Nouvelles annales de mathématiques

A. Bloch

Les propriétés diamétrales des coniques déduites de la définition focale

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 70-73

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__70_1>

[$L^1$3]

LES PROPRIÉTÉS DIAMÉTRALES DES CONIQUES DÉDUITES DE LA DÉFINITION FOCALE ;

PAR A. BLOCH.

Les propriétés projectives des coniques peuvent s'établir par de simples considérations de géométrie plane. Plusieurs auteurs les déduisent par exemple du fait suivant :

Lorsque l'on applique à une conique une transformation homologique ayant pour centre un des foyers de la courbe, pour axe l'homothétique par rapport à ce foyer, le rapport d'homothétie étant 2, de la directrice correspondante, enfin pour rapport d'homologie — 1, la courbe transformée est un cercle ayant pour centre le foyer en question.

Mais lorsque l'on se borne aux propriétés d'affinité, on est en droit de désirer une démonstration donnant des choses une vision plus directe. Laissant de côté le cas de la parabole, qui est classique ([1]), voici comment le second théorème de Poncelet permet, pour l'ellipse et l'hyperbole, d'obtenir rapidement ces propriétés.

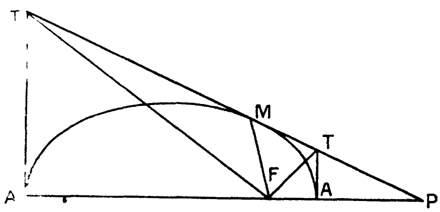
Ellipse. — Soit une ellipse de grand axe AA′, dont F est l'un des foyers ; la tangente en un point quelconque M coupe le grand axe en P et les tangentes en A et A′ aux points T et T′.

FT est bissectrice de l'angle AFM ; FT′, de l'angle A′FM. L'angle TFT′ est droit, et l'on a

$$AT \,.\, A'T' = FA \,.\, FA' = \text{const.}$$

D'autre part les points M et P sont conjugués harmoniques par rapport à T et T′.

Fig. 1.



On a ainsi une construction, par droites et par

([1]) *Cf.*, par exemple, J. HADAMARD, *Leçons de Géométrie élémentaire*, t. II, p. 230-237.

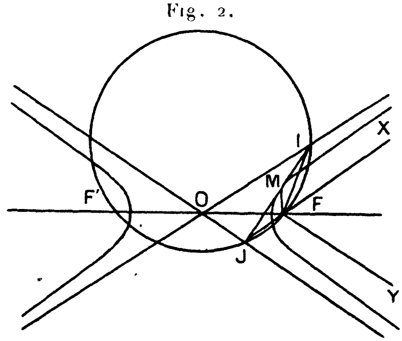
points, des ellipses de grand axe AA'; toutes ces ellipses sont affines les unes des autres par rapport à cet axe, et le sont en particulier du cercle de diamètre AA'; les propriétés d'affinité du cercle s'étendent donc à l'ellipse.

Hyperbole. — Soit l'hyperbole d'asymptotes OX, OY, de foyers F et F'. La tangente en un point quelconque M coupe les asymptotes en I et J.

Supposons par exemple M sur la branche de courbe ayant F à son intérieur. Soient FX et FY les parallèles menées par F aux asymptotes. Les angles IFM et IFX sont égaux, ainsi que les angles JFM et JFY. L'angle IFJ est donc le supplément du demi-angle des asymptotes, et les points F, F', I, J sont sur un même cercle. On a donc $OI \,.\, OJ = \overline{OF}^2 = \text{const.}$

D'autre part les distances de I à FM et à FX sont égales, celles de J à FM et FY le sont aussi; les distances de I et J à FM sont donc égales, et M est le milieu de IJ.

Fig. 2.



Le produit des distances de M aux asymptotes est donc constant; de cette propriété résultent immédiatement l'existence des diamètres et toutes les propriétés d'affinité.

Note. — Dans un article paru dans les *Nouvelles Annales* en 1905 (p. 145) sous le titre *Sur la théorie des coniques*, M. Hadamard a développé des idées analogues aux précédentes. Il se propose de passer des propriétés focales aux propriétés projectives des coniques par une méthode plus simple et plus naturelle que les méthodes classiques.

Les deux théorèmes à établir tout d'abord sont les suivants : 1° l'ellipse est la projection d'un cercle; 2° le produit des distances d'un point d'une hyperbole à ses asymptotes est constant. La démonstration que donne M. Hadamard du second théorème ne diffère pas sensiblement de la mienne; pour le premier, je crois être arrivé à une simplification appréciable, en utilisant comme dans l'autre cas le théorème de Poncelet, alors que M. Hadamard emploi des considérations différentes.

Les présentes démonstrations, obtenues d'ailleurs sans la connaissance de l'article de M. Hadamard, l'ont été pour l'hyperbole en 1909, pour l'ellipse en 1923.