Agrégation des sciences mathématiques (session de 1924)

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 95-117
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__95_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.
(SESSION DE 1924.)

Problème de Calcul différentiel et intégral.

I. *Soient* S *et* S_1 *deux surfaces données. On fait correspondre chacun à chacun, suivant une certaine loi* (L), *les points* M *de* S *et les points* M_1 *de* S_1. *Toutes les fonctions employées sont analytiques.*

Montrer que les courbes, sur lesquelles les longueurs d'arcs se conservent, forment en général deux familles à un paramètre.

II. *Montrer que si ces familles se confondent en une seule (savoir* F *sur* S, F_1 *sur* S_1), *la loi* (L) *fait correspondre aux trajectoires orthogonales des courbes* F *celles des courbes* F_1.

Réciproque.

III. *On suppose en outre que la loi* (L) *associe à une courbe* F *quelconque une courbe* F_1 égale, *de sorte que les arcs superposables de ces deux courbes soient homologues. On convient alors de dire que la correspondance de* S *et de* S_1 *est d'espèce :*

(α) *si* (L) *ne réalise pas l'application de* S *et* S_1 ;

(β) *si* (L) *les rend* superposables *mais non pas* superposées.

On suppose d'abord que F *et* F_1 *sont des* droites; *étudier :*

a. Le cas (α).

On regarde F *et* F_1 *comme des lignes de forces de deux champs* (Φ) *et* (Φ_1), *les forces* Φ *et* Φ_1 *étant égales aux points correspondants ; on demande de remplacer la condition* (α) *par une autre équivalente que remplissent les travaux des forces dans deux mouvements correspondants sur* S *et* S_1.

b. Le cas (β).

1° C *et* C_1 *étant deux courbes homologues quelconques, qui passent respectivement par* M *et* M_1 *que peut-on dire des points où les axes des cercles osculateurs de* C *en* M *et de* C_1 *en* M_1 *coupent respectivement les plans tangents à* S *et à* S_1 ? (*Il s'agit d'une propriété générale pour tout couple de surfaces applicables.*)

2° C *étant une trajectoire orthogonale des génératrices* G, *montrer qu'il existe deux développables formées respectivement de normales à* C *et à* C_1 *et qui coupent* S *et* S_1 *sous le même angle aux points* M *et* M_1 *correspondants.*

IV. *On suppose* F *et* F_1 *planes, mais* courbes.

a. Pour le type (α), *l'énoncé* III, *a*, *reste valable.*

b. Montrer l'impossibilité de la correspondance (β).

[*Il sera commode, ayant choisi des axes* $M\xi\eta\zeta$ (¹) *liés à la courbe* F *en chacune de ses positions, d'utiliser les projections, sur ces axes, du déplacement élémentaire d'un point mobile de* S *et en particulier de faire figurer les composantes* δp, δq, δr *de la rotation instantanée du trièdre* $M\xi\eta\zeta$ *sur ses trois arêtes. Même observation au sujet de* F_1 *et de* S_1.]

(¹) Lire $I\xi\eta\zeta$ conformément aux notations du § V, *a*.

V. *On suppose* F *et* F_1 *gauches.*

a. Montrer que dans les deux cas (α) *et* (β) *les tangentes à une même courbe* F *font partie d'un complexe linéaire.*

Les déplacements élémentaires de deux trièdres $I\xi\eta\zeta$, $I_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, *identiquement liés à* F *et à* F_1, *ne diffèrent que par un mouvement hélicoïdal ayant le même axe que le complexe. En déduire le choix le plus simple des trièdres* (I, I_1) *relativement à* S *et* S_1 *simultanément.*

b. La correspondance est du type (β).

1° *Relativement au trièdre* $I\xi\eta\zeta$, *les courbes* F *engendrent une surface* Σ. *Montrer que ces courbes ne peuvent constituer une famille d'asymptotiques de* Σ.

2° *Posant* $\xi = r\cos\omega$, $\eta = \sin\omega$ [1], *on prend pour paramètres de* Σ, ω *et* t, t *étant constant sur* F.

Montrer que, si $v = \operatorname{tang}\omega$, Σ *est surface intégrale de l'équation*

$$\frac{d\zeta}{dt} = \sqrt{\frac{d\zeta}{d\nu}}\,[\alpha + \beta\nu - \zeta(\gamma + \delta\nu)] \quad (^2),$$

α, β, γ, δ *étant des fonctions de* t *seul.*

---

(1) Lire $\eta = r\sin\omega$ ou, mieux encore, pour éviter toute confusion avec les notations δp, δq, δr du § IV, *b*, lire

$$\xi = \rho\cos\omega, \qquad \eta = \rho\sin\omega,$$

(ξ, η, ζ) désignent les coordonnées polaires du point M par rapport au trièdre $I\xi\eta\zeta$; (ρ, ω, ζ) sont les coordonnées semi-polaires du même point.

(2) Remplacer la lettre ν par la lettre v ($v = \operatorname{tang}\omega$). Conformément aux notations de Poincaré, le *d* droit est utilisé dans cette équation pour désigner des dérivées partielles; dans la solution, j'ai rétabli le ∂ de ronde.

Montrer l'existence d'intégrales complètes correspondant aux droites du complexe auquel F *appartient.*

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Remarque préliminaire. — Je commencerai par rendre hommage à l'élégance intrinsèque du sujet; je me permettrai une remarque relative, non pas au fond, mais exclusivement à la forme.

Le n° III comporte la phrase :

(β) *si* (L) *les rend superposables, mais non pas superposées.*

Je préférerais une rédaction analogue à celle-ci :

(β) *si* (L) *les rend applicables, en écartant le cas banal où* S_1 *est égale à* S *ou à une symétrique de* S.

L'énoncé officiel donne au mot *superposables* le sens réservé d'habitude au mot *applicables*. Il me paraît difficile de ne pas admettre que les surfaces représentées par les formules respectives

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{S}) & x = f(u, v), & y = \varphi(u, v), & z = \psi(u, v), \\
(\mathrm{S}_1) & x_1 = f(u, v) + a, & y_1 = \varphi(u, v) + b, & z_1 = \psi(u, v) + c
\end{array}
$$

(u, v paramètres variables ; a, b, c constantes numériques non nulles ensemble) sont *superposables, mais non superposées.* Si même on consent à laisser au mot *superposables* le sens que l'énoncé officiel lui attribue, on arrive à cette conclusion qu'une surface S, dépourvue de plan ou centre de symétrie, et la symétrique S_1 de S par rapport à l'origine sont *superposables, mais non superposées* (toujours au sens de l'énoncé officiel) ;

or on doit évidemment exclure une telle solution, et c'est bien l'esprit, sinon la lettre, de l'énoncé.

I. Sur S on trace un système arbitraire de coordonnées curvilignes (u, v); sur S_1 on trace les courbes homologues et l'on exprime les coordonnées des points homologues M et M_1 en fonction de u et v. Avec les notations usuelles, les éléments linéaires sont

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$ds_1^2 = E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2.$$

Les courbes pour lesquelles les arcs homologues ont la même longueur constituent *en général* deux familles à un paramètre définies par l'équation différentielle du premier ordre

$$(E - E_1)\,du^2 + 2(F - F_1)\,du\,dv + (G - G_1)\,dv^2 = 0.$$

Il y a trois cas à distinguer :

1° Le cas, *normal si* S *et* S_1 *sont quelconques ainsi que la loi* (L), où l'expression

$$\Delta \equiv (E - E_1)(G - G_1) - (F - F_1)^2$$

n'est pas nulle ; *les deux familles sont distinctes ;* suivant le signe de Δ elles sont, au voisinage d'un point réel, soit réelles soit imaginaires conjuguées. L'énoncé exclut définitivement pour la suite ce premier cas.

2° Le cas, *exceptionnel* au sens déjà employé, *où les deux familles se confondent en une seule ;* cette famille est réelle ; on peut supposer que c'est la famille $u =$ const. ; on aura

$$F = F_1, \qquad G = G_1, \qquad E \neq E_1.$$

Je désigne ce cas par la lettre (A) ; l'énoncé donne plus bas le sous-cas (α) de (A), où les courbes homologues sont de plus *égales chacune à chacune.*

3° Le cas, encore plus exceptionnel, où il y a *une infinité de familles dont les arcs se conservent ;* on a

$$E = E_1, \qquad F = F_1, \qquad G = G_1$$

Une courbe *quelconque* et son homologue ont même longueur ; les deux surfaces sont *applicables.* Je désigne ce cas par la lettre (B) ; l'énoncé donne plus bas le sous-cas (β) de (B), où il existe *une* famille à un paramètre dont les courbes homologues sont *égales chacune à chacune.* (B) peut être considéré comme un cas particulier de (A).

II. On peut ecrire

$$(1) \qquad ds^2 = \frac{1}{G}[(G\,dv + F\,du)^2 + (EG - F^2)\,du^2].$$

L'équation différentielle

$$(2) \qquad G\,dv + F\,du = 0$$

définit les trajectoires orthogonales des courbes $u =$ const. Dans les cas (A) ou (B) ces trajectoires se conservent.

Réciproquement, si la loi (L) :

1° conserve la longueur des courbes $u =$ const. ;

2° conserve les trajectoires orthogonales de ces mêmes courbes,

on a d'après 1°, puis 2°, successivement

$$G = G_1, \qquad \frac{F}{F_1} = \frac{G}{G_1},$$

d'où finalement

$$G = G_1, \qquad F = F_1$$

et la loi (L) est une loi (A) ou (B).

III. Restons d'abord dans l'hypothèse (A), plus large que l'hypothèse (α). La tangente à la courbe $u = $ const., orientée dans le sens des v croissants, a pour cosinus directeurs

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

où $\sqrt{G}$ est pris positivement; sur cette tangente ainsi orientée appliquons en M une force d'intensité $\Phi(u, v)$. Nous avons ainsi défini un champ (Φ) dans toute l'étendue de S. Le travail élémentaire de Φ pour un déplacement élémentaire *quelconque* de M sur S est

$$(3) \quad \frac{\Phi}{\sqrt{G}}\left[dx\frac{\partial x}{\partial v} + dy\frac{\partial y}{\partial v} + dz\frac{\partial z}{\partial v}\right] = \frac{\Phi}{\sqrt{G}}(F\,du + G\,dv).$$

Sur S_1 définissons le champ analogue (Φ_1), les forces Φ et Φ_1 étant égales aux points correspondants. On voit immédiatement que la condition (A) peut être remplacée par l'égalité des travaux élémentaires correspondants et réciproquement : *a fortiori* si (A) est remplacé par le sous-cas (α) et encore plus *a fortiori* si (§ III, *a*) on suppose que F et F_1 sont des droites. Nous avons aussi vérifié que l'énoncé actuel est valable pour IV, *a*.

Imaginons maintenant réalisée l'hypothèse (B), plus large que l'hypothèse (β). Une courbe C de S, issue de M, a R pour rayon de courbure en M ; le plan osculateur à C en M fait l'angle θ avec la normale en M à S ; on sait que l'expression $\frac{\sin\theta}{R}$, ou *courbure géodésique*, est un invariant dans l'applicabilité de deux surfaces ; d'ailleurs $\frac{R}{\sin\theta}$ est la distance, au point M, du point où l'axe du cercle osculateur perce le plan tangent en M à S : *donc cette distance se conserve*. Il sera intéressant de démontrer rapidement et directement cette propriété dans le cas particulier de (B) où les courbes F et F_1 sont rectilignes : ceci va être fait à l'instant de façon à traiter du même coup III, 2°.

Plaçons-nous donc dans les conditions III, 2°. La normale N à la surface S au point M fait avec la normale principale de la courbe C l'angle θ déjà défini ; la normale N' à C engendre une surface développable et fait avec la normale principale de C un angle V défini par la formule bien connue (facile d'ailleurs à retrouver par la méthode ci-dessous)

$$V = \int \frac{ds}{T},$$

où T est le rayon de torsion de C ; l'angle (N, N') est donc égal à $|V - \theta|$; la développable lieu de N' coupe la surface S sous l'angle complémentaire de (N, N'). La différentielle de $V - \theta$ est

$$\frac{ds}{T} - d\theta.$$

On retombe ainsi sur la *torsion géodésique* de la courbe C considérée comme tracée sur S. Je cite, pour mémoire, la formule, que les spécialistes eux-mêmes sont contents de retrouver dans les ouvrages spéciaux,

$$(4) \qquad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{\begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''\,dv \\ E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)}.$$

Ici, S est réglée, les courbes $u =$ const. sont rectilignes, donc $D'' = 0$.

La courbe C est l'une des trajectoires orthogonales des génératrices, de sorte que $F\,du + G\,dv$ reste nulle tout le long de C ; on a donc le long de C

$$(5)\qquad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{-D'\,du(E\,du + F\,dv)}{\sqrt{EG - F^2}(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)}.$$

Or, tenant compte de la relation $F\,du + G\,dv = 0$, la formule (5) prend la forme plus simple

$$(5')\qquad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{-D'}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{-R_1 R_2}}$$

où $R_1 R_2$ sont les rayons principaux de S au point uv; cela résulte de ce que l'expression invariante $DD'' - D'^2$ se réduit à $-D'^2$, de sorte que D' conserve la même valeur absolue (remarquons en passant qu'une symétrie plane change le signe de D, D′). Cela suffit à montrer que

$$\frac{d}{ds}|V - \theta| = \frac{d}{ds}|V_1 - \theta_1|.$$

En remplaçant une normalie de C par une autre, on augmente tous les angles V d'une même constante : on peut donc associer une à une les normalies de C et C_1 de sorte qu'elles coupent respectivement S et S_1 sous le même angle le long de C ou C_1.

Démontrons maintenant directement, pour le cas spécial de deux surfaces réglées applicables, que l'expression $\frac{\sin\theta}{R}$ est un invariant *pour une courbe quelconque* et que l'expression $\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$ est un invariant *pour une trajectoire orthogonale des génératrices.*

Soit une courbe (C) dont les coordonnées d'un point variable x_0, y_0, z_0 sont exprimées au moyen de l'arc s de cette courbe ; a, b, c désigneront les cosinus directeurs de la tangente ; a', b', c' ceux de la normale principale ; a'', b'', c'' ceux de la binormale. Nous supposons que (C) soit directrice d'une surface réglée ;

les paramètres directeurs (principaux ou non) de la génératrice sont de nouvelles fonctions l, m, n de l'arc s ; les équations paramétriques de la surface réglée sont

$$(6)\qquad x = x_0 + lv, \qquad y = y_0 + mv, \qquad z = z_0 + nv,$$

et l'on trouve aisément pour l'élément linéaire dS^2 de la surface réglée $\left(l', m', n' \text{ désignant } \frac{dl}{ds}, \frac{dm}{ds}, \frac{dn}{ds}\right)$

$$(7)\qquad dS^2 = (Av^2 + 2Bv + C)\,ds^2 + 2(Pv + Q)\,ds\,dv + G\,dv^2$$

où l'on a [1]

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{ll} A = l'^2 + m'^2 + n'^2, & P = ll' + mm' + nn', \\ B = al' + bm' + cn', & Q = al + bm + cn, \\ C = 1, & G = l^2 + m^2 + n^2. \end{array}\right.$$

Faisons apparaître l'angle θ déjà défini : les cosinus directeurs de la normale N à la surface sont évidemment

$$a' \cos\theta + a'' \sin\theta, \qquad b' \cos\theta + b'' \sin\theta, \qquad c' \cos\theta + c'' \sin\theta.$$

Le vecteur l, m, n peut évidemment être défini comme la résultante d'un vecteur unité porté sur celle des normales à la courbe (C) qui est normale à N et d'un vecteur λ porté par la tangente à (C) ; on a alors

$$l = a\lambda - a' \sin\theta + a'' \cos\theta, \qquad m = b\lambda - b' \sin\theta + b'' \cos\theta,$$
$$n = c\lambda - c' \sin\theta + c'' \cos\theta.$$

puis, par les formules de Serret-Frenet,

$$l' = a\left(\frac{\sin\theta}{R} + \frac{d\lambda}{ds}\right) + a'\left[\cos\theta\left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right) + \frac{\lambda}{R}\right]$$
$$+ a'' \sin\theta\left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right),$$

---

(1) Il n'y aura pas confusion entre la courbe (C) et le coefficient C qui figure dans dS^2.

d'où l'on déduit

$$(9)\quad \begin{cases} A = \left(\dfrac{\sin\theta}{R} + \dfrac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{T} - \dfrac{d\theta}{ds}\right)^2 \\ \qquad + \dfrac{2\lambda}{R}\cos\theta\left(\dfrac{1}{T} - \dfrac{d\theta}{ds}\right) + \dfrac{\lambda^2}{R^2}, \\ B = \dfrac{\sin\theta}{R} + \dfrac{d\lambda}{ds}, \qquad C = 1, \\ P = \lambda\dfrac{d\lambda}{ds}, \qquad Q = \lambda, \qquad G = \lambda^2 + 1. \end{cases}$$

Si donc la surface réglée S se déforme (au sens de Gauss) de sorte que les génératrices restent rectilignes, nous appellerons (C_1) la courbe homologue de (C) de sorte qu'aux points homologues les valeurs de s sur les deux surfaces S et S_1 soient les mêmes ; mais alors la fonction $|\lambda|$, qui représente la cotangente de l'angle de C avec la génératrice, se conserve en passant de S à S_1 : en changeant simultanément, si c'est nécessaire, le signe de λ et v sur S mais non sur S_1, on peut supposer que c'est λ lui-même qui se conserve ; mais alors la fonction v doit prendre aussi la même valeur aux points homologues, puisque $v\sqrt{\lambda^2+1}$ représente le segment porté sur la génératrice à partir de C (¹) Alors la comparaison des dS^2 prouve que les deux expressions

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{R}, \\ \left(\dfrac{1}{T} - \dfrac{d\theta}{ds}\right)^2 + \dfrac{2\lambda}{R}\cos\theta\left(\dfrac{1}{T} - \dfrac{d\theta}{ds}\right) + \dfrac{\lambda^2}{R^2} \end{cases}$$

(¹) Le raisonnement du texte laisserait à la rigueur admettre l'hypothèse $v_1 = -v$ plutôt que $v_1 = v$. Mais les égalités $Av^2 + 2Bv = A_1v_1^2 + 2B_1v_1$ et $\left(v\dfrac{d\lambda}{ds} + 1\right)dv = \left(v_1\dfrac{d\lambda}{ds} + 1\right)dv_1$ qui doivent avoir lieu, *quel que soit s*, ne permettent que $v_1 = v$.

se conservent en passant de S à S_1 : ces deux expressions ne font intervenir que la courbe C et l'angle de C avec la génératrice.

La *courbure géodésique* se conserve donc pour une *courbe quelconque ;* si maintenant C est *trajectoire orthogonale des génératrices*, on a $\lambda = 0$ et le *carré de la torsion géodésique* se conserve. Ce sont les résultats que nous voulions établir directement pour les surfaces réglées, en nous plaçant au point de vue du candidat qui n'a pas de formulaire à sa disposition et ne peut se rappeler une formule relativement compliquée ; pour le chercheur, il y a souvent avantage à se servir aussi de la formule (4) indiquée précédemment pour mémoire.

Ajoutons un mot : en retranchant du second élément indiqué plus haut comme invariant, la quantité elle-même invariante $\lambda^2 . \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$, on obtient l'invariant plus simple

$$\left| \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right) + \lambda \frac{\cos \theta}{R} \right| ; \tag{11}$$

on vérifie aisément que l'expression (11) reproduit encore le second membre de (5'), même si $\lambda \neq 0$.

IV. La question IV, *a*, a été résolue comme cas très particulier de l'hypothèse (A).

La question IV, *b*, se résout immédiatement en remarquant que si deux surfaces applicables S et S_1, *quelconques*, possèdent *une seule courbe plane*, C sur S et C_1 sur S_1, telles que C et C_1 soient égales (les points homologues de C et C_1 dans leur superposition se correspondant aussi dans l'applicabilité), les deux surfaces S et S_1 sont, ou égales, ou l'une égale à une symétrique de l'autre. En effet, portons C sur C_1 de façon à réaliser leur superposition ; aux points homologues, $\frac{\sin\theta}{R}$ a la même valeur, d'après la théorie de l'applicabilité des surfaces; d'autre part $R = R_1$, donc $\sin\theta = \sin\theta_1$; si $\theta = \theta_1$, les deux surfaces S et S_1 coïncident comme admettant même développable circonscrite le long de C; si $\theta + \theta_1 = \pi$, les deux surfaces S et S_1 sont symétriques par rapport au plan de C. On a donc obtenu la solution banale que l'esprit de l'énoncé demande d'écarter.

Si C est rectiligne, le raisonnement est en défaut. Si C est gauche, on n'a pas $\theta = \theta_1$, mais $\theta + \theta_1 = \pi$ et cette seconde solution $\theta + \theta_1 = \pi$ permet justement d'obtenir ce que demande la question V.

V. Soient donc la surface S et les courbes F, F′, F″, ... tracées sur S, qui, dans la déformation de S, ne subissent aucune déformation, mais ont simplement leurs positions relatives changées. Traçons sur S une courbe quelconque Φ rencontrant F, F′, F″, ... aux points M, M′, M″ ... et soit t un paramètre permettant d'individualiser M, M′, M″, ... sur Φ.

Traçons maintenant une courbe $\overline{\Phi}$ *quelconque* et établissons une correspondance ponctuelle bien déterminée entre Φ et $\overline{\Phi}$: autrement dit les coordonnées $\overline{M}_i$ du point homologue de M_i sont *trois* fonctions complètement arbitraires de t_i. Transportons la courbe $F^{(i)}$ de façon que le point M_i vienne en $\overline{M}_i$; *trois* nouvelles fonctions de t_i, complètement arbitraires aussi, permettent d'orienter la courbe transportée $F^{(i)}$ autour de $\overline{M}_i$; cela posé, la surface S a été transformée en une surface Σ dépendant des *six fonctions arbitraires d'une variable* définies à l'instant : les courbes $F^{(i)}$ sont restées inaltérées, leur disposition relative a seule vari é

Sur la surface Σ que nous rapporterons à un trièdre $I\xi\eta\zeta$ on peut prendre pour lignes de coordonnées $t =$ const. les courbes $F^{(i)}$ transportées de sorte que les équations paramétriques de Σ sont

$$(12) \qquad X = \xi(t, v), \qquad Y = \eta(t, v), \qquad Z = \zeta(t, v),$$

v désignant un paramètre dont la variation, pour t constant égal à t_i, donne la courbe $F^{(i)}$ transportée. Les équations paramétriques de la surface S sont donc

$$(13) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta, \\ y = y_0 + \beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta, \\ z = z_0 + \gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta, \end{cases}$$

où $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \gamma''$ sont 12 fonctions de t seul; l'interprétation de ces 12 fonctions est aisée. Imaginons le trièdre $I\xi\eta\zeta$ *lié à* Σ : considérons le paramètre t comme représentant le temps et déplaçons $I\xi\eta\zeta$ par rapport à un trièdre fixe $Oxyz$ de façon qu'à l'instant t, les coordonnées x_0, y_0, z_0 dans le système $Oxyz$ soient celles de I et que α, β, γ soient les cosinus directeurs de $I\xi$ par rapport à Ox, Oy, Oz ; α', β', γ' ceux de $I\eta$, $\alpha'', \beta'', \gamma''$ ceux de $I\zeta$: le mouvement du trièdre $I\xi\eta\zeta$ dépend donc du seul paramètre t; à l'instant t_i nous ne prenons de Σ que la courbe t_i et alors la surface S est le lieu de cette courbe : la courbe $t =$ const. se déplace et se déforme donc par rapport au trièdre $I\xi\eta\zeta$ de façon à engendrer Σ dans ce trièdre mobile et, en composant ces déplacement et déformation *relatifs* avec le mouvement d'*entraînement* de $I\xi\eta\zeta$, la courbe engendre au contraire S. Le trièdre mobile $I\xi\eta\zeta$ admet à l'époque t une rotation instantanée que nous projetons sur $I\xi$, $I\eta$, $I\zeta$ et nous appelons p, q, r suivant l'usage les composantes en question ; le point I possède à l'instant t une vitesse dont les composantes suivant $\mathrm{I}\xi\eta\zeta$ seront représentées par λ, μ, ν.

Les relations

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} dx &= \left(\frac{dx_0}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}\xi + \frac{d\alpha'}{dt}\eta + \frac{d\alpha''}{dt}\zeta\right.\\ &\quad \left. + \alpha\frac{\partial\xi}{\partial t} + \alpha'\frac{\partial\eta}{\partial t} + \alpha''\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) dt\\ &\quad + \left(\alpha\frac{\partial\xi}{\partial v} + \alpha'\frac{\partial\eta}{\partial v} + \alpha''\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right) dv,\\ dy &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ dz &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

donnent immédiatement les formules bien connues

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz &= \left(\lambda + q\zeta - r\eta + \frac{\partial\xi}{\partial t}\right) dt + \frac{\partial\xi}{\partial v} dv,\\ \alpha'\, dx + \beta'\, dy + \gamma'\, dz &= \left(\mu + r\xi - p\zeta + \frac{\partial\eta}{\partial t}\right) dt + \frac{\partial\eta}{\partial v} dv,\\ \alpha''\, dx + \beta''\, dy + \gamma''\, dz &= \left(\nu + p\eta - q\xi + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) dt + \frac{\partial\zeta}{\partial v} dv, \end{aligned}\right.$$

et par suite l'élément linéaire de S est

$$(16)\qquad ds^2 = \mathrm{E}\, dt^2 + 2\mathrm{F}\, dt\, dv + \mathrm{G}\, dv^2$$

avec, en employant le symbole sommatoire S de Lamé,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E} &= \mathrm{S}\left(\lambda + q\zeta - r\eta + \frac{d\xi}{dt}\right)^2,\\ \mathrm{F} &= \mathrm{S}\,\frac{\partial\xi}{\partial v}\left(\lambda + q\zeta - r\eta + \frac{\partial\xi}{\partial t}\right),\\ \mathrm{G} &= \mathrm{S}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Pour la surface S_1 le mouvement du trièdre $\mathrm{I}\xi\eta\zeta$ sera défini par d'autres fonctions de t, λ_1, μ_1, ν_1, p_1, q_1, r_1. (Nous rappelons que la donnée de λ, μ, ν, p, q, r permet d'obtenir le mouvement par l'intégration d'une équation de Riccati et trois quadratures, et que le mouvement obtenu est *unique*.) En comparant les éléments linéaires de S et S_1 on a, comme de juste, $G = G_1$; il n'y a donc qu'à écrire la relation $F = F_1$ si nous traitons d'abord la question V, *a* :

$$(18) \qquad S(\lambda - \lambda_1)\frac{\partial \xi}{\partial v} + S(p - p_1)\left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) = 0$$

Si nous fixons t, ceci est l'équation d'un complexe linéaire contenant les tangentes de la courbe t considérée. Les droites du complexe sont les droites de moment nul par rapport au système de vecteurs dont les éléments de réduction en I sont :

résultante générale de translation : $p - p_1$, $q - q_1$, $r - r_1$,
moment résultant en I : $\lambda - \lambda_1$, $\mu - \mu_1$, $\nu - \nu_1$.

Considérons donc la courbe t sur S et l'axe du complexe (¹) ; nous avons laissé jusqu'ici indéterminé le déplacement que l'on inflige à chaque courbe t de S pour obtenir Σ ; il est loisible de transporter cette courbe t de façon que l'axe du complexe correspondant soit précisément Iζ ; on aura donc

$$(19) \qquad p = p_1, \qquad q = q_1, \qquad \lambda = \lambda_1, \qquad \mu = \mu_1.$$

L'équation $F = F_1$ s'écrit

$$(20) \qquad (\nu - \nu_1)\frac{\partial \zeta}{\partial v} + (r - r_1)\left(\xi \frac{\partial \eta}{\partial v} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = 0.$$

(¹) Le système de vecteurs n'est pas réductible à un couple; sinon on aurait $p = p_1$, $q = q_1$, $r = r_1$ et la courbe F serait dans un plan perpendiculaire à l'axe du couple (cas écarté d'une famille de courbes planes, et même *d'une seule*). Le systeme de vecteurs n'est pas réductible à une force unique, sinon la courbe F serait encore plane, dans un plan passant par la force. Naturellement le cas où F est rectiligne est spécial, mais a été traité directement. Il peut d'ailleurs être traité comme cas particulier de V en réduisant la surface Σ à l'axe Iζ, on prend alors $p = p_1$, $q = q_1$, $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$, $\nu = \nu_1$, $\xi = \eta = 0$, $\zeta = v$.

Nous devons remarquer que nous n'avons pas épuisé complètement les six fonctions arbitraires que nous avions à notre disposition pour fabriquer la surface Σ; nous pouvons en effet, sans que la courbe F transportée cesse d'appartenir au complexe correspondant, faire tourner d'un angle arbitraire $\theta(t)$ cette courbe autour de Oz, la faire glisser d'une quantité arbitraire $Z(t)$, le long de Oz : ces opérations remplacent la surface Σ par une surface Σ' *différente*, laissent inaltérées p, q, λ, μ mais remplacent r, r_1, ν, ν_1 par

$$r' = r + \frac{d\theta}{dt}, \qquad r'_1 = r_1 + \frac{d\theta}{dt},$$
$$\nu' = \nu + \frac{dZ}{dt}, \qquad \nu'_1 = \nu_1 + \frac{dZ}{dt},$$

la considération de l'équation $E = E_1$ montre qu'il y a intérêt à déterminer θ et Z par les quadratures

$$(21) \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}(r + r_1), \qquad \frac{dZ}{dt} = -\frac{1}{2}(\nu + \nu_1)$$

de façon que $r' + r'_1 = 0$, $\nu' + \nu'_1 = 0$. C'est le meilleur choix que l'on puisse faire de la surface auxiliaire Σ', de sorte qu'en supprimant les accents on pourra supposer, aussi bien pour (α) que pour (β),

$$(22) \qquad \begin{cases} p = p_1, & q = q_1, & r = -r_1, \\ \lambda = \lambda_1, & \mu = \mu_1, & \nu = -\nu_1. \end{cases}$$

Augmenter θ d'une constante est indifférent, cela ne fait que faire tourner Σ autour de $I\zeta$; de même pour Z; simple translation. Ce choix optimum a été obtenu par la remarque simple que les deux trièdres $I\xi\eta\zeta$ ou $I_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ ont des mouvements élémentaires différant d'un simple mouvement hélicoïdal $p - p_1$, $q - q_1$, $r - r_1$; $\lambda - \lambda_1$, $\mu - \mu_1$, $\nu - \nu_1$ de même axe que le complexe. Je n'insisterai pas davantage sur le cas (α) qui est ainsi virtuellement épuisé.

Passons au type (β). Les équations à résoudre sont

$$(23)\quad \begin{cases} (r-r_1)\left(\xi\dfrac{\partial\eta}{\partial v}-\eta\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\right)+(\nu-\nu_1)\dfrac{\partial\zeta}{\partial v}=0, \\ (r^2-r_1^2)(\xi^2+\eta^2)+(\nu^2-\nu_1^2) \\ \quad +2(r-r_1)\left[\mu\xi-\lambda\eta-(p\xi+q\eta)\zeta+\xi\dfrac{\partial\eta}{\partial t}-\eta\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\right] \\ \quad\quad +2(\nu-\nu_1)\left(p\eta-q\xi+\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right)=0 \end{cases}$$

quand on suppose simplement $p=p_1$, $q=q_1$, $\lambda=\lambda_1$, $\mu=\mu_1$; c'est la forme de cette dernière équation qui montre l'avantage des conditions $r+r_1=0$, $\nu+\nu_1=0$ de façon à n'avoir que le système réduit

$$(24)\quad \begin{cases} r\left(\xi\dfrac{\partial\eta}{\partial v}-\eta\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\right)+\nu\dfrac{\partial\zeta}{\partial v}=0. \\ r\left[\mu\xi-\lambda\eta-(p\xi+q\eta)\zeta+\xi\dfrac{\partial\eta}{\partial t}-\eta\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\right] \\ \quad +\nu\left(p\eta-q\xi+\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right)=0. \end{cases}$$

Nous voyons que la détermination de tous les couples de surfaces S, S_1 applicables possédant une famille de courbes homologues *égales* revient à la détermination des fonctions λ, μ, ν, p, q, r de la seule variable t et des fonctions $\xi(t, v)$, $\eta(t, v)$, $\zeta(t, v)$ liées par les équations (24); il faut ensuite intégrer les deux équations de Riccati et effectuer les six quadratures correspondant aux mouvements de caractéristiques $(p, q, r, \lambda, \mu, \nu)$ et $(p, q, -r, \lambda, \mu, -\nu)$. On peut alléger ces opérations en se donnant les douze fonctions $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ qui figurent dans les relations (14) de façon à n'avoir plus que l'équation de Riccati et les trois quadratures concernant le mouvement $(p, q, -r, \lambda, \mu, -\nu)$. En tout cas on remarquera que dans les équations (24) ne figurent que les rapports mutuels de $p, q, r, \lambda, \mu, \nu$: multiplier ces fonctions par une même fonction de t n'altère pas les trajectoires *géométriques*, mais revient à changer la loi des vitesses, chose indifférente au point de vue des couples S, S_1. Maintenant il est clair, puisque les courbes F ne sont pas planes, que l'on peut passer des coordonnées ξ, η, ζ aux coordonnées semi-polaires ρ, ω, ζ par les formules

$$(25) \quad \xi = \rho(t, \omega)\cos\omega, \qquad \eta = \rho(t, \omega)\sin\omega \qquad \zeta = \zeta(t, \omega)$$

et prendre comme variables indépendantes t, ω ; ω joue donc le rôle de la variable v restée jusqu'ici sans être précisée. L'emploi de ces coordonnées semi-polaires s'impose d'autre part par la remarque faite déjà, qu'augmenter tous les ζ d'une constante ou tous les ω d'une constante est indifférent pour Σ et le couple S, S_1. La première équation (24) est remplacée par

$$(26) \qquad \rho^2 = -\frac{\nu}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\omega},$$

de sorte que tout est ramené au calcul de ζ. On va constater qu'il est commode de faire un changement de variable indépendante sur ω seul et de poser

$$(27) \qquad v = \operatorname{tang}\omega, \qquad \frac{d\omega}{dv} = \cos^2\omega,$$

on a

$$(28) \quad \xi = \rho\cos\omega = \sqrt{-\frac{\nu}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial v}}, \qquad \eta = \rho\sin\omega = v\sqrt{\frac{-\nu}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial v}}$$

et la seconde équation (24) devient, en se rappelant que ω et t sont variables indépendantes,

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \sqrt{\frac{\partial\zeta}{\partial v}}\,[\alpha + \beta v - \zeta(\gamma + \delta v)]$$

avec

$$(29) \qquad \begin{cases} \alpha = \left(q - \dfrac{r}{\nu}\mu\right)\sqrt{\dfrac{-\nu}{r}}, & \gamma = -\dfrac{pr}{\nu}\sqrt{\dfrac{-\nu}{r}}, \\ \beta = \left(\dfrac{r}{\nu}\lambda - p\right)\sqrt{\dfrac{-\nu}{r}}, & \delta = -\dfrac{qr}{\nu}\sqrt{\dfrac{-\nu}{r}}, \end{cases}$$

α, β, γ, δ sont quatre fonctions de t seul : elles sont réelles toutes ou toutes imaginaires pures. Il est facile de voir que l'équation (E) admet une intégrale complète de la forme

$$(30) \qquad \zeta = \frac{a + bv}{c + dv},$$

où a, b, c, d sont quatre fonctions de t seul ; les rapports mutuels de a, b, c, d intervenant seuls, nous pouvons supposer $bc - ad = 1$, de sorte que a, b, c, d soient réelles ou toutes imaginaires pures. On a en effet

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\zeta}{\partial v} = \dfrac{1}{(c + dv)^2}, \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} = \dfrac{ca' - ac' + v(da' + cb' - bc' - ad') + v^2(db' - bd')}{(c + dv)^2} \end{cases}$$

et l'on est ramené à égaler deux trinomes du second degré en v, d'où

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \begin{cases} ca' - ac' = \alpha c - a\gamma, \\ da' + cb' - bc' - ad' = \alpha d + \beta c - a\delta - b\gamma, \\ db' - bd' = \beta d - b\delta, \\ bc - ad = 1. \end{cases}$$

Les trois premières équations (E_1) s'écrivent

$$(31) \qquad \frac{a' - \alpha}{a} = \frac{c' - \gamma}{c} = \frac{b' - \beta}{b} = \frac{d' - \delta}{d}.$$

La valeur commune de ces rapports s'obtient immédiatement en dérivant la dernière équation (E_1) et remplaçant ensuite a', b', c', d' par $\alpha + Ka$, $\beta + Kb$, $\gamma + Kc$, $\delta + Kd$. On a ainsi finalement à intégrer le système différentiel ordinaire à quatre fonctions inconnues a, b, c, d de t

$$(E_2)\quad \left\{\begin{aligned} a' &= \alpha + \frac{a}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c),\\ b' &= \beta + \frac{b}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c),\\ c' &= \gamma + \frac{c}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c),\\ d' &= \delta + \frac{d}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c),\end{aligned}\right.$$

dont on ne prend que les solutions à *trois* paramètres satisfaisant à $bc - ad = 1$. Donnant à l'un des paramètres une valeur numérique, on a l'intégrale complète de (E) qui permet l'intégration finale définitive par les méthodes classiques. L'intégrale complète ainsi obtenue donne une surface réglée Σ : car

$$\rho^2 = -\frac{\nu}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\omega} = -\frac{\nu}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{1}{\cos^2\omega},$$

d'où

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{-\nu}{r}}\,\frac{1}{c\cos\omega + d\sin\omega},\\ \zeta &= \frac{a\cos\omega + b\sin\omega}{c\cos\omega + d\sin\omega},\end{aligned}\right.$$

équations que l'on peut remplacer évidemment par

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \zeta &= \sqrt{\frac{-r}{\nu}}(a\xi + b\eta),\\ c\xi + d\eta &= \sqrt{\frac{-\nu}{r}},\end{aligned}\right.$$

La courbe $t = \text{const.}$ sur Σ est donc une droite (appartenant au complexe correspondant) : l'intégrale complète en question donne donc trois surfaces particulières associées S, S_1 et Σ qui sont réglées.

Il reste maintenant à démontrer que la surface Σ intégrale de (E) ne peut admettre les courbes F, *supposées gauches*, pour asymptotiques. L'équation

$$\xi \frac{\partial \eta}{\partial \omega} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = 0$$

jointe à sa dérivée par rapport à ω

$$\xi \frac{\partial^2 \eta}{\partial \omega^2} - \eta \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \omega^2} = 0$$

exprime que le plan des deux vecteurs *de direction distincte*

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \omega}, \frac{\partial \eta}{\partial \omega}, \frac{\partial \zeta}{\partial \omega}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \omega^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \omega^2}\right)$$

admet pour normale la droite de paramètre $\left(-\eta, \xi, \frac{\nu}{r}\right)$. Ce plan est le plan osculateur de la courbe *gauche* F, nous n'avons fait que retrouver cette proposition classique que le plan osculateur de la courbe du complexe linéaire est en même temps plan focal du point d'osculation. Si F est asymptotique, ce plan, étant tangent à Σ, contient aussi l'autre tangente $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)$ de sorte que

$$\xi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0,$$

et comme on a déjà remarqué que

$$\xi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial t} = \rho^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} \equiv 0,$$

on a simplement $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$, donc ζ ne dépend que de ω, la surface Σ est donc un conoïde droit d'axe $I\zeta$ et les courbes F doivent donc être les asymptotiques autres que les génératrices horizontales de Σ ; l'équation (E), que nous avons étudiée, devrait donc admettre une intégrale satisfaisant à $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$ et puisque $\frac{\partial \zeta}{\partial v}$ ne saurait être nulle en même temps (sinon Σ serait plane, les courbes F et F_1 planes aussi, ce qui a été vu impossible), il faut que $\zeta = \frac{\alpha + \beta v}{\gamma + \delta v}$, cette dernière fraction étant indépendante de t, ce qui exige que les rapports mutuels de α, β, γ, δ soient indépendants de t ; remplaçons donc α, β, γ, δ par les constantes proportionnelles A, B, C, D et v par $\frac{\eta}{\xi}$: l'équation de la surface devient

$$\zeta = \frac{A\xi + B\eta}{C\xi + D\eta}.$$

C'est celle d'un paraboloïde équilatère, mais alors F serait encore rectiligne. Il y a donc contradiction. Ceci conduit aussi à étudier spécialement le cas où α, β, γ, δ sont proportionnels à des constantes (donc constants en faisant un changement de variable sur t), mais ceci nous entraînerait trop loin.