Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 74-80
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__74_2>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Épreuve théorique. — *Dans ce qui suit, négliger le frottement et l'influence du mouvement de la terre.*

Soient O_1x_1, y_1, z_1 *trois axes rectangulaires, liés à la* *terre :* $O_1 z_1$ *est la verticale ascendante du point* O_1. *Un cylindre circulaire droit peut se déplacer en restant tangent au plan* $x_1 O_1 y_1$ *suivant une génératrice. Soumis à la seule action de son poids, il a une densité, variable dans chaque section droite, mais constante le long de toute parallèle à son axe. Sur cet axe, le centre de gravité* G *est projeté en* g. *Soit* c *la distance* gG. *Les axes liés au corps forment un trièdre trirectangle* Gxyz, *dont l'arête* Gy *est parallèle à l'axe du cylindre, dont l'arête* Gz *prolonge* gG *au delà de* G, *et dont le sens concorde avec celui du trièdre de référence.* Des trois angles d'Euler ψ, θ, φ, qui fixent la direction du trièdre Gxyz, deux seulement, ψ et θ, sont arbitraires. Par rapport à ce trièdre, l'équation de l'ellipsoïde d'inertie est

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 - 2\mathrm{E}zx = 1.$$

Étudier le mouvement, en se conformant au plan suivant :

1° *Justifier, en deux mots, les indications ci-dessus (lignes soulignées). Calculer les projections de la rotation instantanée sur* Gx, Gy, Gz *et la force vive.*

2° *Écrire les équations de Lagrange. Quel est le mouvement de* G? *Interpréter l'équation issue du paramètre* ψ. *Montrer qu'on peut déterminer* θ, *puis* ψ, *en fonction du temps, par deux quadratures.*

3° *Étudier les simplifications apportées par un choix particulier des conditions initiales. Montrer qu'elles peuvent être prises de manière que le mouvement soit une rotation autour d'un axe vertical, ou encore, s'effectue parallèlement à un plan vertical fixe.*

4° *Quelles conditions faut-il imposer à* A, C, E *pour que, dans tout mouvement de l'appareil, l'expression de* θ *en fonction de* t *soit identifiable avec celle qui définit un de ses mouvements parallèles à un plan vertical fixe. Ces conditions étant remplies, achever l'étude du mouvement.*

5° *Donner la discussion lorsque* $c = 0$ *(sans autre hypothèse) et si possible dans le cas tout à fait général. Toute position initiale du cylindre est-elle compatible avec l'existence d'un mouvement de rotation autour d'une verticale?*

Indications sur la solution, par M. *P. Robert*. — L'angle d'Euler φ est égal à $-\frac{\pi}{2}$. Les composantes de la rotation instantanée sont donc :

$$p = -\psi' \sin\theta, \qquad q = \theta', \qquad r = \psi' \cos\theta,$$

et la force vive totale est :

$$\begin{aligned} 2\mathrm{T} &= \mathrm{M}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) \\ &\quad + \psi'^2(\mathrm{A}\sin^2\theta + 2\mathrm{E}\sin\theta\cos\theta + \mathrm{C}\cos^2\theta) + \mathrm{B}\theta'^2, \end{aligned}$$

avec la liaison $\zeta = \mathrm{R} + c\cos\theta$.

Le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme. On peut d'ailleurs se ramener au cas où cette vitesse est nulle : il ne restera alors qu'à déterminer θ et ψ en fonction du temps. On écrira pour cela l'équation de Lagrange issue du paramètre ψ (elle exprime le théorème du moment cinétique par rapport à la verticale du centre de gravité dans le mouvement autour de ce point), et l'intégrale des forces vives [en remarquant qu'il y a ici une fonction des forces

$$\mathrm{U} = -\mathrm{M}g(\mathrm{R} + c\cos\theta)],$$

ce qui donne :

$$\psi'(\mathrm{A}\sin^2\theta + 2\mathrm{E}\sin\theta\cos\theta + \mathrm{C}\cos^2\theta) = \mathrm{K},$$

$$\begin{aligned} &(\mathrm{M}c^2\sin^2\theta + \mathrm{B})\theta'^2 + \psi'^2(\mathrm{A}\sin^2\theta + 2\mathrm{E}\sin\theta\cos\theta + \mathrm{C}\cos^2\theta) \\ &\quad = h - 2\mathrm{M}gc\cos\theta. \end{aligned}$$

Éliminant ψ' entre ces deux équations, on trouve θ en fonction du temps par une quadrature. Les mouvements de rotation s'obtiennent en choisissant h et K de manière que l'expression

$$(1) \qquad h - 2\mathrm{M}gc\cos\theta - \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{A}\sin^2\theta + 2\mathrm{E}\sin\theta\cos\theta + \mathrm{C}\cos^2\theta}$$

ait une racine double θ_0. Si θ_0 est donné, on trouve deux équations pour déterminer h et K^2 qui conviennent pour un mouvement de rotation. On remarquera que la valeur K^2 doit être positive. Il s'ensuit qu'une inclinaison déterminée de gG n'est pas toujours compatible avec une rotation de l'appareil autour d'un axe vertical. Pour faire complètement la discussion générale, il y aura intérêt à réaliser une représentation graphique de l'expression (1) située sur le cylindre $u = \cos\theta$, $v = \sin\theta$ (système d'axes u, v, w). On sera ainsi amené à envisager les positions relatives du plan $w = h - 2\,\mathrm{M}gcu$ et d'une courbe (γ) représentée par les équations

$$u = \cos\theta, \qquad v = \sin\theta, \qquad w = \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{A}v^2 + 2\,\mathrm{E}uv + \mathrm{C}u^2}.$$

Si le mouvement est parallèle à un plan vertical fixe, la rotation instantanée doit être horizontale. Donc il faut que $\psi' = 0$. Le mouvement obtenu dans ce cas rappelle le mouvement pendulaire. Pour résoudre la quatrième partie, il suffit d'écrire que la forme $\mathrm{A}\sin^2\theta + 2\mathrm{E}\sin\theta\cos\theta + \mathrm{C}\cos^2\theta$ se réduit à une constante, c'est-à-dire que l'on doit avoir $\mathrm{A} = \mathrm{C}$, $\mathrm{E} = 0$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sur un plan horizontal fixe* P, *peut se mouvoir, sans frottement, une sphère pesante* S, *non homogène, de centre* O *et de rayon* R. *Tout se passe comme si la sphere* S *comportait :*

1° *Une masse* M, *uniformément répartie entre la totalité de son volume.*

2° *Quatre masses, égales chacune à* $\frac{\mathrm{M}}{5}$, *et concentrées respectivement aux sommets d'un losange, de centre* O, *dont les demi-diagonales* $\mathrm{OA} = \mathrm{OA}' = a$ *et* $\mathrm{OB} = \mathrm{OB}' = b$ *sont définies par les relations* $2b^2 + a^2 = \mathrm{R}^2$ *et* $a^2 = b^2\sqrt{3}$. *A l'instant initial, le losange est horizontal et le solide au repos, On lui applique alors une percussion horizontale, sous l'influence de laquelle le centre* O *prend une vitesse* V, *parallèle à* OB *et de même sens. Par rapport au trièdre trirectangle direct* OABC, *dont deux arêtes sont dirigées suivant les diagonales du losange, le point d'application de cette percussion est le point* x, y, z *de la sphère* S, *tel qu'on ait* $x = y = z > 0$.

Étudier le mouvement de la sphère, rapporté à la position initiale du trièdre OABC, *d'après les indications suivantes :*

1° *Évaluer, à l'instant* t, *les projections* p, q, r *de la rotation instantanée de* S *sur les arêtes du trièdre* OABC *lié à* S. *Trouver le lieu décrit dans le corps* S, *par le vecteur rotation. Le calcul, poussé jusqu'au bout, décèlera une particularité importante du mouvement.*

2° *Déterminer, en fonction de* t, *les angles d'Euler* ψ, θ, φ

définissant le trièdre OABC *par rapport à sa position initiale. Tenant compte du résultat de la première partie, on reviendra aux notations littérales (compatibles avec ce résultat) pour exécuter seulement à la fin de la rédaction les calculs qui se présentent.*

INDICATIONS, par M. *P. Robert.* — Le mouvement pris par la sphère autour de son centre de gravité est un mouvement à la Poinsot. Le lieu de l'axe instantané dans le corps est un plan; les quantités p, q, r s'expriment à l'aide de fonctions hyperboliques du temps. Pour le calcul des angles d'Euler, on remarquera que le moment cinétique du mouvement autour du centre de gravité a une direction invariable, celle de la seconde bissectrice de l'angle $\widehat{A_0 O C_0}$ (position initiale de $\widehat{AOC}$). On calculera d'abord les cosinus directeurs de cette direction par rapport au trièdre OABC, en fonction des angles d'Euler.

(Poitiers, juin 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — S *est un solide homogène pesant de révolution, suspendu par un point* O *de son axe* Gz *sur lequel* Ω *est un point marqué.* Δ *est une tige homogène mobile autour de son centre de gravité, fixé sur la verticale ascendante de* O *en un point* $O_1 (OO_1 = O\Omega)$. *Le point* Ω *est assujetti à se trouver toujours sur la tige* Δ *et le plan* $O\Delta$ *à tourner autour de* OO_1 *avec la vitesse constante donnée* ω.

1° *Indiquer les divers cas de variation de l'angle* θ *de* Oz *avec la verticale descendante.*

2° *Montrer que si, gardant les mêmes conditions initiales satisfaisant à l'inégalité*

$$\theta_0'^3 > 4\omega^2,$$

on diminue la masse de Δ, *on diminue l'intervalle de variation de* θ.

3° *Étudier les divers mouvements qui peuvent se produire quand, à l'instant initial, le solide* S *est en repos relatif pour un observateur subissant la rotation* ω. *Indiquer les conditions que doivent remplir les données pour qu'en faisant varier* θ_0 *on puisse obtenir tous les cas de mouvement que l'on vient de trouver et déterminer, pour* θ_0, *les arcs qui y correspondent.*

Indications sur la solution. — Avec les notations habituelles, on a

$$2T = A(\omega^2 \sin^2\theta + \theta'^2) + C(\omega\cos\theta + \varphi')^2 + B\left(\omega^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{\theta'^2}{4}\right),$$
$$U = Mgl\cos\theta.$$

On a une intégrale immédiate donnée par φ et l'intégrale des forces vives de Painlevé. On est ainsi conduit à

$$\left(A + \frac{B}{4}\right)\theta'^2 = F(\theta) = A\omega^2\sin^2\theta + B\omega^2\frac{1-\cos\theta}{2} + 2(Mgl + C\lambda\omega)\cos\theta + h - C\lambda^2$$
$$\varphi' = \lambda - \omega\cos\theta.$$

1° En posant $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ on est conduit, pour discuter θ, à étudier l'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 1$ avec une parabole ayant Ox pour axe.

2° En remplaçant h et λ au moyen des valeurs initiales, on voit que F se met sous la forme

$$F(\theta) = \Phi(\theta) + B\Psi(\theta),$$

la fonction Ψ étant positive quel que soit θ d'après l'inégalité de l'énoncé. Si $B > B_1$, il en résulte

$$F > F_1$$

quel que soit θ. Donc si θ rend F_1 positif, il rend F positif *a fortiori.*

3° On a $\theta'_0 = \varphi'_0 = 0$:

$$F(\theta) = (\cos\theta - \cos\theta_0)\left[2Mgl - \frac{B\omega^2}{2} - A\omega^2(\cos\theta + \cos\theta_0)\right]$$

et l'on a divers mouvements suivant que la droite

$$x = -x_0 + \frac{2Mgl - \frac{B\omega^2}{2}}{A\omega^2}$$

rencontre le cercle $x^2 + y^2 = 1$, lui est tangente ou ne le rencontre pas. Quand x_0 varie de -1 à $+1$ l'abscisse de cette droite varie de

$$-1 + \frac{2Mgl - \frac{B\omega^2}{2}}{A\omega^2} \quad \text{à} \quad +1 + \frac{2Mgl - \frac{B\omega^2}{2}}{A\omega^2}$$

et l'on obtiendra tous les cas de discussion si l'une des deux valeurs -1, $+1$ est comprise dans cet intervalle. Une discussion élémentaire montre qu'il faut

$$\frac{B}{2} - 2A < \frac{2Mgl}{\omega^2} < \frac{B}{2} + 2A$$

et la question s'achève sans difficulté.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne un point fixe* O *et un plan vertical fixe* P *dont la distance à* O *est* $\frac{2}{\sqrt{3}}$. *Un solide pesant a la forme d'un cube* ABCD A'B'C'D' *de côté* 1, *la densité à son intérieur étant, en chaque point, numériquement égale à sa distance à la face* ABCD.

On fixe le sommet A *en* O *et l'on oblige les deux sommets* B', D' *à décrire le plan* P. *On a ainsi deux dispositions qui donnent deux liaisons différentes ; pour chacune d'elles, le solide a une position d'équilibre stable autour de laquelle il effectue de petites oscillations quand on l'écarte très peu et il existe un pendule simple synchrone. Déterminer numériquement les longueurs de ces deux pendules simples.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Par B'D' on peut mener deux plans à la distance $\frac{2}{\sqrt{3}}$ du point A. Soient Δ et Δ' les perpendiculaires abaissées de A sur ces deux plans. Les deux liaisons sont celles obtenues en fixant horizontalement soit Δ, soit Δ'. On a ainsi deux pendules composés, de sorte que tout revient à chercher les moments d'inertie du solide par rapport à ces deux droites ainsi que leurs distances au centre de gravité.

Pour faire les calculs simplement on prendra pour axes les trois arêtes issues de A et l'on aura les deux moments d'inertie des droites Δ, Δ' issues de A au moyen de l'ellipsoïde d'inertie de ce point et de leurs cosinus directeurs.

(Bordeaux, juin 1923.)