NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE WEBER

Généralisation de la notion de points réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 89-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__89_1>

[K¹1c]

GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE POINTS RÉCIPROQUES;

PAR ÉMILE WEBER,
Ingénieur.

1. Soit P un point quelconque du plan ABC. Nous désignons ses coordonnées barycentriques par α, β, γ. Son triangle pédal est le triangle A_1 B_1 C_1.

Soit R (λ, μ, ν) un autre point du plan ABC. Joignons AR. Cette droite coupe B_1C_1 en m. Prenons le point m' isotomique de m sur la base B_1C_1 et cherchons l'équation de la droite Am'. Les coordonnées barycentriques courantes sont x, y, z.

Les équations de B_1C_1 et de AR étant

$$-\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=0 \quad \text{et} \quad \nu y=\mu z,$$

il est facile de voir que les coordonnées barycentriques absolues du point m sont $K\alpha\left(\frac{\mu}{\beta}+\frac{\nu}{\gamma}\right)$, $K\mu$, $K\nu$, où

$$K\equiv\frac{\beta\gamma}{\mu\gamma(\alpha+\beta)+\nu\beta(\alpha+\gamma)}.$$

Les coordonnées barycentriques du point milieu de B_1C_1 sont

$$\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha+\gamma}+\frac{1}{\alpha+\beta}\right),\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\beta}{\alpha+\beta},\quad \frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}.$$

Les coordonnées y et z du point m' (symétrique de m par rapport au milieu) sont respectivement :

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}-K\mu \qquad \text{et} \qquad \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}-K\nu,$$

et, après un calcul très simple, on a l'équation de la droite Am' :

$$\frac{y}{z}=\frac{\dfrac{(\alpha+\gamma)^2\beta^2}{\mu}}{\dfrac{(\alpha+\beta)^2\gamma^2}{\nu}}.$$

2. Si nous effectuons les mêmes constructions pour BR et CR, que pour AR, nous obtiendrons les droites Bn' et Cp'. Les equations de ces droites s'obtiennent par le simple jeu des permutations et sont

$$\frac{z}{x}=\frac{\dfrac{(\alpha+\beta)^2\gamma^2}{\nu}}{\dfrac{(\beta+\gamma)^2\alpha^2}{\lambda}},$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\dfrac{(\beta+\gamma)^2\alpha^2}{\lambda}}{\dfrac{(\gamma+\alpha)^2\beta^2}{\mu}}.$$

3. Il résulte de la que les droites Am', Bn', Cp' concourent en un point R' dont les coordonnées sont :

$$\frac{(\beta+\gamma)^2\alpha^2}{\lambda},\quad \frac{(\gamma+\alpha)^2\beta^2}{\mu},\quad \frac{(\alpha+\beta)^2\gamma^2}{\nu}.$$

Nous proposons d'appeler le point R' point réciproque de R dans le système (α, β, γ).

4. Si le point origine P est le barycentre G de ABC,

le point réciproque R′ de R dans le système (1, 1, 1) sera

$$\frac{1}{\lambda},\quad \frac{1}{\mu},\quad \frac{1}{\gamma},$$

ce qui est bien le point réciproque de R d'après la notion habituelle introduite par G. de Longchamps.

5. Steiner a donné le théorème suivant : Si l'on joint les trois sommets aux points milieux des côtés correspondants B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 on obtient trois droites concourantes. Ce théorème est visiblement un cas particulier de la théorie ci-dessus.

6. Il est facile de faire rentrer la notion des points isogonaux dans cette correspondance générale (R, R′). On sait, que l'inverse triangulaire du point λ, μ, ν a pour coordonnées barycentriques $\frac{a^2}{\lambda}, \frac{b^2}{\mu}, \frac{c^2}{\gamma}$. La question se pose comme suit : quel point P faut-il choisir comme point origine de la transformation (RR′), pour que R′ soit l'inverse triangulaire de R?

Il faut avoir

$$a : b : c = \alpha(\beta - \gamma) : \beta(\gamma + \alpha) : \gamma(\alpha + \beta),$$

ou

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{-a-b+c} : \frac{1}{-b+a+c} : \frac{1}{-c+a+b}.$$

Le point P doit donc être le point de Gergonne de ABC.

La transformation isogonale est donc une transformation réciproque ayant pour point-origine le point de Gergonne du triangle fondamental.

7. La généralisation précédente rentre dans les transformations involutives étudiées dans *Mathesis*, 1888, p. 177. Par les sommets A, B, C menons des paral-

lèles à B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Ces droites forment un triangle $A_2B_2C_2$. Appelons A_3, B_3, C_3 les milienx des droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Imaginons maintenant trois faisceaux involutifs définis par le couple (AB et AC) et les rayons doubles AB_2 et AA_3, le couple (BA et BC) et les rayons doubles BC_2 et BB_3, le couple (CA et CB) et les rayons doubles CB_2 et CC_3. Les rayons (AR, AR′), (BR, BR′), (CR, CR′) formeront des couples de rayons conjugués de ces involutions. Les points principaux de cette transformation quadratique involutive sont les points A_2, B_2, C_2 et le point de concours S, des droites AA_3, BB_3, CC_3. On peut adopter des coordonnées trilinéaires ou choisir les paramètres de référence de manière que les coordonnées de S soient 1, 1, 1. Alors les coordonnées de deux points homologues R et R′ sont telles que $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$. Toute transformation quadratique involutive (dépendant de trois involutions hyperboliques) peut se ramener à une transformation réciproque généralisée.