ces recherches nous avaient été suggérées par des configurations envisagées par Steiner.

La lecture d'années déjà anciennes des *Nouvelles Annales* nous y a fait rencontrer un cas particulier, signalé dans notre Mémoire de 1922, question 2103, 1908, p. 479.

Qu'il nous soit permis de reprendre ici, en les complétant parfois, certains passages qui généralisent une question proposée aux lecteurs des *Nouvelles Annales*.

1. Steiner a énoncé le théorème suivant (*Journal de Crelle*, t. II, p. 92) :

Sur les perpendiculaires abaissées d'un point sur les faces d'un tétraèdre ABCD, on marque un quadruple de points A', B', C', D', puis un second quadruple A'', B'', C'', D''. Si O est le point de concours des perpendiculaires abaissées de A, B, C, D sur les plans des faces B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C', et O' celui d'intersection des perpendiculaires abaissées de A, B, C, D sur B''C''D'', C''D''A'', D''A''B'', A''B''C'', la droite OO' est normale au plan d'homologie des tétraèdres A'B'C'D' et A''B''C''D'' (1).

Voici la démonstration simple de M. Neuberg.

Des sommets du tétraèdre ABCD, comme centres, décrivons quatre sphères quelconques, et de leur centre radical S abaissons les perpendiculaires p_a, p_b, p_c, p_d sur les faces BCD, CDA, DAB, ABC. Ces droites sont les axes radicaux des triples de sphères (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C).

Soient A', B', C', D' quatre points quelconques de ces axes. A', B', C', D' sont les centres de quatre sphères respectivement orthogonales aux sphères (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C). La sphère A coupant orthogonalement les sphères (B', C', D'), son centre est situé sur l'axe radical de ces dernières sphères; de même B, C, D appartiennent respectivement aux axes radicaux des groupes de sphères (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C).

On en conclut que les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, D respectivement sur les plans des faces du tétraèdre A'B'C'D', concourent en un point S', centre radical des sphères

(1) En réalité, Steiner a énoncé trois théorèmes analogues : l'un relatif au triangle plan, l'autre au tétraèdre et le troisième au triangle sphérique. Le premier a été démontré pour la première fois par Félix Eberty (*Journal de Crelle*, t. V, p. 107), le second par M. J. Neuberg (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1921, p. 228). Le troisième, à notre connaissance du moins, reste à démontrer.

A', B', C', D' . Les points S, S' sont par suite les *centres d'orthologie* des tétraèdres $(A'B'C'D', ABCD)$ et $(ABCD, A'B'C'D')$.

Prenons sur les droites p_a, p_b, p_c, p_d un second quadruple de points A'', B'', C'', D'' , desquels, comme centres, nous décrivons des sphères coupant orthogonalement les triples de sphères $(B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C)$. Soit S'' le centre d'orthologie des tétraèdres $ABCD$ et $A''B''C''D''$. Les points S', S'' sont les centres de deux sphères coupant orthogonalement, l'une les sphères A', B', C', D' , l'autre les sphères A'', B'', C'', D'' . Les sphères B', C', D' sont orthogonales aux sphères A et S' ; donc le plan $B'C'D'$ est le plan radical des sphères A et S' . De même le plan $B''C''D''$ est le plan radical des sphères A et S'' . Par suite, l'intersection des plans $B'C'D', B''C''D''$ appartient au plan radical des sphères S', S'' . En continuant ainsi, on constate que ce dernier plan contient toutes les intersections de deux faces homologues des tétraèdres $A'B'C'D'$ et $A''B''C''D''$. Autrement dit, *le plan d'homologie de ces tétraèdres est normal à la droite qui joint les centres d'orthologie des tétraèdres $(ABCD, A'B'C'D')$ et $(ABCD, A''B''C''D'')$* .

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$ les projections orthogonales de S', S'' sur les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre. La droite $S'A$, par exemple, est perpendiculaire au plan $B'C'D'$. Mais $S'A$ est un diamètre de la sphère $S' \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$, et, comme les trièdres $(S', \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ et $(S, B'C'D')$ ont leurs arêtes parallèles respectivement, le plan $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ est antiparallèle à $B'C'D'$ par rapport au trièdre $(S, B'C'D')$. De même les plans $\alpha_3 \alpha_4 \alpha_1, \dots, \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ sont antiparallèles aux plans $C'D'A', \dots, A'B'C'$ par rapport aux trièdres de sommet S qui leur correspondent.

Le tétraèdre $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ est donc homothétique à un tétraèdre $a'b'c'd'$, dont les sommets, situés sur SA', SB', SC', SD' , sont les inverses de A', B', C', D' dans une inversion de centre S et de module quelconque k^2 . Pareillement, le tétraèdre $\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \alpha'_4$ est homothétique à un tétraèdre $a''b''c''d''$ obtenu par inversion des points A'', B'', C'', D'' , le centre étant S et le module k'^2 .

Remarquons aussi que les points S' et S, S'' et S sont des couples de points homologues dans les homothéties

$$(a'b'c'd', \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) \quad \text{et} \quad (a''b''c''d'', \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \alpha'_4),$$

car ces points sont les concours de parallèles issues de points homologues. Par suite,

$$\frac{\overline{S'a_1}}{S'a'} = \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2}}{a'b'} = m, \quad \frac{\overline{S''a'_1}}{S'a''} = \frac{\overline{\alpha'_1\alpha'_2}}{a''b''} = m',$$

$$\overline{S'a_1} \cdot \overline{S''a'_1} = mm' \cdot \overline{S'a'} \cdot \overline{S'a''} = \frac{mm' k^2 k'_2}{\overline{SA'} \cdot \overline{SA''}};$$

si bien que

$$\begin{aligned} (\overline{SA'} \cdot \overline{SA''}) \cdot (\overline{S'a_1} \cdot \overline{S''a'_1}) &= (\overline{SB'} \cdot \overline{SB''}) \cdot (\overline{S'a_2} \cdot \overline{S''a'_2}) \\ &= (\overline{SC'} \cdot \overline{SC''}) \cdot (\overline{S'a_3} \cdot \overline{S''a'_3}) \\ &= (\overline{SD'} \cdot \overline{SD''}) \cdot (\overline{S'a_4} \cdot \overline{S''a'_4}), \end{aligned}$$

relation remarquable entre les produits des distances des points S' et S'' aux plans des faces du tétraèdre ABCD et du point S aux sommets des tétraèdres $A'B'C'D'$ et $A''B''C''D''$.

3. Cette égalité est particulièrement curieuse lorsque

$$\overline{SA'} \cdot \overline{SA''} = \overline{SB'} \cdot \overline{SB''} = \overline{SC'} \cdot \overline{SC''} = \overline{SD'} \cdot \overline{SD''},$$

c'est-à-dire quand les points A' et A'' , B' et B'' , C' et C'' , D' et D'' se correspondent dans une inversion de centre S. Alors

$$\overline{S'a_1} \cdot \overline{S''a'_1} = \overline{S'a_2} \cdot \overline{S''a'_2} = \overline{S'a_3} \cdot \overline{S''a'_3} = \overline{S'a_4} \cdot \overline{S''a'_4}.$$

S' et S'' sont alors conjugués isogonaux par rapport au tétraèdre ABCD, c'est-à-dire les foyers d'une quadrique de révolution inscrite à ce tétraèdre. Cette quadrique est un parabolôïde lorsque S' , par exemple, appartient à la surface du troisième ordre lieu des points dont les projections orthogonales sur les faces du tétraèdre ABCD sont situées dans un même plan.

4. Si les quatre sphères de centres A, B, C, D se coupent trois à trois en des points A' , B' , C' , D' et A'' , B'' , C'' , D'' , nous retrouvons ce théorème que nous avons donné en 1921 (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, p. 239) :

Quatre sphères décrites des points A, B, C, D non situés dans un même plan, comme centres, se coupent trois à trois

aux points (A', A'') , (B', B'') , (C', C'') , (D', D'') . Ces points peuvent être répartis en les huit groupes de quatre points :

A', B', C', D'	et	A'', B'', C'', D'' ,
A'', B', C', D'	et	A', B'', C'', D'' ,
B'', C', D', A'	et	B', C'', D'', A'' ,
C'', D', A', B'	et	C', D'', A'', B'' ,
D'', A', B', C'	et	D', A'', B'', C'' ,
A', B', C'', D''	et	A'', B'', C', D' ,
B', C', D'', A''	et	B'', C'', D', A' ,
C', D'', A', B''	et	C'', D'', A', B' .

Les centres ω, ω' des deux sphères passant par des quadruples d'un même groupe sont conjugués isogonaux par rapport au tétraèdre ABCD et sont collinéaires avec le centre radical S des sphères A, B, C, D. Les quadruples de points considérés déterminent quatre groupes de deux tétraèdres homologues. S est un centre de similitude des sphères ω, ω' et la droite $S\omega\omega'$ est normale au plan d'homologie des tétraèdres correspondants. Les points ω, ω' sont les foyers d'une quadrique de révolution inscrite au tétraèdre ABCD dont la sphère principale a pour diamètre la somme ou la différence des rayons des sphères ω, ω' . Si les points A'', B'', C'', D'' , par exemple, sont coplanaires, le centre ω de la sphère $A'B'C'D'$ est situé sur la surface du troisième ordre précitée (1).

Enfin, si les points (A', B', C', D') , (A'', B'', C'', D'') appartiennent à une même sphère Σ , on obtient la question 2103 de R. Gilbert, qui a été résolue autrement par M. R. Bouvaist (*Nouvelles Annales*, 1912, p. 142).

(1) Nous avons donné d'autres développements aux propriétés contenues dans ce Mémoire (*MATHESIS, Contributions à la géométrie du tétraèdre*, 1922, p. 436, et *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, sous le même titre, 1922, p. 104).
 (V. T.)

CORRESPONDANCE.

Nous insérons volontiers ci-dessous les quelques lignes que M. J. Hadamard nous a adressées, en réponse à l'article précédent de M. A. Grévy.

LA RÉDACTION.

Je réponds d'abord d'un mot (car je ne voudrais pas, moi non plus, abuser de l'hospitalité qui m'a été si libéralement offerte par les *Annales*) à la dernière question qui m'est posée par M. Grévy. Est-ce pour sauvegarder, chez nos élèves, le sens du concret et de la réalité, que le programme d'admission à l'École Polytechnique a réduit la Dynamique au mouvement du point *libre*? Sans aucun doute, c'est précisément pour cela. En étudiant la Dynamique du point *lié*, comme vingtième ou trentième chapitre, dans un cours, étendu et lourdement chargé par ailleurs, de Mathématiques pures, l'élève court grand risque d'en négliger l'aspect proprement mécanique et physique, c'est-à-dire de la comprendre à faux.

Dans le principal reproche qui est adressé à ce même programme, celui d'imposer un ordre déterminé et une méthode déterminée pour l'étude des formes et des équations linéaires, il n'y a et il ne saurait y avoir qu'un malentendu. Du moment qu'un tel malentendu existe, je suis le premier, pour ma part, à le regretter, et il ne dépendra pas de moi qu'il ne soit dissipé. Au moment où l'on excluait le théorème de Rouché, on a voulu simplement montrer qu'il y avait effectivement moyen de s'en passer (1).

Car il y avait là-dessus des doutes, je regrette de le dire à notre collègue. Il m'objecte que les professeurs n'ont pas besoin de nous pour lutter contre l'emploi exclusif du théorème de Rouché; d'autres, et non des moins qualifiés, m'ont objecté la nécessité de ce même théorème pour discuter l'intersection de trois plans. Rien de tel, n'est-ce pas? qu'un contradicteur pour répondre à un

(1) Par contre, on tiendra la main, je l'espère du moins, à ce que les candidats soient en état de s'en passer, dans chaque cas concret.

autre contradicteur, et mon ami Grévy trouvera peut-être cette réponse suffisante.

En tout cas, je refuse catégoriquement de le suivre lorsqu'il voit, dans la radiation ou dans le maintien au programme du théorème de Rouché, une attaque contre la science ou le dévouement du corps enseignant. Dans la série de vives critiques que j'ai développées et auxquelles il répond, je le défie de trouver la moindre insinuation dans ce sens, pour la bonne raison qu'elle exprimerait le contraire de ma pensée; et je croyais même m'être prémuni, dès les premières lignes de mon article, contre toute fausse interprétation de ce genre, par le juste hommage que j'ai tenu à rendre à l'enseignement des Mathématiques spéciales dans son ensemble. Ces hautes traditions de l'enseignement sont une chose, l'orientation à lui donner sur tel ou tel point en est une autre : celles-là existent de longue date, celle-ci répond à des préoccupations qui, il faut le regretter d'ailleurs, sont d'apparition récente.

Même avec tout ce que l'on est en droit d'attendre de l'utile initiative des professeurs, n'abusons pas du principe que « les programmes, cela ne fait rien ». Il contient une large part de vérité, je le sais (et je crois l'avoir rappelé dans mon article); mais il n'est pas aussi absolu que mon contradicteur voudrait se le persuader; et, par exemple, je n'arrive pas à admettre qu'il soit sans inconvénient de formuler la théorie des séries dans l'ordre profondément illogique qui a été maintenu au programme par la Commission (d'autant que personne ne nous a jamais dit l'avantage qu'elle voyait à cela, à part celui de respecter une vieille routine). Quel drôle de raisonnement d'ailleurs que celui-ci : « Ne nous gênons pas pour imprimer des sottises, puisque ceux qui appliqueront ce que nous édictons auront plus de bon sens que nous! »

... Somme toute, je crois, et c'est l'essentiel (et le contraire m'aurait d'ailleurs étonné, entre M. Grévy et moi, étant donné ce que nous connaissons de longue date de nos idées à tous deux), nous sommes d'accord sur plus de points qu'on n'aurait pu le supposer, et qu'il n'apparaîtrait même peut-être au premier abord, à la lecture de ce qui précède. Tout au plus reste-t-il la question de savoir si l'on doit traiter par l'indifférence les regrettables résultats auxquels est parvenue la Commission (auquel

cas on peut se demander à quoi servait d'en réunir une) ou si, comme je le crois, ils doivent attirer l'attention, voire celle des pouvoirs publics.

J. HADAMARD.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1926.

NOTA. — a représentera dans tout l'énoncé la mesure d'une longueur donnée.

1° Ox, Oy désignant deux axes rectangulaires, la droite représentée par l'équation

$$(t^2 + 1)(tx - y) + at(t - h) = 0,$$

où l'on considère h comme une constante donnée, et t comme un paramètre variable, enveloppe une courbe que l'on désigne par Γ_h .

Quel est le lieu des points d'où l'on peut mener à Γ_h deux tangentes rectangulaires?

Indiquer une construction géométrique de la troisième tangente à Γ_h issue d'un point du lieu. De cette construction, conclure que Γ_h peut être considérée comme l'enveloppe d'une droite D définie de la manière suivante : un point M décrit un cercle donné de centre ω , la droite D passe constamment par M , et pivote autour de M , sa vitesse de rotation étant dans un rapport constant avec celle du rayon ωM . Il résulte de cette définition que les courbes Γ_h correspondant aux diverses valeurs de h sont semblables. Quelle est la valeur du rapport de similitude de la courbe Γ_h et de la courbe Γ_0 (correspondant à la valeur zéro du nombre h)?

Construire Γ_0 .

2° Oz désignant un axe perpendiculaire à Ox, Oy , on désigne par Γ'_h la courbe du plan $z = ah$ qui a pour projection orthogonale sur le plan xOy la courbe Γ_h , et par S la surface engendrée par Γ'_h quand h varie.

Montrer que S peut aussi être regardée comme engendrée par une droite G .

Montrer que sur chaque génératrice rectiligne G de S il existe un point R et un seul qui est point de rebroussement pour la courbe Γ_h qui y passe.

Le lieu (A) de R lorsque G varie peut être représenté par les expressions

$$x = \frac{a}{t(t^2 - 3)}, \quad y = \frac{at^2}{t^2 - 3}, \quad z = \frac{a(1 - 3t^2)}{t(t^2 - 3)}.$$

3° Calculer l'aire intérieure à Γ_0 et le volume limité par la surface S et les deux plans $z = 0$, $z = a$.

4° Étant donnés trois nombres t_1, t_2, t_3 , former l'équation du plan qui contient les points de (A) correspondant aux valeurs t_1, t_2, t_3 du paramètre t . Quelle est l'équation du plan osculateur à (A) au point correspondant à la valeur t_0 du paramètre t ?

Par un point quelconque donné P (coordonnées ξ, η, ζ), on peut mener trois plans osculateurs à (A) . Former l'équation du plan π contenant les trois points de contact, et montrer que ce plan passe par P .

Où doit être situé P pour que le plan π soit parallèle au plan xOy ? Montrer que dans ce cas les points de contact sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre P . Quelle est dans ce cas la nature de la surface engendrée par le cercle circonscrit à ce triangle?

5° h désignant de nouveau une constante donnée, on considère dans le plan xOy les coniques

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda^2} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda^2} = 1,$$

où α^2, β^2 sont des constantes différentes données, et λ^2 un paramètre. A une droite d du plan correspond en général une droite d' et une seule qui soit conjuguée de d par rapport à toutes ces coniques. Quelle est l'enveloppe de d' lorsque d enveloppe Γ_h ?

6° h désignant encore une constante donnée, soient M_1, M_2, M_3 les points où une tangente mobile à Γ_h rencontre Ox, Oy et une tangente T à Γ_h (distincte de Ox, Oy , fixe, arbitrairement choisie, sur laquelle on choisit un sens positif);

soient A_1, A_2, A_3 trois points fixes arbitrairement choisis sur Ox, Oy, T .

Montrer qu'il y a entre les valeurs algébriques des segments A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 une relation de la forme

$$k_1 \overline{A_1M_1} + k_2 \overline{A_2M_2} + k_3 \overline{A_3M_3} + k = 0,$$

où k_1, k_2, k_3, k sont des constantes.

SOLUTION PAR M. J. LEMAIRE.

I. La droite (D) représentée par l'équation

$$(1) \quad (t^2 + 1)(tx - y) + at(t - h) = 0$$

ayant pour coefficient angulaire t , il existe une telle droite, et une seule, ayant une direction donnée; comme cette équation est du troisième degré en t , l'enveloppe Γ_h de la droite est une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini. En identifiant l'équation (1) avec l'équation

$$ux + vy + w = 0$$

et éliminant t , nous obtenons

$$w(u^2 + v^2) + auv(u + hv) = 0,$$

équation tangentielle d'une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques: Γ_h est donc une *hypocycloïde à trois rebroussements*.

Tirant x et y du système

$$\begin{cases} t(t^2 + 1)x - (t^2 + 1)y = -at(t - h), \\ (3t^2 + 1)x - 2ty = -2at + ah, \end{cases}$$

formé par l'équation (1) et l'équation dérivée par rapport à t , nous obtenons

$$(2) \quad \begin{cases} x = a \frac{(1 - t^2)h - 2t}{(t^2 + 1)^2}, \\ y = a \frac{-2t^3h + t^2(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}; \end{cases}$$

ce sont les équations paramétriques de Γ_h , courbe unicursale du quatrième ordre.

Par un point (x, y) passent trois droites (D) dont les coefficients angulaires sont les racines en t de l'équation (1), laquelle peut s'écrire

$$xt^3 - (y - a)t^2 + (x - ah)t - y = 0;$$

le produit des racines étant $\frac{y}{x}$, pour que deux des droites soient rectangulaires, il faut et il suffit que $\left(-\frac{y}{x}\right)$ soit racine; en écrivant cette condition, nous obtenons

$$(C_h) \quad 2(x^2 + y^2) - a(y + hx) = 0.$$

On voit que le lieu des points d'où l'on peut mener à Γ_h deux tangentes rectangulaires est un cercle passant par l'origine O, par le point A $\left(\frac{ah}{2}, 0\right)$ variable avec h , et par le point fixe B $\left(0, \frac{a}{2}\right)$; son centre est le point $\omega \left(\frac{ah}{4}, \frac{a}{4}\right)$, et son rayon a pour expression

$$\rho = \frac{a}{4} \sqrt{h^2 + 1}.$$

$M(x, y)$ étant un point quelconque du cercle, la tangente D à Γ_h , autre que les tangentes rectangulaires issues de ce point, a pour coefficient angulaire $\left(-\frac{y}{x}\right)$, c'est-à-dire le coefficient angulaire de OM changé de signe; par suite OM et D tournent respectivement autour de O et M avec des vitesses opposées; autrement dit, si M' est le second point commun à D et au cercle, les arcs \widehat{AM} et \widehat{OM}' , comptés en sens contraires, sont dans le rapport $\frac{1}{2}$; on reconnaît la génération tangentielle d'une hypocycloïde à trois rebroussements tritangente au cercle (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 49). La vitesse angulaire de ωM , qui tourne autour de ω , est double de celle de OM, dans le rapport (-2) avec celle de D.

Toutes les H_3 (cette notation désignant une hypocycloïde à trois rebroussements quelconque) sont semblables, puisqu'une telle courbe ne dépend en grandeur que du rayon du cercle qui lui est tritangent; en particulier, Γ_h et Γ_0 sont semblables; les rayons ρ et ρ_0 de leurs cercles tritangents étant $\frac{a}{4} \sqrt{h^2 + 1}$ et $\frac{a}{4}$, le rapport de similitude de Γ_h à Γ_0 est $\sqrt{h^2 + 1}$.

Le cercle C_0 de l'hypocycloïde Γ_0 à OB pour diamètre; Γ_0 est tangente à ce cercle en O et en deux autres points formant avec O un triangle équilatéral; le point symétrique de O par rapport à B est un point de rebroussement.

Γ_h est aussi facile à construire, l'un des points où elle touche le cercle C_h est au tiers de l'arc OA à partir de A ; en donnant à t les valeurs zéro et ∞ , on voit, à l'aide de l'équation (1) et des formules (2), que Ox et Oy sont tangentes à Γ_h aux points A' et B' symétriques de O par rapport à A et B ; on s'assurerait aisément que la courbe est tangente aussi à $A'B'$ et à la perpendiculaire menée de O à AB , et l'on trouverait les points de contact. Tout cela résulte d'ailleurs immédiatement des propriétés élémentaires de l'hypocycloïde à trois rebroussements; rappelons simplement que la droite D touche son enveloppe au point symétrique de M' par rapport à M .

II. La surface S engendrée par Γ_h quand h varie a pour équations paramétriques

$$(S) \begin{cases} x = a \frac{(1-t^2)h - 2t}{(t^2+1)^2}, \\ y = at^2 \frac{-2th + t^2 - 1}{(t^2+1)^2}, \\ z = ah; \end{cases}$$

c'est une surface unicursale du quatrième ordre, et comme ces équations, pour une valeur déterminée de t , représentent une droite G , la surface est réglée; les lignes coordonnées sont ces génératrices, et les H_3 correspondant aux diverses valeurs de h , et situées dans les plans parallèles au plan xOy .

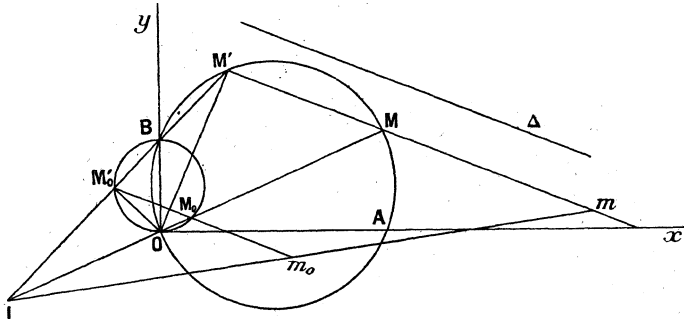
Nous allons montrer que S est *développable* et trouver son arête de rebroussement; les notations étant les mêmes que plus haut, considérons dans le plan xOy la courbe Γ_h et les cercles C_h et C_0 , ainsi que la tangente D à Γ_h qui est parallèle à une direction fixe donnée Δ ; le point de contact de D est le point m symétrique de M' par rapport à M ; appelant α l'angle $(\widehat{OM, Ox})$, nous avons

$$\widehat{yBM'} = \widehat{OMM'} = 2\alpha;$$

si donc h varie, et par suite aussi Γ_h , la droite BM' reste fixe;

comme il en est de même de OM , le lieu de m est une droite qu'on détermine aisément à l'aide du cercle C_0 ; I étant le point commun aux droites OM_0M et BM'_0M' , et m_0 le point symétrique de M'_0 par rapport à M_0 ; cette droite est Im_0 .

Fig. 1.



Si nous observons que, quand h varie, l'hypocycloïde Γ_h reste tangente à Ox en un point variable A' , et à Oy au point fixe B' , nous voyons que le résultat ci-dessus est un cas particulier de ce théorème : *le lieu géométrique du point de contact d'une H_3 inscrite à un triangle avec une tangente de direction fixe est une droite* (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 115).

Appelons Γ'_h la courbe H_3 du plan $z = ah$, qui se projette suivant Γ_h sur le plan xOy , m_1 le point de Γ'_h qui se projette en m , et montrons que $\frac{m_1 m}{m_0 m}$ reste constant quand h varie; les triangles OBM' et OBM'_0 donnent

$$\frac{OM'}{OM'_0} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

et par suite,

$$\overline{M'M'_0}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OM'_0}^2 = \overline{OM'_0}^2 \left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2} - 1 \right) = \overline{OM'_0}^2 \cdot h^2,$$

d'où, en supposant $h > 0$ par exemple,

$$M'M'_0 = OM'_0 \cdot h,$$

et

$$\frac{m_1 m}{m_0 m} = \frac{ah}{M'_0 M'} \frac{M'_0 M'}{m_0 m} = \frac{a}{OM'_0} \text{ const} = \text{const};$$

il résulte de là que le lieu de m_1 est une droite perçant le plan xOy

en m_0 sur Γ_0 : si t désigne le coefficient angulaire invariable de Δ , la droite précédente n'est autre que la génératrice G obtenue plus haut.

Les tangentes aux hypocycloïdes Γ'_h aux points m_i de G étant parallèles, en ces divers points la surface S a le même plan tangent, c'est donc une *surface développable*.

Montrons que sur la génératrice G il existe un point R , et un seul, qui est un rebroussement pour l'hypocycloïde horizontale qui y passe; pour que m_i soit un point de rebroussement de Γ'_h , et par suite m un point de rebroussement de Γ_h , il faut et il suffit que MM' soit un diamètre pour le cercle C_h , d'où la construction suivante de R : menons en O la perpendiculaire à IOm_0 qui coupe IM_0B en Q' , et traçons le cercle $OQ'B$, et le diamètre $Q'Q$ de ce cercle, lequel a la direction Δ ; l'hypocycloïde Γ_h relative à ce cercle a un rebroussement au point q symétrique de Q' par rapport à Q , l'hypocycloïde Γ'_h correspondante a un rebroussement R au point qui se projette en q sur le plan xOy ; ce point R appartient à la génératrice G , sur laquelle n'existe évidemment aucun autre point analogue.

C'est le point où G touche l'*arête de rebroussement* de S , qui n'est autre que le lieu des points de rebroussement des hypocycloïdes Γ'_h .

Cherchons les équations de cette courbe (A) : en désignant par ω l'angle $(\widehat{OQ, Ox})$, on trouve aisément que les coordonnées des points Q et Q' sont

$$\begin{aligned} (Q) \left\{ \begin{array}{l} 2\rho \cos \omega \cos 2\omega, \\ 2\rho \sin \omega \cos 2\omega, \end{array} \right. \\ (Q') \left\{ \begin{array}{l} -2\rho \sin \omega \sin 2\omega, \\ 2\rho \cos \omega \sin 2\omega, \end{array} \right. \end{aligned}$$

ρ étant le rayon du cercle OQQ' ; un calcul simple permet d'en déduire celles de q ,

$$(q) \quad 4\rho \cos^3 \omega, \quad -4\rho \sin^3 \omega;$$

comme, d'autre part,

$$2\rho = \frac{OB}{\sin 3\omega} = \frac{a}{2 \sin 3\omega},$$

on a finalement, pour les coordonnées de R,

$$(R) \quad \frac{a \cos^3 \omega}{\sin 3 \omega}, \quad - \frac{a \sin^3 \omega}{\sin 3 \omega}, \quad ah;$$

t et ω ayant toujours la même signification, de sorte que

$$t = - \operatorname{tang} \omega,$$

les deux premières de ces coordonnées s'écrivent

$$x = \frac{a \cos^3 \omega}{3 \sin \omega \cos^2 \omega - \sin^3 \omega} = \frac{a}{3 \operatorname{tang} \omega - \operatorname{tang}^3 \omega} = \frac{a}{t(t^2 - 3)},$$

$$y = - \frac{a \sin^3 \omega}{3 \sin \omega \cos^2 \omega - \sin^3 \omega} = - \frac{a \operatorname{tang}^3 \omega}{3 \operatorname{tang} \omega - \operatorname{tang}^3 \omega} = \frac{at^2}{t^2 - 3};$$

pour avoir la troisième, remarquons que

$$\rho \quad \text{ou} \quad \frac{a}{4 \sin 3 \omega} = \frac{a}{4} \sqrt{h^2 + 1},$$

d'où

$$h = \frac{1}{\operatorname{tang} 3 \omega} = \frac{1 - 3 \operatorname{tang}^2 \omega}{3 \operatorname{tang} \omega - \operatorname{tang}^3 \omega} = \frac{1 - 3 t^2}{t^3 - 3 t};$$

on a donc enfin les expressions suivantes pour les coordonnées de R :

$$(R) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{t(t^2 - 3)}, \\ y = \frac{at^2}{t^2 - 3}, \\ z = \frac{a(1 - 3t^2)}{t(t^2 - 3)}. \end{array} \right.$$

Ces équations représentent l'arête de rebroussement (A) de la surface S; les génératrices G de la surface sont les tangentes à cette courbe, qui est une cubique gauche admettant pour axe de symétrie la droite OB qu'elle coupe à angle droit au point B'(0, a, 0). Un calcul fort simple permet de s'assurer que les traces des tangentes à (A) sur le plan $z = ah$ forment une courbe dont les équations sont

$$X = \frac{a}{(t^2 + 1)^2} [(1 - t^2)h - 2t],$$

$$Y = \frac{at^2}{(t^2 + 1)^2} [-2ht + (t^2 - 1)],$$

qui ne diffèrent pas de (2); cette courbe est donc Γ'_h . Les traces

de la cubique (A) sur tout plan parallèle au plan xOy sont les sommets d'un triangle équilatéral.

III. Nous reportant à la génération de l'hypocycloïde Γ_0 , considérons sur le cercle C_0 deux points infiniment voisins M et N, et les points M' et N' tels que les arcs AM et AM', AN et AN' soient de sens contraires et dans le rapport $\frac{1}{2}$; μ désignant le point commun aux droites MM' et NN', m sa position limite quand N vient coïncider avec M, le lieu de m est la courbe Γ_0 . Il suffit d'observer que le rapport $\frac{\text{aire } \mu MN}{\text{aire } \mu M'N'}$ est égal à $\frac{1}{4}$, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, pour obtenir l'expression $2\pi r^2$ pour l'aire de Γ_0 , r désignant le rayon du cercle.

L'aire intérieure à Γ_h est, par suite, $2\pi\rho^2$ ou $\frac{\pi a^2}{8}(h^2 + 1)$, d'où il résulte que le volume limité par la surface S et les plans $z = 0$ et $z = a$ est donné par

$$V = \int_0^1 \frac{\pi a^2}{8} (h^2 + 1) a dh = \frac{\pi a^3}{6}.$$

IV. Il est aisé d'écrire l'équation du plan qui contient les points de (A) correspondant aux valeurs t_1, t_2, t_3 du paramètre t , et d'en déduire l'équation du plan osculateur à (A) au point correspondant à la valeur t_0 du paramètre; mais nous éviterons ce calcul un peu long en observant que si R est le point de (A) correspondant au paramètre t_0 , et G la génératrice de S tangente en ce point à la courbe, le plan osculateur en R est déterminé par G et par la tangente T_0 à Γ_0 au point m_0 trace de G sur le plan xOy . Reprenant

les notations employées plus haut, désignons par ω l'angle $\widehat{M_0 O x}$, les coordonnées de M_0 sont

$$\frac{a}{2} \sin \omega \cos \omega, \quad \frac{a}{2} \sin^2 \omega,$$

le coefficient angulaire de T_0 est $(-\text{tang } \omega)$, et l'équation de cette droite

$$y - \frac{a}{2} \sin^2 \omega = -\text{tang } \omega \left(x - \frac{a}{2} \sin \omega \cos \omega \right)$$

ou

$$y = -x \text{ tang } \omega + a \sin^2 \omega;$$

l'équation du plan osculateur en R à la courbe (A) est de la forme

$$x \operatorname{tang} \omega + y - a \sin^2 \omega + kz = 0,$$

et si l'on écrit que le point R $\left(\frac{a \cos^3 \omega}{\sin 3 \omega}, -\frac{a \sin^3 \omega}{\sin 3 \omega}, \frac{a \cos 3 \omega}{\sin 3 \omega} \right)$ appartient à ce plan, la condition obtenue conduit à cette valeur de k ,

$$k = -\sin \omega \cos \omega.$$

L'équation du plan osculateur prend ainsi la forme

$$x \operatorname{tang} \omega + y - z \sin \omega \cos \omega - a \sin^2 \omega = 0;$$

comme $\operatorname{tang} \omega = -t_0$, cette équation devient finalement

$$t_0(t_0^2 + 1)x - (t_0^2 + 1)y - t_0z + at_0^2 = 0.$$

Cette équation du plan osculateur pouvait être écrite immédiatement en remplaçant dans l'équation (1) ah par z , puisque le plan représenté par la nouvelle équation ainsi obtenue

$$(t^2 + 1)(tx - y) - tz + at^2 = 0$$

est coupé par les plans parallèles au plan xOy suivant des tangentes aux H_3 correspondantes, parallèles entre elles, et dont les points de contact sont précisément les points de la génératrice G de (S) qui correspond à la valeur t du paramètre.

Les paramètres des points de (A) pour lesquels les plans osculateurs passent par un point donné P(ξ, η, ζ) sont les valeurs de t déterminées par

$$t(t^2 + 1)\xi - (t^2 + 1)\eta - t\zeta + at^2 = 0$$

ou

$$\xi t^3 - (\eta - a)t^2 + (\zeta - \zeta)t - \eta = 0;$$

donc par P passent trois plans osculateurs à la courbe (A).

Si un plan a pour équation

$$Ax + By + Cz + 1 = 0,$$

l'équation aux t des points de (A) qui appartiennent à ce plan est

$$\frac{Aa}{t(t^2 - 3)} + \frac{Bat^2}{t^2 - 3} + \frac{Ca(1 - 3t^2)}{t(t^2 - 3)} + 1 = 0$$

ou

$$(Ba + 1)t^3 - 3Cat^2 - 3t + (A + C)a = 0;$$

identifions cette équation et l'équation en t ci-dessus, nous avons

$$\frac{Ba + 1}{\xi} = \frac{3Ca}{\eta - a} = \frac{3}{\zeta - \xi} = \frac{-(A + C)a}{\eta},$$

relations qui donnent

$$A = \frac{a - 4\eta}{a(\zeta - \xi)}, \quad B = \frac{4\xi - \zeta}{a(\zeta - \xi)}, \quad C = \frac{\eta - a}{a(\zeta - \xi)};$$

par suite, le plan des trois points pour lesquels le plan osculateur à (A) passe en P a pour équation

$$(\pi) \quad (a - 4\eta)x + (4\xi - \zeta)y + (\eta - a)z + (\zeta - \xi)a = 0,$$

on vérifie qu'il contient le point P; c'est d'ailleurs une propriété bien connue des cubiques gauches.

Pour que le plan (π) soit parallèle au plan xOy , il faut et il suffit que

$$\begin{cases} a - 4\eta = 0, \\ 4\xi - \zeta = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que le point P appartienne à la droite

$$\begin{cases} y = \frac{a}{4}, \\ z = 4x, \end{cases}$$

lieu du centre du cercle C'_h quand h varie, en désignant par C_h le cercle, projeté suivant C_h , qui est tritangent à l'hypocycloïde Γ'_h . Les points pour lesquels les plans osculateurs passent en P sont, dans le cas actuel, les points de rebroussement de l'hypocycloïde Γ'_h située dans le plan $z = \zeta$; les traces sur ce plan des plans osculateurs sont les tangentes de rebroussement de Γ'_h , lesquelles concourent au centre de C'_h .

Quand h varie, ce cercle se déplace et se déforme en s'appuyant sur Oz , sur la parallèle à Oz menée par B, et sur la droite $y = 0$, $z = 2x$; son plan restant d'ailleurs parallèle au plan xOy , il engendre un hyperboloïde à une nappe dont on aurait sans peine l'équation, et qui a des génératrices perpendiculaires aux plans de ses sections circulaires. Les points de rebroussement de Γ'_h , qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, appartiennent à un cercle dont le rayon est le triple du rayon de C'_h ; le lieu de ce nou-

veau cercle dérive, par une homographie immédiate, de l'hyperboloïde précédent; nous ne nous arrêterons pas à établir son équation.

V. Supposons, pour fixer les idées, $\alpha > \beta$, et soit $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, l'équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda^2} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda^2} = 1,$$

où α et β sont des constantes données, et λ un paramètre, représente une famille de coniques ayant pour foyers les points F et F' de Ox qui ont $\pm \gamma$ pour abscisses; à une droite (d) du plan correspond une droite (d'), et une seule, conjuguée de (d) par rapport à toutes ces coniques; cette droite (d') est perpendiculaire à (d) et coupe Ox en un point D' conjugué harmonique, par rapport à F et F', du point D où (d) coupe le même axe; la question est la suivante: (d) enveloppe Γ_h , trouver l'enveloppe de (d'). L'équation de (d) étant

$$(t^2 + 1)(tx - y) + at(t - h) = 0,$$

on a

$$\overline{OD} = -\frac{a(t-h)}{t^2+1},$$

$$\overline{OD'} = -\frac{\gamma^2(t^2+1)}{a(t-h)},$$

d'où, pour (d'), l'équation suivante

$$y = -\frac{1}{t} \left(x + \frac{\gamma^2(t^2+1)}{a(t-h)} \right),$$

qu'on peut écrire

$$(ay + \gamma^2)t^2 + a(x - hy)t + (\gamma^2 - ahx) = 0;$$

l'enveloppe de cette droite, représentée par

$$a^2(x - hy)^2 - 4(ay + \gamma^2)(\gamma^2 - ahx) = 0$$

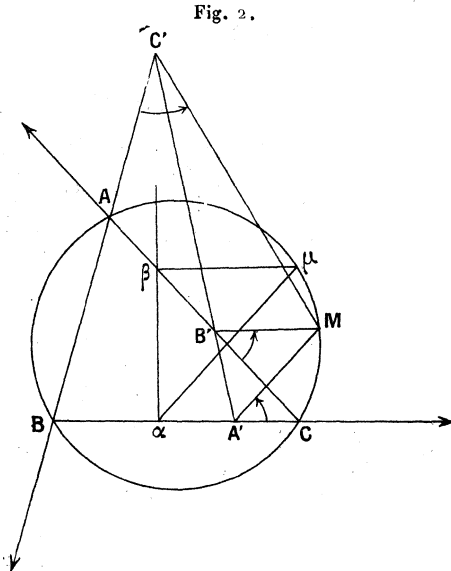
ou

$$a^2(x + hy)^2 - 4\gamma^2[a(y - hx) + \gamma^2] = 0,$$

est une parabole qui a pour axe la parallèle menée par l'origine au diamètre AB déterminé sur le cercle C_h par les axes de coordonnées. Dès considérations géométriques simples permettraient d'établir ces résultats et de construire quelques tangentes de cette

parabole, par exemple celles qui sont perpendiculaires aux tangentes de rebroussement de Γ_h , ou aux axes de coordonnées.

VI. Considérons un triangle ABC formé par trois tangentes à l'hypocycloïde Γ_h coupées en A', B', C' par une quatrième tangente; ces quatre tangentes fixes déterminent l'hypocycloïde (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 70) : les cercles $AB'C', BC'A', CA'B'$ ont un point commun M qui appartient aussi au cercle ABC ; les côtés BC, CA, AB doivent tourner d'un même angle, dans le même sens, autour de A', B', C' pour venir coïncider avec $A'M, B'M, C'M$; et si, d'un point quelconque μ du cercle ABC , on mène aux droites MA', MB', MC' des parallèles qui rencontrent en α, β, γ



les côtés correspondants, ces derniers points sont sur une droite dont l'enveloppe, quand μ varie, est l'hypocycloïde.

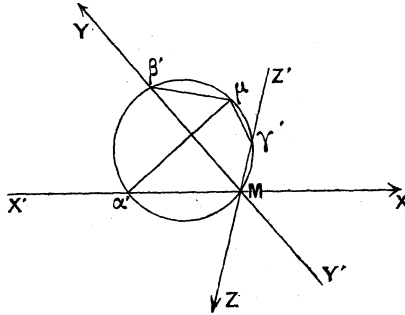
Ceci posé, a, b, c désignant les longueurs des côtés du triangle ABC , et ces côtés $\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AB}$ étant supposés orientés, nous allons démontrer que

$$c \cdot \overline{A'\alpha} + b \cdot \overline{B'\beta} + c \cdot \overline{C'\gamma} = 0,$$

lorsque, les quatre premières tangentes restant fixes, la cinquième $\alpha\beta\gamma$ varie.

Menons par M les droites dirigées $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$ parallèles aux côtés BC, CA, AB du triangle ABC et de mêmes sens positifs qu'eux,

Fig. 3.



et soient α' , β' , γ' les points où ces axes sont rencontrés par $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ respectivement, de sorte que $\overline{M\alpha'}$, $\overline{M\beta'}$, $\overline{M\gamma'}$ sont égaux à $\overline{A'\alpha}$, $\overline{B'\beta}$, $\overline{C'\gamma}$; l'angle \widehat{MX} , $\alpha'\mu$ et les deux angles analogues étant égaux, les points M, μ , α' , β' , γ' sont sur un cercle, et la figure donne, en appliquant le théorème de Ptolémée au quadrilatère $M\alpha'\beta'\gamma'$,

$$Mx' \cdot \beta'\gamma' + M\gamma' \cdot \alpha'\beta' = M\beta' \cdot \gamma'\alpha'$$

ou, en introduisant les valeurs algébriques des segments portés par les axes issus de M,

$$\overline{M\alpha'} \cdot \beta'\gamma' + \overline{M\beta'} \cdot \gamma'\alpha' + \overline{M\gamma'} \cdot \alpha'\beta' = 0,$$

ou encore, en appelant ρ le rayon du cercle $\alpha'\beta'\gamma'$,

$$\overline{M\alpha'} \cdot 2\rho \sin A + \overline{M\beta'} \cdot 2\rho \sin B + \overline{M\gamma'} \cdot 2\rho \sin C = 0,$$

d'où

$$\overline{A'\alpha} \cdot \sin A + \overline{B'\beta} \cdot \sin B + \overline{C'\gamma} \cdot \sin C = 0,$$

et finalement

$$a \cdot \overline{A'\alpha} + b \cdot \overline{B'\beta} + c \cdot \overline{C'\gamma} = 0;$$

cette égalité généralise, en la précisant, la relation demandée.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

333.

(1856, p. 243; 1916, p. 192).

Étant donnée une ligne d'intersection de deux surfaces de degrés m et n , quels sont les degrés respectifs des surfaces formées par les normales principales, les tangentes de la courbe et les axes des plans osculateurs?

SOLUTION

Par N. ABRAMESCO.

On sait (SALMON, *Leçons d'Algèbre supérieure*, édition 1890, p. 269, « Sur l'ordre des systèmes d'équations soumis à des restrictions ») que l , m , n , r étant les degrés des quatre équations à trois inconnues, supposant qu'une quantité quelconque figure dans les coefficients des équations aux degrés λ , μ , ν , ρ respectivement, cette quantité entrera dans le résultant au degré

$$\lambda mn r + \mu n r l + \nu r l m + \rho l m n.$$

1° Considérons la développable engendrée par les tangentes à la courbe d'intersection des surfaces $U = 0$, $V = 0$, de degrés m et n . (x_1, y_1, z_1, t_1) étant un point de cette courbe, l'équation de la développable s'obtient en éliminant x_1, y_1, z_1, t_1 entre les équations

$$U(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0, \quad V(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0,$$

et

$$x \frac{\partial U}{\partial x_1} + y \frac{\partial U}{\partial y_1} + z \frac{\partial U}{\partial z_1} + t \frac{\partial U}{\partial t_1} = 0, \quad x \frac{\partial V}{\partial x_1} + y \frac{\partial V}{\partial y_1} + z \frac{\partial V}{\partial z_1} + t \frac{\partial V}{\partial t_1} = 0,$$

de degrés $m, n, m-1, n-1$ par rapport à x_1, y_1, z_1, t_1 et $0, 0, 1, 1$ par rapport à x, y, z, t ; donc le résultant, ou l'équation de la développable engendrée par les tangentes, est par rapport à x, y, z de degré

$$mn(n-1) + mn(m-1) = mn(m+n-2).$$

2° La développable engendrée par la droite polaire (axe du plan osculateur). Cette droite est la caractéristique du plan normal à la courbe

$$(1) \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

$$A = \frac{D(U, V)}{D(y_1, z_1)}, \quad B = \frac{D(U, V)}{D(z_1, x_1)}, \quad C = \frac{D(U, V)}{D(x_1, y_1)},$$

$$\frac{D(U, V)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Différentiant (1), on trouve

$$(2) \quad \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial A}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial A}{\partial z_1} dz_1 \right) (x - x_1) - A dx_1 + \dots = 0.$$

Or

$$\frac{dx_1}{D(U, V)} = \frac{dy_1}{D(U, V)} = \frac{dz_1}{D(U, V)},$$

$$\frac{D(U, V)}{D(y_1, z_1)} = \frac{D(U, V)}{D(z_1, x_1)} = \frac{D(U, V)}{D(x_1, y_1)},$$

et donc (2) devient

$$(3) \quad \left(A \frac{\partial A}{\partial x_1} + B \frac{\partial A}{\partial y_1} + C \frac{\partial A}{\partial z_1} \right) (x - x_1) - A^2 + \dots = 0.$$

Il faut éliminer x_1, y_1, z_1 entre $U(x_1, y_1, z_1) = 0, V(x_1, y_1, z_1) = 0,$ (1) et (3) qui sont respectivement de degrés $m, n, m+n-1, 2m+2n-4$ par rapport à x_1, y_1, z_1 et de degrés $0, 0, 1, 1$ par rapport à x, y, z ; donc le degré de la développable engendrée par la droite polaire est

$$mn(2m+2n-4) + mn(m+n-1) = mn(3m+3n-5).$$

3° Surface formée par les normales principales. Cette droite est à l'intersection du plan normal (1) et du plan osculateur. Or, on sait (SALMON, *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, 2^e partie, p. 124) que l'équation du plan osculateur en un point à la courbe d'intersection des surfaces $U = 0, V = 0$, de degrés m et n , a pour équation

$$(4) \quad \frac{S'}{(n-1)^2} \left(x \frac{\partial U}{\partial x_1} + y \frac{\partial U}{\partial y_1} + z \frac{\partial U}{\partial z_1} + t \frac{\partial U}{\partial t_1} \right)$$

$$= \frac{S}{(m-1)^2} \left(x \frac{\partial V}{\partial x_1} + y \frac{\partial V}{\partial y_1} + z \frac{\partial V}{\partial z_1} + t \frac{\partial V}{\partial t_1} \right),$$

où

$$S = \begin{vmatrix} a & h & g & l & \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ h & b & f & m & \frac{\partial V}{\partial y_1} \\ g & f & c & n & \frac{\partial V}{\partial z_1} \\ l & m & n & d & \frac{\partial V}{\partial t_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial y_1} & \frac{\partial V}{\partial z_1} & \frac{\partial V}{\partial t_1} & 0 \end{vmatrix},$$

$$a = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad b = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad c = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad d = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad f = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z},$$

$$g = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}, \quad h = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad l = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}, \quad m = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t}, \quad n = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t}$$

et S' le déterminant analogue pour la surface V . L'équation (4) est, par rapport à x_1, y_1, z_1 , de degré

$$(n-1) + 3(m-2) + 2(n-1) = 3(m+n-3).$$

L'équation de la surface s'obtient en éliminant x_1, y_1, z_1 entre

$$U(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad V(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

(1) et (4) qui sont, par rapport à x_1, y_1, z_1 , de degrés $m, n, m+n-1, 3(m+n-3)$ et, par rapport à x, y, z , de degrés $0, 1, 1$; son degré est donc

$$3mn(m+n-3) + mn(m+n-1) = 2mn(2m+2n-5).$$

805.

(1867, p. 188; 1917, p. 156.)

On donne deux surfaces (S), (S'), la première fixe, l'autre se rapprochant indéfiniment de celle-ci. D'un point A de (S) et dans le plan tangent à cette surface on mène des tangentes à (S'). Quelle est la limite des positions de ces tangentes lorsque (S') tend vers (S), de façon que le point où (S') est touchée à chaque instant par un plan parallèle au plan tangent mené par le point A à (S) décrive une ligne qui coupe cette surface sous un angle fini? O. BONNET.

SOLUTION

Par N. ABRAMESCO.

A étant l'origine O des coordonnées rectangulaires, le plan tangent en A à (S) le plan xOy , soit

$$(1) \quad z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varphi_3 + \dots$$

l'équation de la surface (S). Supposons que la surface variable (S') est représentée par l'équation

$$z = F(x, y),$$

variable avec λ . Soit $A'(\xi, \eta, \zeta)$ le point de (S') où le plan tangent est parallèle au plan xOy . On a

$$\zeta = F(\xi, \eta, \lambda), \quad F'_\xi(\xi, \eta, \lambda) = 0, \quad F'_\eta(\xi, \eta, \lambda) = 0.$$

D'où

$$\xi = \varphi(\lambda), \quad \eta = \psi(\lambda), \quad \zeta = F[\varphi(\lambda), \psi(\lambda), \lambda].$$

La condition que la courbe $\xi = \varphi(\lambda), \eta = \psi(\lambda), \zeta = F(\xi, \eta, \lambda)$ coupe la surface (S) sous un angle fini exprime que l'angle de la tangente en O à

cette courbe et la normale à (S) en O est fini, ou que $\left(\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} \neq 0$. Or,

$$\frac{d\zeta}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda},$$

et comme $\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$, il en résulte $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \neq 0$.

L'équation de la surface (S') peut s'écrire

$$z = F(\xi, \eta, \lambda) + \frac{1}{1.2} \left[(x - \xi)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2(x - \xi)(y - \eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + (y - \eta)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right] + \dots,$$

et quand $\lambda \rightarrow 0$, on a $\xi \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$, $F(\xi, \eta, \lambda) \rightarrow 0$, et z prend la forme (1).

La courbe d'intersection de (S') avec le plan tangent en O à (S), a pour équation

$$(2) \quad F(x, y, \lambda) \equiv F(\xi, \eta, \lambda) + \frac{1}{1.2} \times \left[(x - \xi)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2(x - \xi)(y - \eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + (y - \eta)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right] + \dots = 0.$$

Les tangentes considérées sont les tangentes menées de O à la courbe (2) et les coordonnées de leurs points de contact sont données par les équations (2) et

$$x \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial x} + y \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0,$$

ou

$$(3) \quad x \left[(x - \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + (y - \eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \dots \right] + y \left[(x - \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + (y - \eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \dots \right] = 0.$$

La limite de ces tangentes est connue si l'on sait la limite de ces points pour $\lambda \rightarrow 0$.

Comme $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \neq 0$, ces points sont à l'intersection des courbes

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right)_0 + 2xy \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0 + y^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)_0 \right] + \dots = 0, \\ x \left[x \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right)_0 + y \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0 + \dots \right] \\ + y \left[x \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0 + y \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)_0 + \dots \right] = 0 \end{array} \right.$$

et donc les tangentes considérées tendent vers les tangentes menées de

l'origine O (le point A) à la courbe d'intersection de la surface (S) avec le plan tangent en O à cette surface.

Si l'on avait $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0$, alors il faudrait que les points de contact soient communs aux trois courbes, (4) et $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0$, ce qui n'est pas toujours possible.

2359.

(1918, p. 119.)

On considère les cubiques circulaires Γ rencontrées dans la deuxième partie de la composition de géométrie analytique de l'École Polytechnique en 1917, savoir celles que définit l'équation (1)

$$x(x^2 + y^2) + (h^2 - a^2)x - 2ahy = 0,$$

où a est regardé comme fixe et h comme variable.

On appelle H et H' les points de contact de chaque cubique Γ avec ses tangentes parallèles à Oy, I et I', ses points de contact avec ses tangentes parallèles à Ox, C et C' ses centres de courbure répondant à H et H'. On demande :

1° De trouver le lieu des points I et I' et de déterminer, en particulier, les points de ce lieu où la tangente est parallèle à Oy en faisant voir comment ces derniers points sont liés aux points H et H' correspondants;

2° De trouver le lieu des points C et C' et de donner la construction géométrique qui permet de déduire chaque point C du point H correspondant.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. PHILBERT DU PLESSIS.

1° Si l'on pose

$$(1) \quad f(x, y) = x(x^2 + y^2) + (h^2 - a^2)x - 2ahy = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 + y^2 + h^2 - a^2, \\ f'_y &= 2(xy - ah). \end{aligned}$$

Les points I et I' où la tangente est parallèle à Ox sont donc donnés par l'ensemble des équations (1) et

$$(2) \quad 3x^2 + y^2 + h^2 - a^2 = 0.$$

(1) Voir N. A., 1917, p. 254, ce qui permet de rectifier une faute de signe dans l'énoncé publié en 1918.

Retranchant de (1) cette dernière équation multipliée par x , on en déduit

$$(3) \quad x^3 + ah y = 0,$$

et l'élimination de h entre (2) et (3) donne le lieu cherché

$$(4) \quad \varphi(x, y) = x^6 + a^2 y^4 + 3 a^2 x^2 y^2 - a^4 y^2 = 0,$$

courbe fermée, symétrique par rapport à Ox et Oy , et passant par O où elle présente un double point d'inflexion (méplat) avec Ox pour tangente.

Les sommets S et S' de cette courbe, situés sur Oy , sont donnés par $y = \pm a$. La tangente y est parallèle à Ox .

Les points T de cette courbe, où la tangente est parallèle à Oy , sont donnés par

$$(5) \quad \varphi'_y = 2 a^2 y (2 y^2 + 3 x^2 - a^2) = 0.$$

L'élimination de y^2 entre (4) et (5), qui est immédiate, donne

$$4 x^6 - a^2 (a^2 - 3 x^2)^2 = 0,$$

qui peut s'écrire

$$(x^2 - a^2)^2 (4 x^2 - a^2) = 0.$$

La racine double en x^2 donne des points de contact imaginaires. Les seules solutions réelles sont fournies par

$$4 x^2 - a^2 = 0,$$

d'où

$$x = \pm \frac{a}{2}.$$

Cette valeur portée dans (5) donne

$$y = \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Pour avoir la valeur correspondante de h , il suffit de porter ces valeurs de x et y dans (3), d'où l'on déduit

$$h = \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Or, les points de contact H et H' de la cubique circulaire répondant à chaque valeur de h , avec les tangentes parallèles à Oy ($x = \pm a$), ont précisément pour ordonnée h (1). Il en résulte que *chaque point T est le milieu de la distance du point H correspondant à Oy*.

Remarque. — La courbe (4) se compose en somme de deux ovales symétriques chacun par rapport à Oy , et l'un de l'autre par rapport à Ox ,

(1) *Loc. cit.*

dont le rayon de courbure, minimum au sommet S, croît d'une manière continue jusqu'en O où ce rayon de courbure devient infini.

Le rayon de courbure en S, où la tangente est parallèle à Ox, est d'ailleurs donné par

$$r = -\frac{\varphi'_y}{\varphi''_{x^2}}, \quad \text{avec } x = 0, \quad y = a.$$

Un calcul facile montre que

$$r = -\frac{a}{3}.$$

On peut aussi aisément calculer le rayon de courbure en T, où la tangente est parallèle à Oy, donné par

$$r = -\frac{\varphi'_x}{\varphi''_{y^2}}, \quad \text{avec } x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

On trouve

$$r = -\frac{9a}{16}.$$

2^e Quant à la courbe (1), son rayon de courbure au point H, où la tangente est parallèle à Oy, est donné par

$$r = -\frac{f'_x}{f''_{y^2}}, \quad \text{avec } x = a, \quad y = h.$$

Le calcul donne immédiatement

$$r = -\frac{a^2 + h^2}{a}.$$

Et, comme $a^2 + h^2$ est le carré de OH, cette formule montre que l'angle COH est droit. Il en résulte que le lieu du point C a pour équation

$$x = -\frac{y^2}{a},$$

parabole de sommet O et d'axe Ox ayant pour paramètre $\frac{a}{2}$.

Autre solution de M. LONG.

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Deux poutres rectilignes de section rectangulaire constante, de longueur λ et hauteur λh sont liées par une articulation cylindrique horizontale A. La première poutre OA est encastree horizontalement dans un mur en O; la pièce AC repose sur un appui fixe B, au niveau de l'encastrement O, et à une distance l de celui-ci.

Dans ces conditions, on suspend à l'extrémité libre C une charge de poids P.

1° Étant données les dimensions $OA = a$, $AB = b$, $BC = c$ ($a + b = l$), déterminer les réactions de l'appui, de l'encastrement et de l'articulation. Construire les diagrammes de l'effort tranchant et de l'effort fléchissant.

2° Supposant h assez petit pour qu'on puisse négliger l'effort tranchant, évaluer le déplacement de l'articulation et de la charge P, ainsi que les inclinaisons des deux poutres à l'articulation.

3° Les distances de l'appui et de la charge P à l'encastrement sont fixées, mais on peut choisir la position de l'articulation entre O et B. Où doit-on la placer pour rendre minimum le déplacement du poids P?

Même question pour que l'inclinaison de la poutre en B soit minimum.

Étudier les différentes formes qu'affecte l'ouverture des deux poutres à l'articulation lorsqu'on fait varier la situation de cette articulation.

4° Lorsqu'on ne peut plus négliger l'effort tranchant, quel terme complémentaire faut-il introduire dans l'expression du déplacement du poids P?

N. B. — On néglige le poids propre des poutres et les frottements à l'appui B et à l'articulation A.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Les réactions en A et B sont évidentes : $P \frac{c}{b}$ et $P \left(1 + \frac{c}{b}\right)$. La réaction d'encastrement est $P \frac{c}{b}$, le couple d'encastrement $P \frac{ac}{b}$. Les diagrammes en résultent.

2° Le théorème de Castigliano donne pour les déplacements de A et de C les valeurs

$$\Delta z_A = P \frac{a^3 c}{3EIb}; \quad \Delta z_C = - \frac{P}{3EI} \frac{c^2}{b^2} (b^2 c + a^3 + b^3).$$

Les inclinaisons de OA et de AB en A sont respectivement

$$\alpha_1 = P \frac{a^2 c}{2EIb}; \quad \alpha_2 = \frac{Pc}{6EIb^2} (b^3 + 2a^3).$$

3° L'inclinaison β en B est minimum pour $b = 2a$, en même temps que le déplacement de C. Dans ce cas, la poutre ne présente pas de point anguleux en A.

4° La prise en considération de l'effort tranchant introduit dans Δz_C le terme complémentaire

$$- \frac{3Pc}{5\lambda\mu h} \left(\lambda + \frac{lc}{b^2} \right).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère deux tiges cylindriques égales AB, AC, liées par un axe horizontal A perpendiculaire à leur plan BAC, et reposant par leurs extrémités B et C sur un plan horizontal poli. L'articulation A est sans frottement, et l'ouverture \widehat{CAB} est égale à 60°.

En outre, une tige horizontale DE lie les milieux D et E des deux branches AB, AC.

On néglige le poids du système, mais on suspend, au sommet A, une charge de poids P.

1° Vérifier que, pour les données numériques ci-dessous, les limites d'élasticité ne sont pas dépassées;

2° Calculer, avec les mêmes données, le fléchissement du sommet A et l'écartement des pieds du système.

Données numériques :

$$\text{Longueur } AB = AC = 2^m.$$

$$\text{Rayon de la section circulaire de } AB \text{ et } AC = 2^{\text{cm}}, \text{ de } ED = 2^{\text{mm}}.$$

$$\text{Poids } P : 150^{\text{kg}}.$$

Coefficient d'élasticité longitudinale E de la matière de tout le système : 20000 kg/mm².

Résistance maximum R_0 de cette matière : 14 kg/mm².

N. B. — On négligera le rapport des aires de la section de ED et de celle des branches AB, AC.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° La tension de CD est

$$P \operatorname{tang} \alpha \quad (2\alpha = \widehat{\text{BAC}} = 60^\circ).$$

La section de CD (rayon r) est suffisante si

$$P \operatorname{tang} \alpha < \pi r^2 R_0.$$

Le moment fléchissant maximum le long de AB est

$$\frac{1}{2} P l \sin \alpha \quad (\text{AB} = 2l);$$

l'effort tranchant et la compression de AB sont négligeables pour l'établissement de la condition d'équarrissage qui est

$$\frac{1}{2} P l \sin \alpha < R_0 \frac{\pi \rho^3}{4} \quad (\rho = \text{rayon de la section}).$$

2° Le déplacement horizontal de D est

$$\Delta x_D = \frac{P \operatorname{tang} \alpha}{E \pi r^2} l \sin \alpha.$$

La rotation $\Delta \alpha$ de la tige AB en A en résulte par les formules de déformation des pièces prismatiques

$$\Delta x_D = -\Delta \alpha l \cos \alpha + \frac{P \sin \alpha \cos \alpha l^3}{12 EI}.$$

De même

$$\Delta z_A = 2l \Delta \alpha \sin \alpha - \frac{P l^3 \sin^2 \alpha}{2 EI} = -2^{\text{mm}}, 5.$$

Enfin, en écrivant que les déplacements relatifs de la barre AB lui sont normaux, on a

$$\Delta x_B = -\Delta z_A \cot \alpha = 4^{\text{mm}}, 3.$$

(Lille, juin 1926.)



TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME I, 6^e SÉRIE, 1925-1926.)

La classification adoptée est celle de la 3^e édition
de l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

Analyse mathématique.

	Pages.
[A 3 d] Sur un théorème de M. Riesz, par M. A. Stoyanoff.....	97
[C 5 c] Sur un théorème de calcul vectoriel et ses applications, par M. J. Sudria.....	298
[D 2 a] Sur la théorie des séries entières, par M. J. Hadamard.....	161
[D 3] Sur une série de Lagrange, par M. N. Nielsen.....	68
[E 1] Formules relatives à la fonction Γ , par M. J. Ser.....	385
[E 1 d] Sur la constante d'Euler, par M. P. Appell.....	289
[F 2 g] Sur une propriété caractéristique des fonctions de Jacobi, par M. R. Garnier.....	38
[I 1] Sur un problème relatif aux nombres incommensurables, par M. R. Bricard.....	100
[I 1] Sur une question concernant des suites de nombres incommen- surables, par M. M. Faucheux.....	237

Géométrie.

[K ¹ 13 c] Sur un théorème de Steiner, par M. A. Thébault.....	386
[L ¹ 1 b] Quelques remarques de géométrie élémentaire sur les coniques considérées comme enveloppes de droites, par MM. Ilivici et Weill.....	65
[N ² 1 k] Sur un point de la théorie des complexes de droites, par M. G. Cerf.....	129
[N ² 3 b] Sur les congruences de cubiques planes cuspidales, par M. L. Godeaux.....	292
[O ¹ 4 j] Asymptotiques d'une surface, formules de Lelievre, par par M. B. Gambier.....	33
[O ¹ 8 d] Sur le mouvement à deux paramètres, par M. E. Cartan.....	33
[P ¹ 1] Sur l'égalité et la similitude des figures dans l'espace, par M. J. Lemaire.....	321
[P ¹ 1 b] Sur les courbes planes dont les longueurs d'arcs sont in- variantes par homographie, par M. A. Labrousse.....	225
[Q 1 a] Sur un système de vecteurs complexes et son application à l'étude de la configuration de Morley-Petersen, par M. J. Pérès.	193

Mathématiques appliquées.

[R 1 b] Sur une propriété caractéristique du mouvement de La Hire, par M. P. Danel.....	165
--	-----

	Pages.
[R 1 b] Double génération pour l'ellipse et les hypocycloïdes, par M. G. Bouligand.....	104
[R 1 b α] Sur le centre instantané de mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle-même, par M. N. Abramesco.	132
[R 1 b α] Sur le centre instantané de mouvement d'une figure plane variable avec conservation d'aire, par M. N. Abramesco....	198
[R 6 b] Propriétés mécaniques des formes quadratiques, par M. Et. Delassus.....	134
[R 9a] Sur le contact à rugosité parfaite, par M. Et. Delassus.....	358

Questions d'Enseignement.

A propos du nouveau programme de Mathématiques spéciales, par M. J. Hadamard.....	257
Sur un point du programme de de la classe Mathématiques, par M. G. Valiron.....	290
A propos du nouveau programme de Mathématiques spéciales, par M. A. Grévy.	353

Problèmes d'examens et de concours.

Certificats de Mathématiques générales.....	48, 119, 145, 219, 248, 287,	311
Exercices de Mathématiques générales.....	32,	61
Certificats de calcul différentiel et intégral.....	28, 94, 115, 179, 252, 351,	378
Certificats d'Analyse supérieure.....		53
Certificats de Géométrie supérieure.....	59,	217
Certificats de Mécanique rationnelle.....	51, 92, 156, 254, 284, 320, 348,	381
Certificat de Mécanique appliquée.....		414
Certificat de Physique mathématique.....		153
Certificats d'Astronomie.....	154,	319
Agrégation 1920. Solution de la question (2 ^o) d'Analyse, par M. C.-E. Traynard.....		45
Agrégation 1923. Solution de la question de Spéciales, par M. J. Denaux..		240
Agrégation 1923. Solution de la question de Mécanique, par M. J. Marion.		105
Agrégation 1924. Solution de la question de Mathématiques élémentaires, par MM. C. Clapier et J. Debey.....		139
Agrégation 1925. Solution de la question de mathématiques élémentaires, par M. B. Gambier.....		73
Agrégation 1925. Solution de la question de Spéciales, par M. H. V.....		13
Agrégation 1925. Solution géométrique de la même question, par M. B. Gambier.....		168
Agrégation 1925. Solution de la question d'Analyse, par M. B. Gambier, 200,		276
Agrégation 1926. Sujets de composition.....		305
Agrégation 1926. Solution de la première question de Mathématiques élémentaires, par M. M. O.....		346
Agrégation 1926. Solution de la seconde question d'élémentaires, par M. B. Gambier.....		300
École Polytechnique, 1926. Solution de la question de Géométrie analytique, par M. Ph. du Plessis.....		341
École Normale supérieure, 1926. Solution de la question de Géométrie analytique, par M. J. Lemaire.....		393

Solutions de questions de licence.

C. 1 : 126 ; C. 2 : 128 ; C. 7 : 177 ; C. 12 : 216 ; C. 25 : 215 ; C. 26 : 247 ;	Pages.
C. 33 : 289 ; C. 36 : 281 ; C. 41 : 282 ; C. 49 : 377 ; C. 55 : 253 ; C. 59 : 374 ;	
C. 63 : 322 ; C. 64 : 363 ; C. 71 : 376.	

Correspondance.

M. R. GOORMAGHTIGH : Sur les courbes gauches dont les binormales sont normales principales d'une autre courbe.....	25
M. R. BOUVAIST : Au sujet de la question proposée 2418.....	174
M. HADAMARD : Réponse à M. Grévy.....	391

Bibliographie.

A. CHATELET et J. KAMPÉ DE FÉRIET : Calcul vectoriel et applications.....	60
LAFAY : Notations et formules vectorielles.....	61
L. ZORETTI : Leçons de Mathématiques générales.....	191
G. VERMIEST : Cours de Mathématiques générales (t. II).....	191
R. BRICARD : Leçons de Cinématique.....	192
F. BOUNY : Leçons de Mécanique rationnelle (t. I).....	192
G. BOULIGAND : Précis de Mécanique rationnelle.....	300
P. APPELL et R. THIRY : Traité de Mécanique rationnelle (T. V).....	301
E. BOREL : Traité du calcul des probabilités et de ses applications.....	371

Questions proposées.

2483-4.....	23
2485-7.....	24
2488-9.....	25
2490-1.....	114
2492.....	214
2493.....	277
2494.....	300

Solutions de questions proposées.

333, par M. N. Abramesco.....	407
805, par M. N. Abramesco.....	409
2359, par M. Ph. du Plessis.....	411
2418, par M. H. Dumas.....	90
2420, par l'Auteur.....	89
2455, par M. E. Bally.....	26
2459, par l'Auteur.....	278
2463, par M. G. Roy.....	28
2466, par l'Auteur.....	87
2466, solution géométrique de E. Bally.....	88
2469, par M. E. Bally.....	278
2474, par M. J. de Caumont.....	64
2483 et 2485, par M. E. Lainé.....	91
2484, par M. A. Cabantous.....	279
2486, par M. M. Vasseur.....	175

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME I, 6^e SÉRIE, 1925-1926.)

- N. ABRAMESCO, 132, 198, 407, 409.
P. APPELL, 289.
E. BALLY, 24, 25, 27, 88, 175, 278.
G. BOULIGAND, 104.
R. BOUVAIST, 174.
R. BRICARD, 28, 89, 100, 114, 278, 300.
A. CABANTOUS, 279.
E. CARTAN, 33.
J. DE CAUMONT, 64, 126, 128, 216.
G. CERF, 129.
C. CLAPIER, 140.
P. DANIEL, 165.
J. DARD, 87.
J. DEBEY, 140.
E. DELASSUS, 134, 358.
J. DENAUX, 240.
J. DEVISME, 280.
O. DEVISME, 376.
H. DUMAS, 90.
M. F. EGAN, 90.
M. FAUCHEUX, 237.
B. GAMBIER, 1, 73, 168, 200, 276, 366.
R. GARNIER, 38.
L. GODEAUX, 292.
R. GOORMAGHTIGH, 25.
A. GREVY, 353.
J. HADAMARD, 161, 257, 391.
ILIOVICI, 65.
A. LABROUSSE, 23, 91, 225, 279.
E. LAINÉ, 91.
J. LEMAIRE, 321, 393.
J. MARION, 105.
H. MENESSIER, 247.
A. MONJALON, 215, 282.
N. NIELSEN, 68.
M. O., 346.
R. ODILE, 303.
J. PÉRIS, 60, 190, 193, 300, 371.
PHILIBERT DU PLESSIS, 342, 411.
CH. PIRDVACHE, 283.
G. ROY, 28, 277.
J. SER, 385.
A. STOYANOFF, 97.
J. SUDRIA, 298.
V. THÉBAULT, 27, 214, 386.
L. TITS, 64.
C.-E. TRAYNARD, 45.
H. V., 13.
G. VALIRON, 290.
M. VASSEUR, 175.
P. VINCENSINI, 114.
WEILL, 65.
R. WEINZAEPFEL, 374.

ERRATA : 160, 224.