NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON POMEY

Sur la génération des courbes et surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 81-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__81_0>

[M]

SUR LA GÉNÉRATION DES COURBES ET SURFACES ;

PAR LÉON POMEY.

1. *Principe général.* — L'idée directrice très simple qui va nous guider et qui se rattache, comme on le verra, à certaines méthodes de Chasles et de Grassmann, est la suivante : Imaginons, dans le plan, un système S de n courbes (algébriques ou transcendantes) dépendant de certains paramètres arbitraires et soumises à des conditions en nombre suffisant pour réduire à 1 le degré de liberté de S. Tout point M (ou, dualistiquement, toute droite Δ), dont la position est déterminée par celle des courbes de S (comme cela a lieu, par exemple, si M ou Δ est lié au polygone formé par les divers points d'intersection de ces courbes, etc.), décrit (ou enveloppe) une courbe Γ. On obtient donc ainsi ponctuellement ou tangentiellement un mode de génération géométrique (et éventuellement mécanique) de la courbe Γ au moyen du déplacement du système S.

Après avoir reconnu la nature de Γ, le premier problème à se poser est de rechercher le type *le plus général* des courbes susceptibles d'être engendrées par un tel procédé (qu'on pourra évidemment étendre aisément dans l'espace à la définition de courbes et surfaces).

2. Appliquons immédiatement ce principe *aux courbes planes algébriques.*

Premier mode de génération ponctuelle. —

Prenons dans un plan n points fixes ou pivots $A_1, \ldots, A_n$, et n droites mobiles $D_1, \ldots, D_n$ constamment assujetties à passer respectivement par ces points; chacune, telle que D_i, dépend d'un paramètre λ_i $(i = 1, \ldots, n)$. Astreignons en outre ces droites à rester concourantes et les paramètres λ_i à vérifier une relation homographique d'ordre n, c'est-à-dire une relation du premier degré par rapport à chaque λ_i individuellement et du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à leur ensemble,

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n + a\lambda_2\ldots\lambda_n + b\lambda_1\lambda_3\ldots\lambda_n + \ldots \\ &\qquad + d\lambda_{n-1}\lambda_n + e\lambda_1 + \ldots + f\lambda_n + g = 0. \end{aligned}$$

Il est clair que le *lieu géométrique* Γ *du point de concours variable* M *des droites* D_i *est une courbe algébrique d'ordre* n, *qui passe par les* n *pivots.*

Si l'on prend en effet les points d'intersection des droites D_i avec une autre droite *arbitraire* R, il y aura évidemment entre les abscisses de ces points (comptées sur R) une correspondance *linéaire* (ou homographique) par rapport à chacune, comme entre les λ_i; cette relation sera donc de degré $p \leqq n$ par rapport à l'ensemble de ces abscisses. En égalant celles-ci à une même inconnue z on obtient une équation algébrique entière (de degré p) en z, dont les racines déterminent les points où R coupe la courbe Γ. Celle-ci est donc algébrique de degré $p \leqq n$.

Or si les λ_i représentent, par exemple, les abscisses — comptées sur une droite fixe L — des points de rencontre des droites D_i avec cette droite L, ou encore s'ils représentent les coefficients angulaires des D_i, on aura les points, où Γ coupe, suivant le cas, la base L ou la droite de l'∞, en prenant les n racines de l'équation algébrique en λ, obtenue en faisant

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda.$$

Donc $p = n$ et Γ est bien de degré n.

Nous nous occuperons plus loin de la proposition réciproque.

Remarque. — Plus généralement, on aurait pu supposer que les droites D_i, au lieu de passer par des points fixes, restent tangentes à des courbes fixes.

3. *Autres modes de génération résultant du premier.* — Divisons le système S des n droites mobiles D_i en m groupes comprenant : le premier, p de ces droites $D_1, D_2, \ldots, D_p$; le second, q autres droites $D_{p+1}, \ldots, D_{p+q}$; le troisième, r autres droites, etc. (avec $n = p + q + r + \ldots$).

Soient $\overline{M}$ et $\overline{S}$ une position particulière d'une part du point M sur Γ et du système S, position pour laquelle les valeurs correspondantes $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda_n}$ des paramètres satisfont à la condition (1). Laissons alors fixes dans (1) les valeurs de $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$; les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ de $D_1, \ldots, D_p$ resteront variables mais soumis à la relation (1), où les autres paramètres ont les valeurs $\overline{\lambda_{p+1}}, \overline{\lambda_{p+2}}, \ldots, \overline{\lambda_n}$. Dans ces conditions les p droites concourantes du premier groupe, astreintes à une relation homographique d'ordre p, engendreront une courbe Γ_p de degré p, passant par les points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ et $\overline{M}$ de Γ.

De même, laissant fixes tous les paramètres sauf ceux du deuxième groupe, les droites de ce groupe engendreront une courbe Γ_q de degré q, passant par $A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots, A_{p+q}$ et par le point $\overline{M}$ de Γ.

Et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi un système de courbes Γ_p, Γ_q, Γ_r. ... se coupant toutes en $\overline{\mathrm{M}}$. Quand tous les paramètres varient ensemble sous la condition (1), ces courbes engendrent des faisceaux *dont le point commun décrit* Γ.

Nous appellerons ce mode générateur de Γ *le mode* m $(p, q, r, \ldots)$. Le *premier mode* ou mode n (1, 1, 1, 1, ...) sera dit *mode linéaire*.

4. *Cas particulier.* — Considérons le mode 2 $(1, n-1)$ réalisé de la manière suivante : quand la droite A_1M ou D_1 tourne autour de A_1, à chaque valeur de son paramètre λ_1 correspond une courbe Γ_{n-1} engendrée par le système des $(n-1)$ autres droites concourantes soumises à la condition (1) et réciproquement. Cette droite D_1 et cette courbe Γ_{n-1} se correspondent ainsi d'une manière univoque et peuvent donc s'écrire (P et Q étant de degré 1, R et U de degré $n-1$)

$$(D_1) \qquad P + \lambda_1 Q = 0,$$

$$(\Gamma_{n-1}) \qquad R + \lambda_1 U = 0.$$

Donc le lieu Γ de leur point de rencontre M a pour équation

$$(\Gamma) \qquad PU - RQ = 0.$$

Donc la courbe Γ_{n-1} étant de degré $(n-1)$, la courbe Γ sera de degré n. Comme la courbe Γ_2 obtenue par ce procédé est lieu du point de rencontre des rayons homologues A_1 M, A_2 M de deux faisceaux homographiques, c'est une conique. De sorte que la loi de récurrence, vraie pour $n = 2$, l'est bien d'une manière générale; ce qui confirme le fait reconnu plus haut (§ 2), que Γ est bien de degré n.

Ce mode 2 $(1, n-1)$ rentre d'ailleurs, comme nous l'a signalé M. E. Pomey, dans le *procédé de Chasles*, qui consiste à considérer la courbe Γ comme lieu des points d'intersection de deux courbes algébriques Γ_p, Γ_q (de degrés p et q avec $n = p + q$) appartenant à deux faisceaux, dont les deux paramètres λ et μ sont liés par une relation homographique ([1]).

5. *Réciproquement*, TOUTE *courbe algébrique* Γ *de degré n peut être engendrée par le mode linéaire* ou par le *mode* $m\,(p, q, \ldots)$.

En effet chacun de ces modes peut se ramener — comme on vient de l'indiquer (n° 4) — au *procédé de Chasles*, lequel jouit effectivement de la propriété énoncée ([2]).

6. *Autres modes de génération déduits du mode* $m\,(p, q, r, \ldots)$

Considérons à nouveau la position particulière $\overline{M}$, $\overline{S}$ du point M sur Γ et du système S de droites, ainsi que les positions correspondantes $\overline{\Gamma}_p$, $\overline{\Gamma}_q$, $\overline{\Gamma}_r$, ... des courbes génératrices Γ_p, Γ_q, ... définies au n° 3. Laissons fixes tous les paramètres sauf les $p+q$ premiers qui sont relatifs à Γ_p et Γ_q, savoir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+q}$, ceux-ci restant variables mais astreints à la condition (1), où les autres paramètres ont les valeurs fixes $\overline{\lambda}_{p+q+1}, \ldots, \overline{\lambda}_n$. Alors les points de rencontre de Γ_p et Γ_q (ou ce qui revient au même le point de concours des $p+q$ droites $D_1, \ldots, D_{p+q}$) décrit une courbe algébrique Γ_{p+q} de degré $p+q$, qui passe par $\overline{M}$ et par $A_1, A_2, \ldots, A_{p+q}$.

En associant de même deux à deux les diverses courbes Γ_p, Γ_q, Γ_r, ..., nous obtiendrons une suite de

---

([1]) *Voir* FÉLIX LUCAS, *Théorie générale des courbes planes*, p. 113 et 147, ou CLEBSCH et LINDEMANN, *Leçons sur la Géométrie*, t. II, p. 95-96, 141-142, 269-276, et t. III, p. 128-132.

([2]) CLEBSCH, t. III, p. 132.

courbes Γ_{p+q}, Γ_{p+r}, Γ_{q+r}, ..., dont le point de concours M engendrera encore Γ.

D'où le *mode de génération* (Γ_{p+q}, Γ_{q+r}, ...).

Ensuite, on pourra associer dans des conditions analogues ces dernières courbes Γ_{p+q}, Γ_{p+r}, ... et réaliser encore un nouveau mode de génération.

Et ainsi de suite, le degré des courbes génératrices s'élevant ainsi de plus en plus, depuis les premières qui étaient des droites.

7. La transformation par *dualité* nous donne autant d'autres modes générateurs corrélatifs. Ainsi le premier ou *mode linéaire ponctuel*, pour nous en tenir à ce seul exemple, deviendra celui-ci :

Mode linéaire tangentiel de génération : si sur n droites fixes se déplacent n points assujettis à rester alignés sur une droite mobile Δ de façon que les paramètres λ_1, λ_2 ..., λ_n dont ils dépendent vérifient une relation homographique du $n^{\text{ième}}$ ordre, l'enveloppe de Δ sera une *courbe algébrique de classe* n, tangente aux n bases fixes.

Cas particulier. — Si l'on prend pour paramètres λ les *abscisses* (comptées sur les n origines fixes) des intersections de ces bases avec la tangente mobile Δ, et si la relation homographique qui les lie est *linéaire* (soit $\Sigma m_i \lambda_i = c$, m_i et c étant des constantes arbitraires), l'enveloppe de Δ est *la courbe de $n^{\text{ième}}$ classe la plus générale admettant la droite de l'∞ pour tangente multiple d'ordre* $(n-1)$. Les courbes de cette espèce ont été envisagées par Darboux dans ses *Principes de Géométrie analytique* (1917, p. 161 et suiv.); la plus simple d'entre elles est la parabole.

8. Par la lecture dans Clebsch *du procédé de Chasles*, notre attention a été également attirée sur le *procédé de Grassmann* ([1]) qui n'est autre chose qu'un cas particulier de notre *mode linéaire* (ponctuel ou tangentiel). Ce procédé de Grassmann en se bornant, pour plus de simplicité, au troisième degré, généralise celui de Mac Laurin et Taylor pour les coniques et consiste en ceci :

Si un point M se meut de telle manière que les droites, qui le joignent à trois points fixes A_1, A_2, A_3, rencontrent respectivement trois droites fixes en trois points situés sur une droite mobile Δ, ce point M décrit une courbe du troisième ordre et cette droite Δ enveloppe une courbe de troisième classe.

Il est ainsi visible que notre *mode générateur linéaire et ses dérivés* forment un lien et une transition entre les procédés de Chasles et de Grassmann. Ce dernier fournit en même temps un exemple de la manière dont on pourrait, entre autres, réaliser *mécaniquement* nos procédés définis géométriquement.

9. Cas particulier *du mode générateur linéaire*. — Supposons la relation (1) *involutive*, c'est-à-dire symétrique par rapport aux λ_i, qui sont les abscisses des points α_i sur L. On peut en donner une *interprétation géométrique* (voir M. Appell, *Thèse*, 1876, p. 7). Prenant, pour simplifier l'écriture, n égal à 3, l'équation involutive (1) est de la forme

$$(1') \qquad A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0.$$

Soient α', α'', α''' les points *triples*, dont les abscisses

([1]) Clebsch, t. II, p. 270.

sont racines de l'équation

$$A\lambda^3 + 3B\lambda^2 - 3C\lambda + D = 0;$$

l'équation (1') équivaut à celle-ci (où α_1, α_2, α_3 sont les points d'abscisses λ_1. λ_2 λ_3 sur L),

$$\overline{\alpha_1\alpha'} \times \overline{\alpha_2\alpha''} \times \overline{\alpha_3\alpha'''} + \overline{\alpha_1\alpha''} \times \overline{\alpha_2\alpha'''} \times \overline{\alpha_3\alpha'} + \overline{\alpha_1\alpha'''} \times \overline{\alpha_2\alpha'} \times \overline{\alpha_3\alpha''} = 0.$$

(D'ailleurs les points triples sont trois points homologues de l'involution.)

Faisons encore, avec M. Appell, une autre remarque : Quand deux des points α_1, α_2, α_3 coïncident, soient α_2 et α_3, cette relation géométrique devient

$$\frac{3}{\alpha_2\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2\alpha'} + \frac{1}{\alpha_2\alpha''} + \frac{1}{\alpha_2\alpha'''},$$

qui exprime que le point α_1 est le centre des *moyennes harmoniques* (1) du point α_2 par rapport aux points triples α', α'', α'''.

10. *Surfaces algébriques.* — L'extension de ce qui précède à l'espace est immédiate. Indiquons-la *analytiquement* en deux mots dans le cas du *mode linéaire ponctuel.*

Soient n droites fixes D_1, D_2, ..., D_n dont chacune telle que D_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) est définie comme intersection de deux plans $P_i = 0$ et $Q_i = 0$, et sert d'axe de rotation à un plan variable π_i, qui a pour équation $P_i + \lambda_i Q_i = 0$, les paramètres λ_i étant astreints à vérifier une relation homographique d'ordre n : $F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0$.

Les n plans mobiles π_i étant en outre assujettis à concourir en un même point M, le lieu de celui-ci

(1) *Voir*, par exemple, Félix Lucas, *Théorie générale des courbes planes*, p. 25 et 65.

sera la *surface algébrique d'ordre n*, dont l'équation ponctuelle est

$$F\left(\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}\right) = 0.$$

Les autres modes générateurs, notamment ceux de Chasles et Grassmann, s'en déduisent sans effort.