TH. LECONTE

Sur quelques fonctions discontinues ou dépourvues de dérivées

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 59-70

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__59_1>

[D1a]

SUR QUELQUES FONCTIONS DISCONTINUES OU DÉPOURVUES DE DÉRIVÉES;

PAR TH. LECONTE.

La troisième édition du *Traité d'Analyse* de M. Picard contient l'étude d'une fonction continue n'admettant de dérivée pour aucune valeur de la variable. Cette fonction, construite par M. Helge von Koch, est plus simple que la fonction célèbre de Weierstrass, la première en date (voir le *Cours d'Analyse* de M. Goursat) et celles que l'on trouve dans le Mémoire de Darboux sur les fonctions discontinues $\left[\text{par exemple, la somme de la série de terme général } \frac{\sin(n!x)}{n!}\right]$.

J'ai cherché, en partant des fonctions anormales que l'on peut tirer de la représentation décimale de la variable, un exemple qui fût plus accessible encore. Je me suis ensuite aperçu, en feuilletant les *Mathematische Annalen* que l'étude de M. Helge von Koch a été suivie de diverses notes contenant des exemples plus simples que le sien; cependant il ne sera pas inutile, je crois, de publier ce court article qui est d'un caractère élémentaire, qui peut prêter à la réflexion et fournir des énoncés d'exercices.

1. L'un des moyens les plus simples et les plus féconds de construire des fonctions anormales consiste à écrire la représentation décimale (ou dans un système à base quelconque) de la variable et à utiliser les chiffres de cette représentation pour définir la fonction.

Une même circonstance se rencontre dans tous les exemples formés sans précautions par ce procédé : la fonction n'est définie lorsque x est un nombre décimal que si l'on a, au préalable, fait choix de l'un des deux modes de représentation d'un nombre décimal, soit de la représentation limitée $0, a_1 a_2 \ldots a_n\, 0\, 0 \ldots$, soit de la représentation illimitée $0, a_1 a_2 \ldots a_n - 1\, 9\, 9 \ldots$. La règle qui conduit à la valeur de la fonction, appliquée à ces deux formes, ne donne pas en général le même nombre en sorte que de telles fonctions sont discontinues lorsque x est un nombre décimal.

Disons quelques mots de l'un de ces exemples [1] dont l'étude précède naturellement celle des fonctions de Peano. On sait que Peano a, le premier, en écrivant la variabie dans le système à base 3, construit des fonctions continues dépourvues de dérivées et définissant une courbe qui emplit un carré [2].

Soit, dans l'intervalle $(0, 1)$, la variable

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots.$$

Adoptons, pour préciser, la représentation illimitée de la variable lorsqu'elle est un nombre décimal et envisageons la fonction $y = 0,\ a_1 a_3 a_5 \ldots.$ Cette fonction est évidemment continue pour les valeurs de x qui ne sont pas des nombres décimaux. Elle l'est aussi pour un nombre décimal de la forme

$$x_0 = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}\ 9\ 9\ \ldots \qquad (a_{2n-1} \neq 9),$$

à laquelle correspond

$$y_0 = 0,\ a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}\ 9\ 9\ \ldots;$$

c'est immédiat à gauche parce qu'un nombre variable x tendant vers x_0 en croissant finit par avoir autant de décimales communes avec x_0 que l'on voudra ; à droite, cela résulte de ce qu'un nombre variable x tendant vers x_0 en décroissant a une représentation décimale

---

(1) Pour d'autres utilisations du même procédé, *voir* Lebesgue, *Leçons sur l'Intégration*, p. 44 et 90, et Bouligand, *Revue de l'Enseignement des Sciences*, 11e année, nos 103 et 104.

(2) Les recherches, trop oubliées, de Peano ont précédé celles de Hilbert qui a aussi donné un exemple, obtenu par une voie différente, d'une courbe emplissant un carré (*voir* le *Traité d'Analyse* de M. Picard).

dont les premiers chiffres sont $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}+1$, suivis d'autant de zéros que l'on voudra et de ce que la limite des valeurs correspondantes de y est le nombre $0, a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}+1\ 0\ 0 \ldots$ qui est égal à y_0. Enfin, pour un nombre décimal de la forme

$$x_0 = 0, a_1 a_2 \ldots a_{2n}\ 9\ 9 \ldots \qquad (a_{2n} \neq 9),$$

à laquelle correspond

$$y_0 = 0, a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}\ 9\ 9$$

il y a continuité à gauche, il est aisé de le voir, mais il y a discontinuité à droite car si une valeur variable de x tend vers x_0 en décroissant, sa représentation décimale a pour premiers chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}+1$, suivis d'autant de zéros que l'on voudra et la limite des valeurs correspondantes de y est le nombre

$$0, a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}\ 0\ 0 \ldots,$$

il y a donc discontinuité de première espece et le saut de la fonction est $\frac{1}{10^{2n-1}}$; en un tel point, a droite, la fonction n'admet pas pour valeur la borne inferieure de ses valeurs.

Cette fonction n'admet de dérivée en aucun point, soit x_1, où elle est continue; il est en effet possible d'imaginer deux ensembles infinis de valeurs de x tendant vers x_1, le premier dans lequel $a_1, a_3, \ldots$ gardent la même valeur, le second dans lequel a_{2p+1} seul change, étant augmenté ou diminué d'une unité, de sorte que l'on a dans ce cas

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\pm \frac{1}{10^{p+1}}}{\pm \frac{1}{10^{2p+1}}} = 10^p$$

et que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ croît ici indéfiniment avec p alors qu'il était constamment nul pour le premier ensemble ; il n'y a donc pas de dérivée.

Il est bon de remarquer que la fonction admet une valeur donnée $0, A_1 A_3 A_5 \ldots$ pour une infinité de valeurs de x de la forme $0, A_1 a_2 A_3 a_4 A_5 a_6 \ldots$, les chiffres a_2, a_4, ... étant arbitraires. L'ensemble E de ces valeurs de x, qui a évidemment la puissance du continu, est de mesure nulle ; on le voit en envisageant l'ensemble complémentaire E′ de l'ensemble E ; l'ensemble E′ est formé d'abord de l'ensemble des nombres $0, a_1 \ldots$, $a_1 \neq A_1$, dont la mesure est $\frac{9}{10}$, puis de l'ensemble des nombres $0, A_1 a_2 a_3 \ldots$, a_2 quelconque, $a_3 \neq A_3$ dont la mesure est $10 \times \frac{9}{10^3} = \frac{9}{10^2}$; on peut ainsi continuer indéfiniment, la mesure totale de l'ensemble E′, $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots$, est égale à 1.

Étudions maintenant la fonction au point de vue de la croissance ou de la décroissance en un point x_0. Il est aisé de voir que, x_0 étant un nombre décimal en lequel la fonction est continue, pour x suffisamment voisin de x_0, on a, à droite, $y \geqq y_0$ et à gauche $y \leqq y_0$, la fonction ne décroît pas en un tel point ; le résultat est différent lorsque x_0 est un nombre décimal en lequel il y a discontinuité, à droite $y < y_0$, à gauche $y \leqq y_0$, et sans qu'on puisse dire qu'il y a maximum relatif, y_0 est une valeur extrême supérieure ou égale à toutes les valeurs voisines. Pour les autres valeurs de x_0, on remarquera que lorsqu'on augmente un chiffre de rang impair, x_0, y_0 augmentent et que cela est possible pour des valeurs infiniment voisines de x_0 à moins que tous les chiffres de rang impair ne soient des 9 à partir d'un certain rang ; de même, en diminuant un chiffre de rang impair, on diminue x_0, y_0 et cela est possible pour des valeurs infiniment voisines de x_0 à moins que tous les chiffres de rang impair ne soient des zéros à partir d'un certain rang; en augmentant un chiffre de rang pair et en diminuant un chiffre de rang impair qui vient après, on augmente x_0, on diminue y_0; une opération analogue permet de diminuer x_0 et d'augmenter y_0; hormis des cas d'exception faciles à énoncer, ces deux dernières opérations sont possibles pour des valeurs infiniment voisines de x_0, en sorte que, mises à part des valeurs exceptionnelles de x_0 pour lesquelles on ferait une étude directe, la fonction n'est ni croissante ni décroissante.

2. Les fonctions x, y de la variable t, que nous allons définir, sont l'adaptation au système à base 10 des fonctions que Peano a définies dans le système à base 3. A la variable $t = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, nous faisons correspondre les fonctions

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \ldots, \qquad y = 0, \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \ldots,$$

$\alpha_1 = a_1$, α_3 est égal à a_3 ou à $9 - a_3$ suivant que le reste de la division de a_2 par 9 est pair ou impair, α_5 est égal à a_5 ou à $9 - a_5$ suivant que le reste de la division de $a_2 + a_4$ par 9 est pair ou impair et ainsi de suite; de même α_2 est égal à a_2 ou à $9 - a_2$ suivant que le reste de la division de a_1 par 9 est pair ou impair, α_4 est égal à a_4 ou à $9 - a_4$ suivant que le reste de la division de $a_1 + a_3$ par 9 est pair ou impair et ainsi de suite.

Ces fonctions sont continues pour toute valeur de t; c'est immédiat lorsque t n'est pas un nombre décimal; cela résulte, pour une valeur de la variable qui est un nombre décimal, de ce que les deux formes

$$0, a_1 a_2 \ldots a_{2n}\, 9\, 9 \ldots, \qquad 0, a_1 a_2 \ldots a_{2n} + 1\, 0\, 0 \ldots$$
$$(a_{2n} \neq 9)$$

conduisent à la même valeur de x, à la même valeur de y et qu'il en est de même pour les deux formes

$$0,\ a_1 a_2 \dots a_{2n+1}\ 9\ 9\ \dots,$$
$$0,\ a_1 a_2 \dots a_{2n+1} + 1\ 0\ 0\ \dots \qquad (a_{2n+1} \neq 9),$$

Ces fonctions définissent une courbe qui emplit le carré $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ car x, y étant choisis arbitrairement, on en déduit aisément une valeur de t qui les fournit (une seule si les valeurs de x et y ne sont pas des nombres décimaux, deux ou quatre si l'une des valeurs de x et de y ou les deux valeurs sont des nombres décimaux).

Enfin, ces fonctions n'admettent de dérivée pour aucune valeur de la variable ; le raisonnement employé au n° 1 au sujet de la fonction $0,\ a_1 a_3 \dots a_{2n+1} \dots$ s'applique à la fonction x de t avec de légères modifications et s'étend à la fonction y.

3. Voici un énoncé d'exercice qui fournit l'occasion de reprendre certaines des considérations précédentes. Soit la variable $x = 0,\ a_1 a_2 \dots a_n \dots$, en supposant, pour préciser, que l'on choisisse toujours la représentation illimitée. Posons

$$y = a_1 r_1 + a_2 (r_2)^2 + \dots + a_n (r_n)^n + \dots.$$

$|r_1|, |r_2|, \dots, |r_n|, \dots$ étant inférieurs à un nombre k inférieur à 1. Cette série est convergente ; sa somme définit une fonction de x.

Déterminer $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ de telle manière que cette fonction soit continue pour toute valeur de x.

Lorsque $r_1 = r_2 = \dots = r_n = \dots = \frac{1}{p}$, p désignant un entier supérieur à 10, l'ensemble des valeurs prises par la fonction a la puissance du continu, mais il est de mesure nulle.

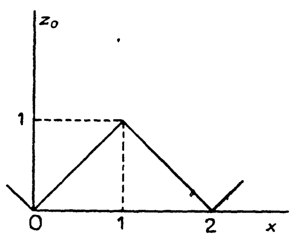
4. Pour arriver à d'autres exemples de fonctions dépourvues de dérivées, je vais définir certaines fonctions auxiliaires. Soit la variable $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, a_0 étant un entier positif ou négatif; posons

$$b_1 = 9 - a_1, \qquad \ldots, \qquad b_n = 9 - a_n, \qquad \ldots.$$

Considérons la fonction $z_0 = f_0(x)$ dont la valeur est définie par l'expression $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ lorsque a_0 est nul ou pair, par l'expression $0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ lorsque a_0 est impair; cette fonction est périodique et de période 2; considérons aussi la fonction $z_1 = f_1(x)$ dont la valeur est $0, a_2 a_3 \ldots$ lorsque a_1 est nul ou pair et $0, b_2 b_3 \ldots$ lorsque a_1 est impair, fonction périodique et de période $\frac{2}{10}$, telle que $f_1(x) = f_0(10x)$; on peut continuer indéfiniment et envisager, quel que soit l'entier positif n, la fonction $z_n = f_n(x)$ dont la valeur est $0, a_{n+1} a_{n+2} \ldots$ lorsque a_n est nul ou pair, $0, b_{n+1} b_{n+2} \ldots$ lorsque a_n est impair, fonction périodique et de période $\frac{2}{10^n}$, telle que $f_n(x) = f_0(10^n x)$.

Ces fonctions sont continues pour toute valeur de x;

Fig. 1.



on le voit immédiatement en remarquant que les deux formes d'un nombre décimal donnent les mêmes valeurs pour l'une quelconque de ces fonctions. On peut aussi remarquer que la courbe représentative (C_0) de la fonction $z_0 = f_0(x)$, qu'il suffit d'indiquer dans l'intervalle (0, 2) en raison de la périodicité, se compose (*fig.* 1) d'une ligne brisée formée de la droite $y = x$ dans l'intervalle (0, 1) et de la droite $y = 2 - x$ dans l'intervalle (1, 2); la courbe représentative (C_1) de la fonction z_1 s'obtient en partant de (C_0) par réduction des abscisses dans le rapport $\frac{1}{10}$, de même pour passer de (C_1) à (C_2), etc., et l'on voit nettement que ces constructions conservent la continuité.

5. Considérons la fonction

$$f(x) = u_0 z_0 + u_1 z_1 + \ldots + u_n z_n + \ldots,$$

$z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ désignant les fonctions continues inférieures ou égales à 1 que nous avons définies au paragraphe précédent, u_n désignant le terme général d'une série absolument convergente.

La fonction $f(x)$ est continue quel que soit x; sous certaines conditions imposées aux u_n, elle n'admet de dérivée pour aucune valeur de la variable. Pour le montrer, j'utiliserai le lemme suivant : $g(x)$ admettant une dérivée pour la valeur x_0 de la variable, x', x'' tendant vers x_0 de telle manière que $x' < x_0 < x''$, le rapport $\frac{g(x'') - g(x')}{x'' - x'}$ tend vers $g'(x_0)$; la démonstration de cette proposition repose sur la remarque que le rapport $\frac{g(x'') - g(x')}{x'' - x'}$ est compris entre les rapports $\frac{g(x'') - g(x_0)}{x'' - x_0}$, $\frac{g(x_0) - g(x')}{x_0 - x'}$ qui tendent tous deux vers $g'(x_0)$.

Soit x_0 une valeur de x qui ne soit pas un nombre décimal; choisissons pour x', x'' les valeurs décimales approchées à $\frac{1}{10^n}$ près, par défaut et par excès, de x_0. Écrivons

$$x_0 = a_0,\ a_1 a_2\ \ldots a_n \ldots,$$
$$x' = a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_n,$$
$$x'' = a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_n + 1,$$

et calculons $f(x'') - f(x')$. Les fonctions z_{n+1}, z_{n+2}, ... qui admettent pour périodes, respectivement, $\frac{2}{10^{n+1}}$, $\frac{2}{10^{n+2}}$, ... admettent aussi pour période $\frac{1}{10^n}$ qui est un multiple des nombres précédents ; ces fonctions prennent donc la même valeur pour x' et pour x''. Occupons-nous maintenant de z_0, z_1, ..., z_n. z_0 augmente de $\frac{(-1)^{a_0}}{10^n}$ lorsqu'on passe de x' à x'' ; z_1 augmente de $\frac{(-1)^{a_1}}{10^{n-1}}$; ... ; z_{n-1} de $\frac{(-1)^{a_{n-1}}}{10}$; z_n de $(-1)^{a_n}$, et par suite

$$f(x'') - f(x') = \frac{(-1)^{a_0} u_0}{10^n} + \frac{(-1)^{a_1} u_1}{10^{n-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{a_{n-1}} u_{n-1}}{10} + (-1)^{a_n} u_n$$

et, enfin, puisque $x'' - x' = \frac{1}{10^n}$,

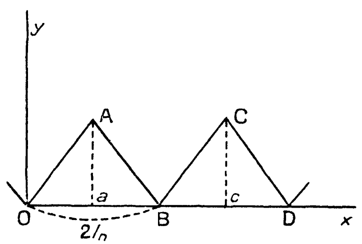
$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = (-1)^{a_0} u_0 + (-1)^{a_1} 10 u_1 + \ldots + (-1)^{a_{n-1}} 10^{n-1} u_{n-1} + (-1)^{a_n} 10^n u_n,$$

si la série de terme général $(-1)^{a_n} 10^n u_n$ n'est pas convergente, la dérivée n'existe pas. Il suffit, en particulier, pour obtenir ce résultat, de choisir u_n de telle manière que $10^n u_n$ ne tende pas vers zéro. La condition est très large.

Si x_0 est un nombre décimal, x' sera égal à x_0 à partir d'une certaine valeur de n ; le calcul précédent reste valable mais on se trouve alors dans un cas plus simple dans lequel le lemme devient inutile.

6. Il existe bien d'autres façons de construire des fonctions dépourvues de dérivées. Voici un procédé qui m'a été indiqué par M. Lebesgue ; laissant de côté certaines particularités, il faut y voir surtout l'utilisation de cette idée si fréquemment utilisée par les analystes : Former une série Σu_n telle que pour chaque point x il y ait un terme u_n jouant un rôle prépondérant dans le calcul considéré ; ici, dans le calcul de la dérivée. Soit la fonction $f(x)$, somme de la série dont le terme général, $u_n(x)$, est une fonction qui a pour courbe représentative (*fig.* 2) une ligne brisée en dents de scie

Fig. 2



déduites les unes des autres par des translations parallèles à Ox et égales à $2l_n$, les pentes des côtés OA, AB, BC, CD, ... étant $\pm\lambda_n$. Évaluons $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; en choisissant h égal, soit à $\frac{l_n}{2}$, soit à $-\frac{l_n}{2}$, on peut faire en sorte que x et $x+h$ appartiennent à l'un des intervalles tels que Oa, aB, ... ; avec cette condition, la contribution de u_n dans le rapport est, en valeur absolue, égale à λ_n ; celle de $u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$ est au plus égale en valeur absolue à $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}=\sigma_n$; enfin celle de $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots$ est $\rho_n=\pm\frac{2}{l_n}\sum_{p=1}^{p\infty}\Delta u_{n+p}$.

Or, il est facile de choisir l_n et λ_n de façon que la série de terme général $u_n(x)$ soit uniformément convergente, que λ_n, infiniment grand avec n, soit infiniment grand par rapport à σ_n et ρ_n en sorte que le rapport considéré croisse indéfiniment et que l'inexistence de la dérivée soit prouvée. Entre autres exemples, prenons $l_n = \frac{1}{(n!)^2}$, $\lambda_n = n!$. On peut écrire

$$|u_n| \leq l_n \lambda_n = \frac{1}{n!}, \qquad |\Delta u_n| \leq \frac{1}{n!},$$

$$|\rho_n| \leq 2(n!)^2 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{(n-p)!} < \frac{2(n!)^2}{n.n!}, \qquad |\rho_n| < \frac{2\lambda_n}{n},$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_n}{\lambda_n} &= \frac{1+2!+\ldots+(n-1)!}{n!} \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{2!}{(n-1)!} + \ldots + 1\right], \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_n}{\lambda_n} < \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right),$$

$$\frac{\sigma_n}{\lambda_n} < \frac{2}{n},$$

les conditions précédentes sont donc bien remplies.